

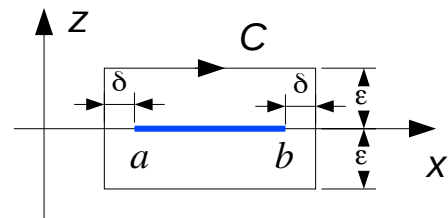
4.1 Profiltheorie

Lösungen

Aufgabe 1

Wie im Falle von diskreten Wirbeln lässt sich zeigen, dass die Zirkulation unabhängig vom Weg ist (s. Aufgabe 7 von Übungsblatt 3.5).

Zur Berechnung wird als Weg der Rand des Rechtecks $a - \delta \leq x \leq b + \delta$, $-\varepsilon \leq z \leq \varepsilon$ gewählt. Dabei sind δ und ε zwei zunächst beliebige Konstanten.



Mit

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty + \mathbf{w}(x, z)$$

gilt:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s}$$

Dabei ist \mathbf{w} die von der Wirbelbelegung induzierte Geschwindigkeit.

Die Integration über die vier Kanten des Rechtecks ergibt:

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{a-\delta}^{b+\delta} w_x(x, \varepsilon) dx + \int_{\varepsilon}^{-\varepsilon} w_z(b+\delta, z) dz \\ &\quad + \int_{b+\delta}^{a-\delta} w_x(x, -\varepsilon) dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} w_z(a-\delta, z) dz \\ &= \int_{a-\delta}^{b+\delta} (w_x(x, \varepsilon) - w_x(x, -\varepsilon)) dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (w_z(a-\delta, z) - w_z(b+\delta, z)) dz \end{aligned}$$

Für das erste Integral gilt:

$$\begin{aligned} \int_{a-\delta}^{b+\delta} (w_x(x, \varepsilon) - w_x(x, -\varepsilon)) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{a-\delta}^{b+\delta} \int_a^b \frac{2\gamma(\xi)\varepsilon}{(x-\xi)^2 + \varepsilon^2} d\xi dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_a^b \gamma(\xi) \int_{a-\delta}^{b+\delta} \frac{\varepsilon dx}{(x-\xi)^2 + \varepsilon^2} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_a^b \gamma(\xi) \left[\arctan\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon}\right) \right]_{x=a-\delta}^{x=b+\delta} d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_a^b \gamma(\xi) \left(\arctan\left(\frac{b+\delta-\xi}{\varepsilon}\right) - \arctan\left(\frac{a-\delta-\xi}{\varepsilon}\right) \right) d\xi \end{aligned}$$

Wegen $b+\delta > \xi$ und $a-\delta < \xi$ strebt der erste Term in der Klammer für ε ge-

gen null gegen $\pi/2$ und der zweite gegen $-(-\pi/2)=\pi/2$. Damit gilt:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a-\delta}^{b+\delta} (w_x(x, \varepsilon) - w_x(x, -\varepsilon)) dx = \int_a^b \gamma(\xi) d\xi = \int_a^b \gamma(x) dx$$

Für das zweite Integral gilt:

$$\begin{aligned} & \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (w_z(a-\delta, z) - w_z(b+\delta, z)) dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_a^b \left(\frac{\gamma(\xi)(b+\delta-\xi)}{(b+\delta-\xi)^2+z^2} - \frac{\gamma(\xi)(a-\delta-\xi)}{(a-\delta-\xi)^2+z^2} \right) d\xi dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b \gamma(x) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\frac{b+\delta-\xi}{(b+\delta-\xi)^2+z^2} - \frac{a-\delta-\xi}{(a-\delta-\xi)^2+z^2} \right) dz d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b \gamma(x) \left[\arctan\left(\frac{z}{b+\delta-\xi}\right) - \arctan\left(\frac{z}{a-\delta-\xi}\right) \right]_{z=-\varepsilon}^{z=\varepsilon} d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_a^b \gamma(x) \left(\arctan\left(\frac{\varepsilon}{b+\delta-\xi}\right) - \arctan\left(\frac{\varepsilon}{a-\delta-\xi}\right) \right) d\xi \end{aligned}$$

Für ε gegen null streben beide Integranden und damit das Integral gegen null.

