2.1 Grundlagen

Lösungen

Aufgabe 1

Nur die Spannungskomponente σ_x ist von null verschieden. Damit berechnet sich die virtuelle Formänderungsleistung zu

$$\tilde{\dot{E}}^F = \int_0^L \tilde{\dot{\epsilon}}_x \sigma_x S\, dx .$$

Die virtuelle Leistung der äußeren Kräfte ist

$$\tilde{P} = \tilde{v}_A A_x + \tilde{v}_B B_x ,$$

wobei $\tilde{v}_A$ und $\tilde{v}_B$ die virtuellen Geschwindigkeiten an den Enden *A* und *B* sind.

Damit lautet das Prinzip der virtuellen Leistung:

$$\int_0^L \tilde{\dot{\epsilon}}_x \sigma_x S\, dx = \tilde{v}_A A_x + \tilde{v}_B B_x \quad \forall \quad \tilde{v}$$

Für die virtuelle Dehnungsgeschwindigkeit gilt: $\tilde{\dot{\epsilon}}_x = \dfrac{d\tilde{v}}{dx}$

Partielle Integration der virtuellen Formänderungsleistung ergibt:

$$\begin{aligned}\int_0^L \tilde{\dot{\epsilon}}_x \sigma_x S\, dx &= \left[\tilde{v}(x)\sigma_x(x) S\right]_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \tilde{v} \frac{d\sigma_x}{dx} S\, dx \\ &= \tilde{v}_B \sigma_x(L) S - \tilde{v}_A \sigma_x(0) S - \int_0^L \tilde{v} \frac{d\sigma_x}{dx} S\, dx\end{aligned}$$

Einsetzen in das Prinzip der virtuellen Leistung ergibt:

$$\tilde{v}_B\left(\sigma_x(L) S - B_x\right) - \tilde{v}_A\left(\sigma_x(0) S + A_x\right) = \int_0^L \tilde{v} \frac{d\sigma_x}{dx} S\, dx \quad \forall \quad \tilde{v}$$

Da die linke Seite der Gleichung im Gegensatz zur rechten Seite der Gleichung nicht von den beliebig wählbaren virtuellen Geschwindigkeiten im Innern des Stabes abhängt, müssen beide Seiten der Gleichung null sein.

Aus der linken Seite folgen die natürlichen Randbedingungen:

$$\sigma_x(0) = -\frac{A_x}{S}, \quad \sigma_x(L) = \frac{B_x}{S}$$

Aus der rechten Seite folgt die lokale Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{d\sigma_x}{dx}=0$$

Damit die Kräfte an den beiden Enden sichtbar werden, muss der Stab komplett freigeschnitten werden. Dann ist als virtuelle Bewegung eine Starrkörperbewegung entlang der Stabachse möglich. Für die zugehörige virtuelle Geschwindigkeit gilt:

$$\tilde{v}(x)=\tilde{v}_A=\tilde{v}_B=\tilde{v}_R=const. \rightarrow \tilde{\dot{\epsilon}}_x=0$$

Damit folgt aus dem Prinzip der virtuellen Leistung die Gleichgewichtsbedingung für den freigeschnittenen Stab:

$$0=\tilde{v}_A A_x+\tilde{v}_B B_x=\tilde{v}_R(A_x+B_x) \quad \forall \quad \tilde{v}_r \rightarrow A_x+B_x=0$$

Aufgabe 2

a) <u>Prinzip der virtuellen Leistung</u>

Aus

$$u(x,z)=\phi(x)z$$

folgt für die Verzerrungen:

$$\epsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{d\phi}{dx}z, \quad \epsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad \gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\phi(x)+\frac{dw}{dx}$$

Mit

$$\phi(x)=-\frac{dw}{dx}$$

folgt für die Scherung: $\gamma_{xz}=0$

Mit $\sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=\tau_{yz}=0$ folgt:

$$\sigma_x=E\epsilon_x=E\frac{d\phi}{dx}z=-Ez\frac{d^2w}{dx^2}$$

$$\tilde{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}:\boldsymbol{\sigma}=\tilde{\dot{\epsilon}}_x\sigma_x=Ez^2\frac{d^2\tilde{\dot{w}}}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}$$

