3.1 Transport-Theoreme

Lösungen

Aufgabe 1

Zu zeigen ist: $[A]^{-1}[A]=[I]$ und $[A][A]^{-1}=[I]$

Für das erste Matrix-Produkt gilt

$$[A]^{-1}[A] = \frac{1}{A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

mit

$$b_{11}=A_{11}a_{11}+A_{21}a_{21}+A_{31}a_{31}$$
$$=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}a_{11}-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}a_{21}+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}a_{31}=\det([A])=A \quad ,$$

$$b_{22}=A_{12}a_{12}+A_{22}a_{22}+A_{32}a_{32}$$
$$=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}a_{11}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}a_{22}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}a_{31}=\det([A])=A \quad \text{und}$$

$$b_{33}=A_{13}a_{13}+A_{23}a_{23}+A_{33}a_{33}$$
$$=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}a_{13}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}a_{23}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}a_{33}=\det([A])=A \quad .$$

Für die Außerdiagonalelemente gilt z. B.

$$b_{21}=A_{12}a_{11}+A_{22}a_{21}+A_{32}a_{31}$$
$$=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}a_{11}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}a_{21}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}a_{31}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=0 \quad .$$

Auf die gleiche Weise folgt, dass auch alle anderen Außerdiagonalelemente null sind.

Damit ist gezeigt: $[A]^{-1}[A]=\frac{1}{A}\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}=[I]$

Für das zweite Matrix-Produkt gilt

$$[A][A]^{-1} = \frac{1}{A}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \det([A]) = A \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} c_{22} &= a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23} \\ &= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \det([A]) = A \end{aligned}$$ und

$$\begin{aligned} c_{33} &= a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33} \\ &= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det([A]) = A \end{aligned}.$$

Die Außerdiagonalelemente sind wieder null, z. B.

$$\begin{aligned} c_{12} &= a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} \\ &= -a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}.$$

Damit ist gezeigt: $[A][A]^{-1} = \frac{1}{A}\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} = [I]$

Aufgabe 2

Nach der Regel von Sarrus gilt für die Determinante:

$$\begin{aligned} A &= \det([A]) \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{21} a_{12} a_{33} \end{aligned}$$

Ableiten ergibt:

$$\begin{aligned} \dot{A} = {} & \dot{a}_{11} a_{22} a_{33} + \dot{a}_{12} a_{32} a_{13} + \dot{a}_{31} a_{12} a_{23} - \dot{a}_{31} a_{22} a_{13} - \dot{a}_{11} a_{32} a_{23} - \dot{a}_{21} a_{12} a_{33} \\ & + a_{11} \dot{a}_{22} a_{33} + a_{21} \dot{a}_{32} a_{13} + a_{13} \dot{a}_{12} a_{23} - a_{31} \dot{a}_{22} a_{13} - a_{11} \dot{a}_{32} a_{23} - a_{21} \dot{a}_{12} a_{23} \\ & + a_{11} a_{22} \dot{a}_{33} + a_{21} a_{32} \dot{a}_{13} + a_{31} a_{12} \dot{a}_{23} - a_{31} a_{22} \dot{a}_{13} - a_{11} a_{32} \dot{a}_{23} - a_{21} a_{12} \dot{a}_{33} \end{aligned}$$

Anwendung der Regel von Sarrus auf jede der drei Zeilen ergibt:

$$\dot{A}=\begin{vmatrix} \dot{a}_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \dot{a}_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \dot{a}_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \dot{a}_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \dot{a}_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \dot{a}_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dot{a}_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \dot{a}_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \dot{a}_{33} \end{vmatrix}$$