Da die Zirkulation nicht vom Weg und damit nicht von ε abhängt, ist gezeigt:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \gamma(x) dx$$

Aufgabe 2

a) Untersuchung der Skelettlinie

Aus

$$z_s(x) = c \delta \left(2 \frac{x^3}{c^3} - 3 \frac{x^2}{c^2} + 1 \frac{x}{c} \right) = c \delta \frac{x}{c} \left(2 \frac{x^2}{c^2} - 3 \frac{x}{c} + 1 \right)$$

folgt für die Nullstellen:

$$\left(\frac{x}{c} \right)_1 = 0, \quad \left(\frac{x}{c} \right)_{2/3} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4} \rightarrow \left(\frac{x}{c} \right)_2 = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{x}{c} \right)_3 = 1$$

Für die Steigung der Skelettlinie gilt:

$$\frac{dz_s}{dx} = \delta \left(6 \frac{x^2}{c^2} - 6 \frac{x}{c} + 1 \right)$$

Aus

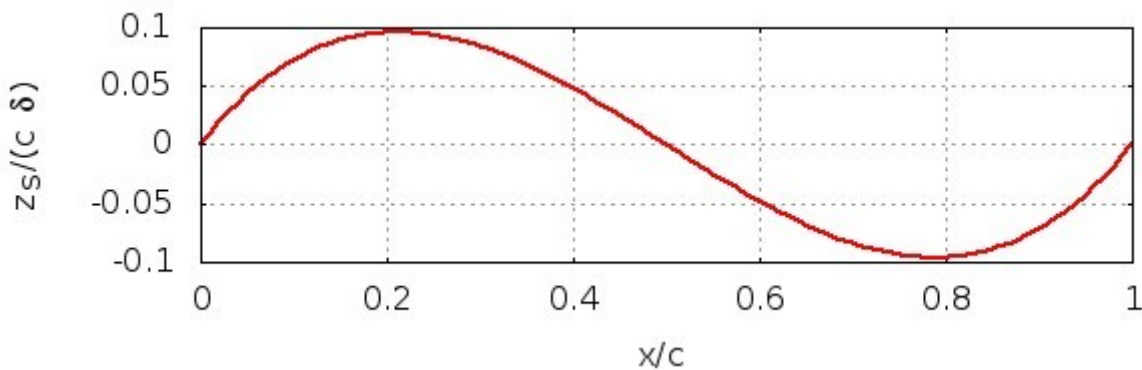


Abbildung 2.1: Skelettlinie

$$\frac{dz_s}{dx}(0) = \frac{dz_s}{dx}(c) = \delta$$

folgt, dass die Skelettlinie an der Profilnase und an der Hinterkante die gleiche Steigung δ hat. Abbildung 2.1 zeigt, dass die Skelettlinie einen S-Schlag hat.

b) Aerodynamische Beiwerte

Mit

$$\frac{x}{c} = \frac{1}{2}(1 + \cos(\theta))$$

folgt:

$$\begin{aligned} 6 \left(\frac{x^2}{c^2} - \frac{x}{c} \right) &= 6 \frac{x}{c} \left(\frac{x}{c} - 1 \right) = 3(1 + \cos(\theta)) \left(\frac{1}{2}(1 + \cos(\theta)) - 1 \right) \\ &= \frac{3}{2}(\cos(\theta) + 1)(\cos(\theta) - 1) = \frac{3}{2}(\cos^2(\theta) - 1) \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)) - 1 \right) = \frac{3}{4}(\cos(2\theta) - 1) \end{aligned}$$

Damit gilt für die Steigung der Skelettlinie:

$$\frac{dz_s}{dx}(\theta) = \delta \left(\frac{3}{4}(\cos(2\theta) - 1) + 1 \right) = \delta \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos(2\theta) \right)$$

Aus

$$\frac{dz_s}{dx}(\theta) = \frac{G_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cos(n\theta)$$

folgt:

$$G_0 = \frac{\delta}{2}, \quad G_1 = 0, \quad G_2 = \frac{3}{4}\delta$$

Damit berechnen sich Nullauftriebswinkel und Momentenbeiwert zu

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}(G_0 + G_1) = \frac{\delta}{4}$$

und

$$c_{M_0} = \frac{\pi}{4}(G_1 + G_2) = \frac{3}{16}\pi\delta.$$

c) Druckverteilung

Aus

$$\Delta c_p(x) = 2 \frac{\gamma(x)}{v_\infty}$$

und

$$\gamma(\theta) = -2v_\infty \left(\left(\frac{G_0}{2} - \alpha \right) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin(n\theta) \right)$$