Damit berechnet sich die Bilinearform K zu

$$K[\tilde{\boldsymbol{v}},\boldsymbol{u}]=K[\tilde{\dot{w}},w]=\int_0^L\int_A Ez^2\frac{d^2\tilde{\dot{w}}}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}\,dA\,dx=\int_0^L EI_y\frac{d^2\tilde{\dot{w}}}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}\,dx$$

Bei gelenkiger Lagerung sind Biegemoment und Verschiebung an den Rändern null. Damit sind auch die virtuellen Geschwindigkeiten an den Rändern null. Damit berechnet sich die virtuelle Leistung der äußeren Last zu

$$L[\tilde{\dot{w}}]=\int_0^L \tilde{\dot{w}}\, q_z\, dx \ .$$

b) <u>Differentialgleichung der Balkenbiegung</u>

Eine erste partielle Integration ergibt:

$$\begin{aligned}K[\tilde{\dot{w}},w]&=\left[E I_y \frac{d\tilde{\dot{w}}}{dx}\frac{d^2 w}{dx^2}\right]_{x=0}^{x=L}-\int_0^L E I_y \frac{d\tilde{\dot{w}}}{dx}\frac{d^3 w}{dx^3}\,dx\\&=\left(\frac{d\tilde{\dot{w}}}{dx}(L) E I_y \frac{d^2 w}{dx^2}(L)-\frac{d\tilde{\dot{w}}}{dx}(L) E I_y \frac{d^2 w}{dx^2}(L)\right)-\int_0^L E I_y \frac{d\tilde{\dot{w}}}{dx}\frac{d^3 w}{dx^3}\,dx\end{aligned}$$

Mit

$$E I_y \frac{d^2 w}{dx^2}=-M_y \quad \text{und} \quad \frac{d\tilde{\dot{w}}}{dx}=-\tilde{\dot{\phi}}$$

folgt:

$$K[\tilde{\dot{w}},w]=\tilde{\dot{\phi}}_B M_{yB}-\tilde{\dot{\phi}}_A M_{yA}-\int_0^L E I_y \frac{d\tilde{\dot{w}}}{dx}\frac{d^3 w}{dx^3}\,dx$$

Eine zweite partielle Integration des verbleibenden Integrals ergibt:

$$\int_0^L E I_y \frac{d\tilde{\dot{w}}}{dx}\frac{d^3 w}{dx^3}\,dx=\left[\tilde{\dot{w}} E I_y \frac{d^3 w}{dx^3}\right]_{x=0}^{x=L}-\int_0^L E I_y \tilde{\dot{w}} \frac{d^4 w}{dx^4}\,dx=-\int_0^L E I_y \tilde{\dot{w}} \frac{d^4 w}{dx^4}\,dx$$

Dabei wurde

$$\tilde{\dot{w}}(0)=\tilde{\dot{w}}(L)=0$$

benutzt.

Einsetzen in das Prinzip der virtuellen Arbeit

$$K[\tilde{\dot{w}},w]=L[\tilde{\dot{w}}]$$

ergibt:

$$\int_0^L \tilde{\dot{w}}\left(E I_y \frac{d^4 w}{dx^4}-q_z\right)dx=\tilde{\dot{\phi}}_A M_{yA}-\tilde{\dot{\phi}}_B M_{yB}$$

Mit der gleichen Argumentation wie in Aufgabe 1 folgt:

$$E I_y \frac{d^4 w}{dx^4}=q_z\ , \quad M_{yA}=M_{yB}=0$$

Aufgabe 3

a) Erfüllung der wesentlichen Randbedingungen

Die wesentlichen Randbedingungen lauten: $w(0)=w(L)=0$

Diese Bedingungen werden offensichtlich von den drei Ansatzfunktionen erfüllt.