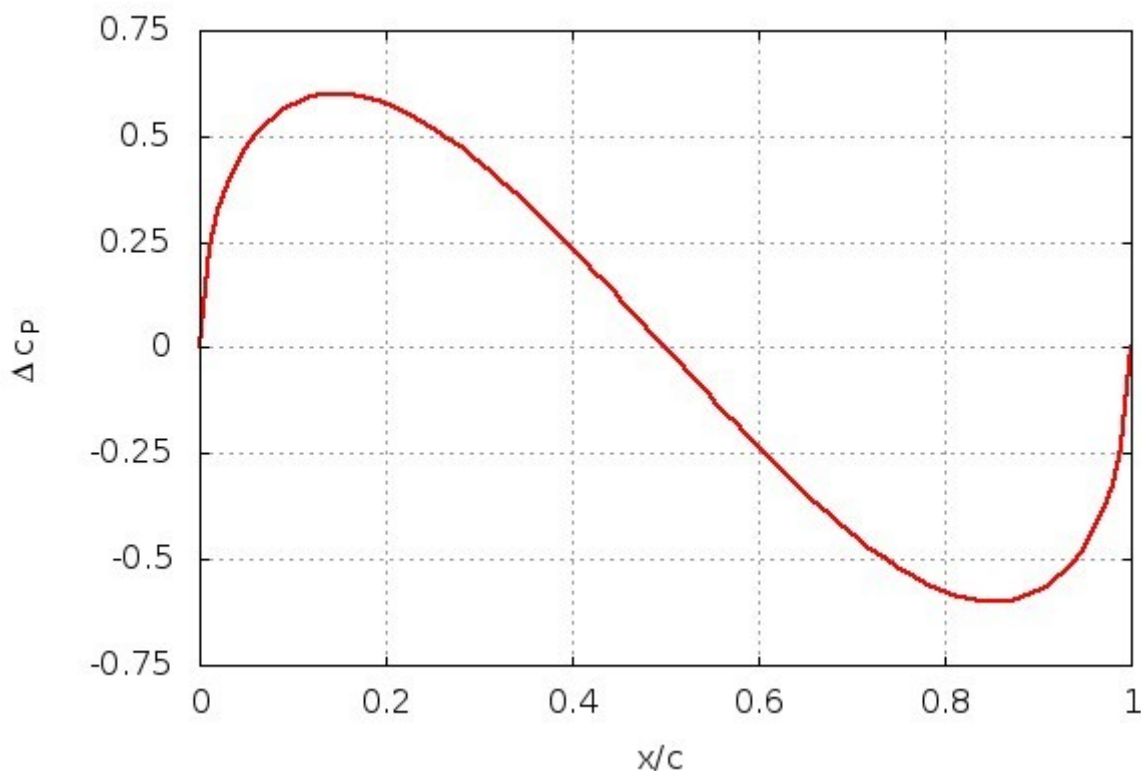


Abbildung 2.2: Druckverteilung

folgt für $\alpha = \delta/4 = G_0/2$:

$$\Delta c_p(\theta) = -4G_2 \sin(2\theta) = -3\delta \sin(2\theta)$$

Mit

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) = 2\sqrt{1-\cos^2(\theta)}\cos(\theta)$$

und

$$\cos(\theta) = 2\frac{x}{c} - 1$$

folgt:

$$\Delta c_p(x) = -6\delta \sqrt{1 - 4\frac{x^2}{c^2} + 4\frac{x}{c} - 1} \left(2\frac{x}{c} - 1\right) = -12\delta \left(2\frac{x}{c} - 1\right) \sqrt{\frac{x}{c} \left(1 - \frac{x}{c}\right)}$$

Die Druckverteilung ist in Abbildung 2.2 graphisch dargestellt.

Aufgabe 3

Die Funktion löst das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{n=1}^N \frac{\Gamma_n / v_\infty}{x_{\Gamma_n} - x_{Cn}} = 2\pi \left(\frac{dz_s}{dx}(x_{Cn}) - \alpha \right).$$

GNU Octave-Code

```
function G = vortex2d(xg, xc, dw)

# usage: G = vortex2d(xg, xc, dw)
#
# Input   xg(:)      Column vector with vortex positions
#         xc(:)      Column vector with control point positions
#         dw(:, :)   Array with downwash dz/dx - alpha
#
# Output  G(:, :)    Vortex strengths
#
# The function computes the strengths of the discrete vortices of
# the 2-dimensional discrete vortex method. The vortices are
# scaled by the velocity of the undisturbed flow.
#
# -----

# Check arguments

if (nargin != 3 || nargout != 1)
    print_usage;
end

N = length(xg);
```

```

if (length(xc) != N)
    error("Incompatible size of xg and xc\n");
end
nr = rows(dw);
if (nr != N)
    error("Incompatible size of xg and dw\n");
end

# Build right-hand side
rhs = 2 * pi * dw;

# Build matrix of influence coefficients
C = 1 ./ (xg' - xc);

# Solve
G = C \ rhs;

end

```

Die 1. Birnbaum-Ackermansche Normalverteilung hat die Ableitung

$$\frac{dz_s}{dx} = 0.$$

Die Ableitung der 2. Birnbaum-Ackermanschen Normalverteilung ist

$$\frac{dz_s}{dx} = 4 \frac{h}{c} \left(1 - 2 \frac{x}{c} \right).$$

Analytische Lösungen:

1. Normalverteilung	2. Normalverteilung
$\Delta c_p(x) = 4\alpha \sqrt{\frac{1-x/c}{x/c}}$	$\Delta c_p(x) = 32 \frac{h}{c} \sqrt{\frac{x}{c} \left(1 - \frac{x}{c} \right)}$
$\alpha_0 = 0$	$\alpha_0 = -2 \frac{h}{c}$
$c_L = 2\pi\alpha$	$c_L = 2\pi \left(\alpha + 2 \frac{h}{c} \right)$
$c_{M_0} = 0$	$c_{M_0} = -\pi \frac{h}{c}$

GNU Octave-Code

```

# Übungsblatt 4.1, Aufgabe 3: Normalverteilungen
# -----
# -----

```

```

N      = 50; % Anzahl der Intervalle
alpha1 = 0.1; % Anstellwinkel für 1. Normalverteilung
alpha2 = 0; % Anstellwinkel für 2. Normalverteilung
h      = 0.1; % Skeletthöhe

file = mfilename();
fid  = fopen([file, ".res"], "wt"); % Ausgabedatei

# Intervalle

theta = linspace(0, pi, N + 1);
x      = 0.5 * (1 - cos(theta))'; % Intervallgrenzen
dx     = diff(x); % Intervalllängen
xg     = x(1 : N) + 0.25 * dx; % Wirbel
xc     = x(1 : N) + 0.75 * dx; % Kontrollpunkte

# Rechte Seiten

slopes(:, 1) = -alpha1(ones(N, 1));
slopes(:, 2) = 4 * h * (1 - 2 * xc) - alpha2;

# Wirbelstärken

G = vortex2d(xg, xc, slopes);

# Beiwerte

cL = 2 * sum(G);
cM = 2 * (0.25 - xg)' * G;

# Druckverteilung

cp(:, 1) = 2 * G(:, 1) ./ dx;
cp(:, 2) = 2 * G(:, 2) ./ dx;

# Analytische Ergebnisse

CP(:, 1) = 4 * alpha1 * sqrt((1 - x) ./ x);
CP(:, 2) = 32 * h * sqrt(x .* (1 - x));

CL(1) = 2 * pi * alpha1;
CL(2) = 2 * pi * (alpha2 + 2 * h);
CM(1) = 0;
CM(2) = -pi * h;

fprintf(fid, "1. Normalverteilung:\n");
fprintf(fid, "      N = %3.0d      exakt\n", N);
fprintf(fid, "   cL:  %8.5f  %8.5f\n", cL(1), CL(1));
fprintf(fid, "   cM:  %8.5f  %8.5f\n", cM(1), CM(1));

fprintf(fid, "\n2. Normalverteilung:\n");
fprintf(fid, "      N = %3.0d      exakt\n", N);
fprintf(fid, "   cL:  %8.5f  %8.5f\n", cL(2), CL(2));
fprintf(fid, "   cM:  %8.5f  %8.5f\n", cM(2), CM(2));