b) Matrizen

Für die Berechnung der Steifigkeitsmatrix werden die zweiten Ableitungen der Ansatzfunktionen benötigt:

$$\frac{dw_1}{dx}=\frac{1}{L}-2\frac{x}{L^2},\quad \frac{d^2w_1}{dx^2}=-\frac{2}{L^2}$$

$$\frac{dw_2}{dx}=2\frac{x}{L^2}-3\frac{x^2}{L^3},\quad \frac{d^2w_2}{dx^2}=\frac{2}{L^2}-6\frac{x}{L^3}=\frac{1}{L^2}\left(2-6\frac{x}{L}\right)$$

$$\frac{dw_3}{dx}=2\frac{x}{L^2}-6\frac{x^2}{L^3}+4\frac{x^3}{L^4},\quad \frac{d^2w_3}{dx^2}=\frac{2}{L^2}-12\frac{x}{L^3}+12\frac{x^2}{L^4}=\frac{2}{L^2}\left(1-6\frac{x}{L}+6\frac{x^2}{L^2}\right)$$

Mit dem Ergebnis von Aufgabe 2 folgt für die Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix:

$$K_{11}=K[w_1,w_1]=\frac{4EI_y}{L^3}$$

$$K_{12}=K[w_1,w_2]=-2\frac{EI_y}{L^3}\int_0^1\left(2-6\frac{x}{L}\right)d\left(\frac{x}{L}\right)=\frac{2EI_y}{L^3}$$

$$K_{13}=K[w_1,w_3]=-4\frac{EI_y}{L^3}\int_0^1\left(1-6\frac{x}{L}+6\frac{x^2}{L^2}\right)d\left(\frac{x}{L}\right)=0$$

$$K_{22}=K[w_2,w_2]=\frac{EI_y}{L^2}\int_0^1\left(2-6\frac{x}{L}\right)^2d\left(\frac{x}{L}\right)=\frac{4EI_y}{L^3}$$

$$K_{23}=K[w_2,w_3]=\frac{2EI_y}{L^3}\int_0^1\left(2-6\frac{x}{L}\right)\left(1-6\frac{x}{L}+6\frac{x^2}{L^2}\right)d\left(\frac{x}{L}\right)=0$$

$$K_{33}=K[w_3,w_3]=\frac{4EI_y}{L^3}\int_0^1\left(1-6\frac{x}{L}+6\frac{x^2}{L^2}\right)^2d\left(\frac{x}{L}\right)=\frac{4}{5}\frac{EI_y}{L^3}$$

Damit gilt:

$$[K]=\frac{E\,I_y}{5\,L^3}\begin{bmatrix}20 & 10 & 0\\ 10 & 20 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

Die Koeffizienten der Lastmatrix berechnen sich zu

$$l_1=L[w_1]=q_0 L\int_0^1\left(\frac{x}{L}\right)^2\left(1-\frac{x}{L}\right)d\left(\frac{x}{L}\right)=\frac{1}{12}q_0 L$$

$$l_2=L[w_2]=q_0 L\int_0^1\left(\frac{x}{L}\right)^3\left(1-\frac{x}{L}\right)d\left(\frac{x}{L}\right)=\frac{1}{20}q_0 L$$

$$l_3=L[w_3]=q_0 L\int_0^1\left(\frac{x}{L}\right)^3\left(1-\frac{x}{L}\right)d\left(\frac{x}{L}\right)=\frac{1}{60}q_0 L$$

Damit gilt:

$$[l]=\frac{1}{60}q_0 L\begin{bmatrix}5\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$$

c) <u>Berechnung der Koeffizienten</u>

Die Koeffizienten q_n ergeben sich durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\frac{E\,I_y}{5\,L^3}\begin{bmatrix}20 & 10 & 0\\ 10 & 20 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\end{bmatrix}=\frac{1}{60}q_0 L\begin{bmatrix}5\\ 3\\ 1\end{bmatrix},$$

das zu

$$\begin{bmatrix}20 & 10 & 0\\ 10 & 20 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\end{bmatrix}=\frac{q_0 L^4}{12\,E\,I_y}\begin{bmatrix}5\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$$

umgeformt werden kann. Die Lösung ist

$$[q]=\frac{q_0 L^4}{12\,E\,I_y}\begin{bmatrix}7/30\\ 1/30\\ 1/4\end{bmatrix}=\frac{q_0 L^4}{720\,E\,I_y}\begin{bmatrix}14\\ 2\\ 15\end{bmatrix}.$$