```

```
fclose(fid);
```

```
# Graphische Ausgabe der Druckverteilung
```

```
text1 = "1. Normalverteilung: ";
text1 = [text1, sprintf('/Symbol a} = %3.1f', alpha1)];
text2 = "2. Normalverteilung: ";
text2 = [text2, sprintf('/Symbol a} = %3.1f, ', alpha2)];
text2 = [text2, sprintf(' h/c = %3.1f', h)];
text1 = sprintf("N = %d", N);
```

```
set(0, "defaultlinelinerwidth", 2);
set(0, "defaultaxesfontname", "Arial");
set(0, "defaultaxesfontsize", 12);
set(0, "defaulttextfontsize", 12);
```

```
figure(1, "position", [100, 500, 750, 500],
       "paperposition", [0, 0, 14, 12]);
```

```
subplot(2, 1, 1);
plot(x, CP(:, 1), "color", "red",
     xg, cp(:, 1), "color", "green", "marker", "o",
     "linestyle", "none");
```

```
legend("exakt", text1);
legend("left"); legend("boxoff");
text(0.1, 1.8, text1);
```

```
grid;
axis([0, 1, 0, 2]);
ylabel('\Delta c_P');
```

```
subplot(2, 1, 2);
plot(x, CP(:, 2), "color", "red",
     xg, cp(:, 2), "color", "green", "marker", "o",
     "linestyle", "none");
```

```
legend("exakt", text1);
legend("left"); legend("boxoff");
text(0.1, 0.5, text2);
```

```
grid;
xlabel('x/c');
ylabel('\Delta c_P');
```

```
print([file, ".jpg"], "-djpg");
```

Für die aerodynamischen Beiwerte werden folgende Werte ausgegeben:

1. Normalverteilung:

	N = 50	exakt
cL:	0.62832	0.62832
cM:	-0.00000	0.00000

2. Normalverteilung:

	N = 50	exakt
cL:	1.25664	1.25664
cM:	-0.31395	-0.31416

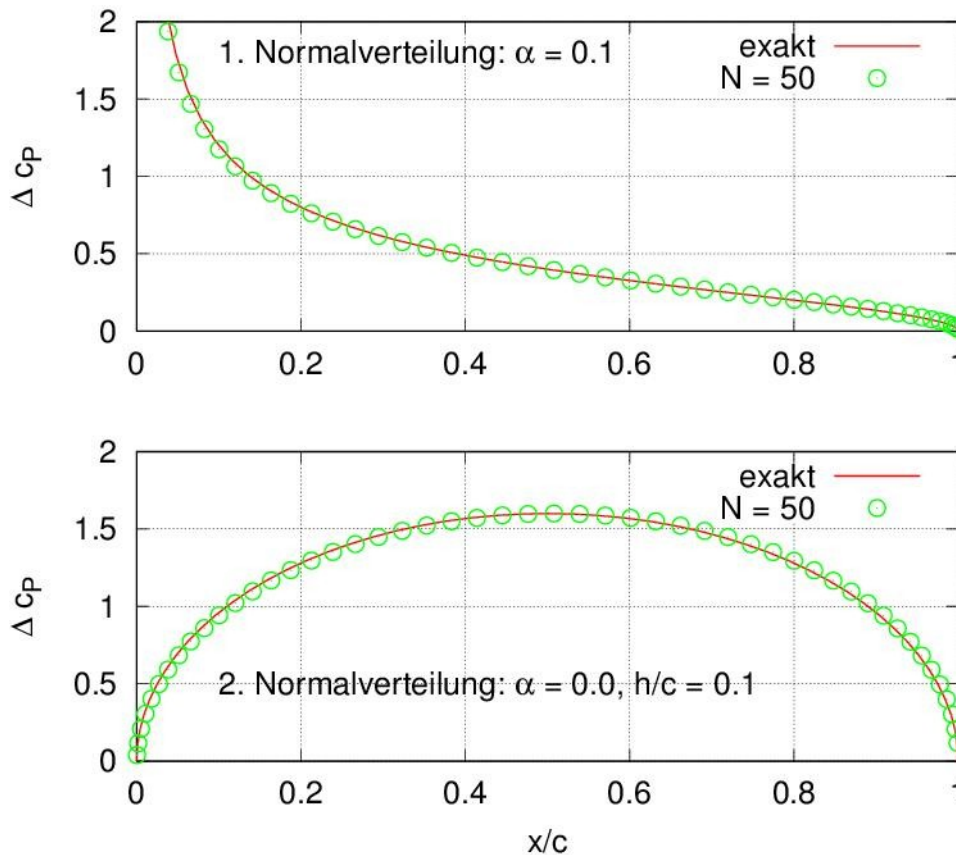


Abbildung 3.1: Druckverteilungen

Die Druckverteilungen sind in Abbildung 3.1 dargestellt. Die numerisch berechneten Ergebnisse stimmen gut mit den analytischen Ergebnissen überein.

Aufgabe 4

Für die aerodynamischen Beiwerte gilt

$$c_L = 2\pi\alpha + \frac{\partial c_L}{\partial \eta_K} \eta_K, \quad c_{M_0} = \frac{\partial c_{M_0}}{\partial \eta_K} \eta_K.$$

Die Derivativa lassen sich durch eine Berechnung mit dem Anstellwinkel $\alpha = 0$ und einem beliebigen Klappenwinkel η_K aus

$$\frac{\partial c_L}{\partial \eta_K} = \frac{c_L}{\eta_K}, \quad \frac{\partial c_{M_0}}{\partial \eta_K} = \frac{c_{M_0}}{\eta_K}$$

ermitteln.

Die analytische Lösung für die Derivativa ist (vgl. Skript):

$$\frac{\partial c_L}{\partial \eta_K} = 2 \arccos(1 - 2\kappa) + 4\sqrt{\kappa(1-\kappa)}, \quad \frac{\partial c_{M_0}}{\partial \eta_K} = -2(1-\kappa)\sqrt{\kappa(1-\kappa)}$$

Für eine realistische Druckverteilung wird mit einem Klappenwinkel $\eta_K = 0,1$ gerechnet.

GNU Octave-Code

```
# Übungsblatt 4.1, Aufgabe 4: Flügel mit Klappe
#
# -----

NP      = 100;           % Anzahl der Intervalle des Profils

alpha   = 0.00;         % Anstellwinkel
k       = 0.20;         % Klappentiefenverhältnis
etaK    = 0.10;         % Klappenwinkel

NK = ceil(k * NP);     % Anzahl der Intervalle der Klappe
cP = 1 - k;            % Profiltiefe ohne Klappe
cK = k;                % Klappentiefe

file = mfilename();
fid  = fopen([file, ".res"], "wt");

# Intervalle und Punkte des Profils

thetaP = linspace(0, pi, NP + 1);
xP      = 0.5 * cP * (1 - cos(thetaP))';
dxP     = diff(xP);
xgP     = xP(1 : NP) + 0.25 * dxP;
xwP     = xP(1 : NP) + 0.75 * dxP;

# Intervalle und Punkte der Klappe

thetaK = linspace(0, pi, NK + 1);
xK      = cP + 0.5 * cK * (1 - cos(thetaK))';
dxK     = diff(xK);
xgK     = xK(1 : NK) + 0.25 * dxK;
xwK     = xK(1 : NK) + 0.75 * dxK;

xg = [xgP; xgK];
xw = [xwP; xwK];

# Rechte Seite

dzsP = zeros(NP, 1, "double");
dzsW = -etaK(ones(NK, 1));
slopes = [dzsP; dzsW] - alpha;

# Wirbelstärken

G = vortex2d(xg, xw, slopes);
```

```

# Druckbeiwert

dx = [dxP; dxK];
cp = 2 * G ./ dx;

# Beiwerte

cL = 2 * sum(G);
cM = 2 * (0.25 - xg)' * G;

# Analytische Lösung

CL = acos(1 - 2 * k) + 2 * sqrt(k * (1 - k));
CL = 2 * pi * alpha + 2 * CL * etaK;
CM = - 2 * sqrt(k * (1 - k)) * (1 - k) * etaK;

# Ausgabe der Beiwerte

fprintf(fid, "N :      %3.0d      exakt\n", NP + NK);
fprintf(fid, "cL:  %8.5f  %8.5f\n", cL, CL)
fprintf(fid, "cM:  %8.5f  %8.5f\n", cM, CM)

fclose(fid);

# Ausgabe der Druckverteilung

set(0, "defaultlinelength", 2);
set(0, "defaultaxesfontname", "Arial");
set(0, "defaultaxesfontsize", 12);