Damit lautet die Näherungslösung:

$$w_N(x)=\frac{q_0 L^4}{720\,E I_y}\left[14\frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)+2\left(\frac{x}{L}\right)^2\left(1-\frac{x}{L}\right)+15\frac{x^2}{L^2}\left(1-\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

$$=\frac{q_0 L^4}{720\,E I_y}\left(1-\frac{x}{L}\right)\left[14\frac{x}{L}+2\left(\frac{x}{L}\right)^2+15\left(\frac{x}{L}\right)^2-15\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]$$

$$=\frac{q_0 L^4}{720\,E I_y}\left[15\left(\frac{x}{L}\right)^4-32\left(\frac{x}{L}\right)^3+3\left(\frac{x}{L}\right)^2+14\frac{x}{L}\right]$$

Die analytische Lösung kann durch vierfache Integration der Streckenlast ermittelt werden:

$$E I_y \frac{d^4 w}{dx^4}=q_0\frac{x}{L}$$

$$E I_y \frac{d^3 w}{dx^3}=q_0\frac{x^2}{2L}+c_1$$

$$E I_y \frac{d^2 w}{dx^2}=q_0\frac{x^3}{6L}+c_1 x+c_2=-M_y(x)$$

$$E I_y \frac{dw}{dx}=q_0\frac{x^4}{24L}+\frac{1}{2}c_1 x^2+c_2 x+c_3$$

$$E I_y w(x)=q_0\frac{x^5}{120L}+\frac{1}{6}c_1 x^3+\frac{1}{2}c_2 x^2+c_3 x+c_4$$

Die Integrationskonstanten werden aus den Randbedingungen bestimmt:

$$M_y(0)=0 \;:\; c_2=0$$

$$M_y(L)=0 \;:\; \frac{1}{6}q_0 L^2+c_1 L=0 \;\rightarrow\; c_1=-\frac{1}{6}q_0 L$$

$$w(0)=0 \;:\; c_4=0$$

$$w(L)=0 \;:\; \frac{1}{120}q_0 L^4-\frac{1}{36}q_0 L^4+c_3 L=0 \;\rightarrow\; c_3=\frac{7}{360}q_0 L^3$$

Damit gilt für die Biegelinie:

$$w(x)=\frac{q_0 L^4}{360\,E I_y}\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^5-10\left(\frac{x}{L}\right)^3+7\frac{x}{L}\right]$$

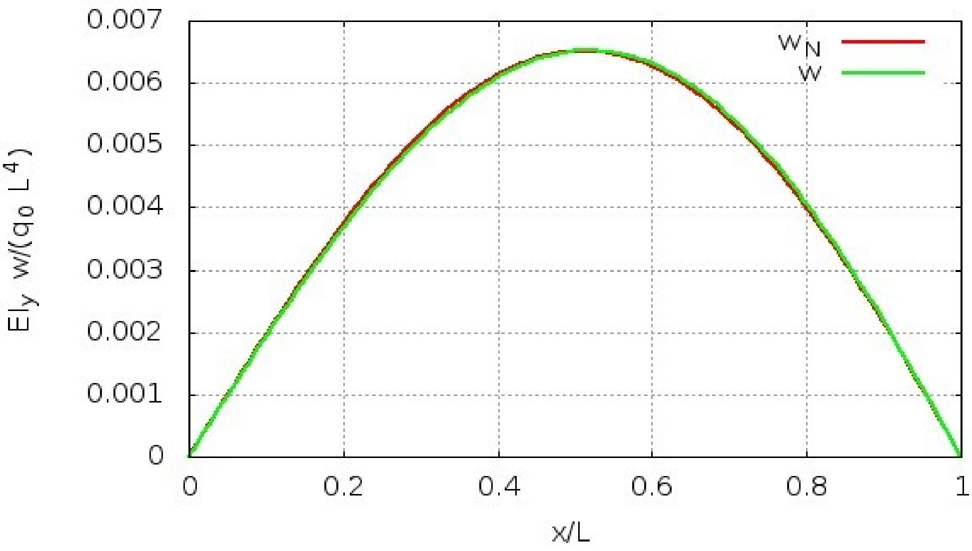

Abbildung 3.1: Vergleich der Biegelinien

Abbildung 3.1 zeigt eine gute Übereinstimmung zwischen der Näherungslösung und der analytischen Lösung.