```

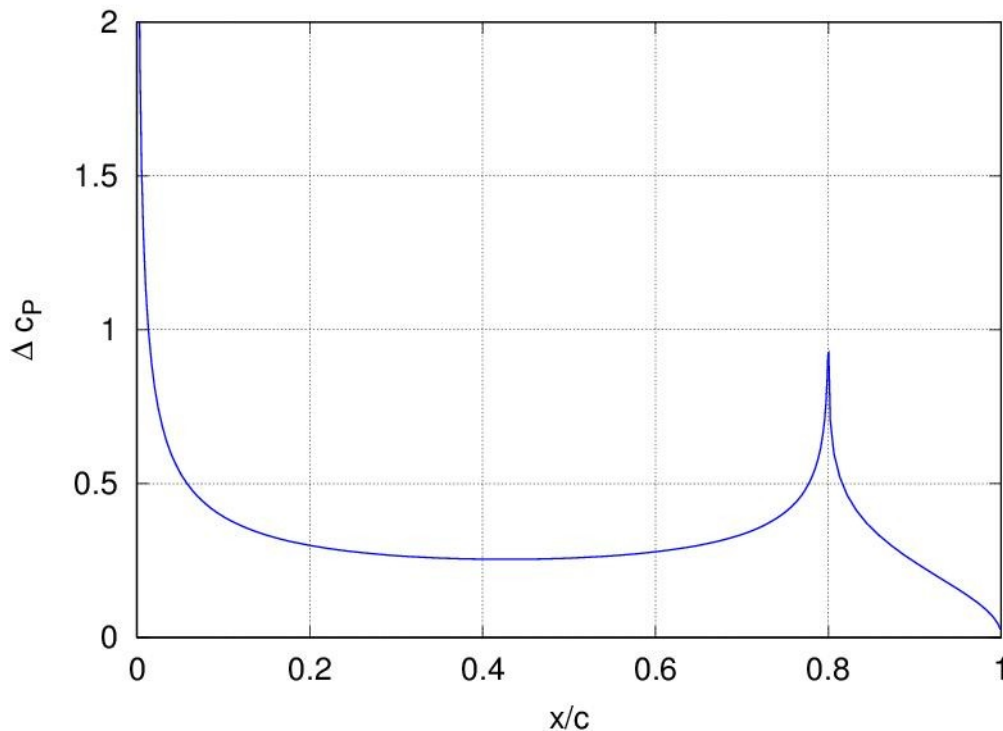


Abbildung 4.1: Druckverteilung

```

figure(1, "position", [100, 500, 750, 500],
      "paperposition", [0, 0, 14, 10]);
plot(xg, cp, "color", "blue");
axis([0, 1, 0, 2]);
grid;
xlabel("x/c");
ylabel('\Delta c_P');

print([file, ".jpg"], "-djpg");

```

Die Ausgabedatei enthält die folgenden Ergebnisse:

```

N :      120      exakt
cL:   0.34495   0.34546
cM:  -0.06398  -0.06400

```

Daraus folgt für die Beiwerte:

$$c_L = 2 \pi \alpha + 3,450 \eta_K, \quad c_{M_0} = -0,6400 \eta_K$$

Die Druckverteilung ist in Abbildung 4.1 graphisch dargestellt. Deutlich zu sehen ist die zweite Druckspitze am Beginn der Klappe.

Aufgabe 5

GNU Octave-Code

```

# Übungsblatt 4.1, Aufgabe 5: Clark-Y-Profil
#
# -----

set(0, "defaultlinelinewidth", 2);
set(0, "defaultaxesfontname", "Arial");
set(0, "defaultaxesfontsize", 12);

ns    = 5;      % Anzahl der Spline-Segmente
np    = 100;    % Anzahl der Intervalle des Profils

alpha = [0, 5]; % Anstellwinkel in Grad

file = mfilename();
fid  = fopen([file, ".res"], "wt");

# Daten der Skelettlinie einlesen

zsx   = dlmread("clarky-il.csv", ",", "A134:B194");
c     = zsx(end, 1);
[m, n] = size(zsx);

# Spline-Approximation

zsp  = splinefit(zsx(:, 1), zsx(:, 2), ns);
dzsp = ppder(zsp);

```

```

# Intervalle und Punkte des Profils

theta = linspace(0, pi, np + 1);
x      = 0.5 * c * (1 - cos(theta))';
dx     = diff(x);
xg     = x(1 : np) + 0.25 * dx;
xw     = x(1 : np) + 0.75 * dx;

# Graphische Kontrolle

figure(1, "position", [100, 500, 750, 750],
       "paperposition", [0, 0, 15, 12]);

subplot(2, 1, 1)
plot(zsx(:, 1), zsx(:, 2), "color", "green",
     "marker", "x", "linestyle", "none",
     x, ppval(zsp, x), "color", "red");
grid;
ylabel("z_S [mm]");

subplot(2, 1, 2);
plot(x, ppval(dzsp, x), "color", "red");
grid;
ylabel("dz_S/dx");
xlabel("x [mm]");

```

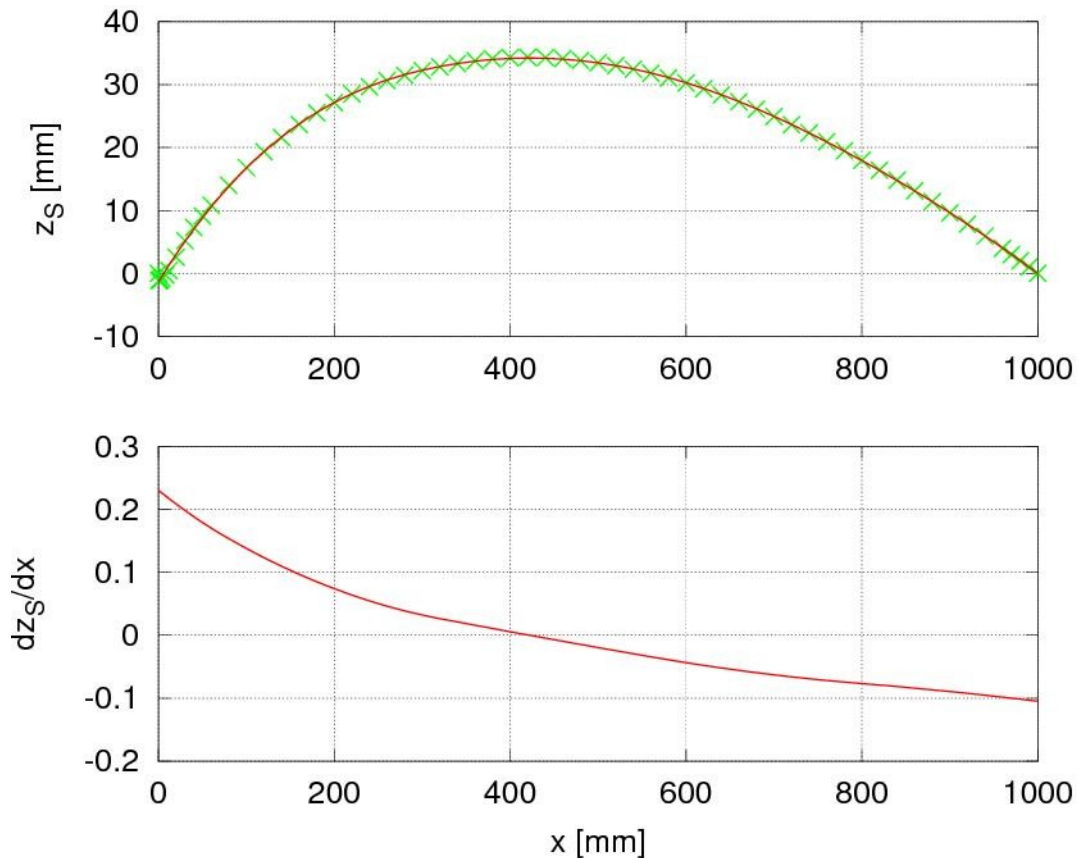


Abbildung 5.1: Skelettlinie und Ableitung

```

print([file, "z.jpg"], "-djpg");

# Wirbelstärken

dw = ppval(dzsp, xw) - alpha * pi / 180;
G = vortex2d(xg, xw, dw);

# Druckbeiwert

cp = 2 * G ./ dx;

# Beiwerte

cL = 2 * sum(G) / c;
cM = 2 * (0.25 - xg / c)' * G / c;

cla = 180 * diff(cL) / diff(alpha) / pi;

# Ausgabe der Beiwerte

fprintf(fid, "   alpha           cL           cM\n");
fprintf(fid, "   -----\n");
fprintf(fid, "   %2.0f   %7.4f   %7.4f\n",
        alpha(1), cL(1), cM(1));
fprintf(fid, "   %2.0f   %7.4f   %7.4f\n",
        alpha(2), cL(2), cM(2));
fprintf(fid, "\n  dcL/da = %7.4f\n", cla);

fclose(fid);

# Graphische Darstellung der Druckverteilung

figure(2, "position", [400, 400, 750, 500],
        "paperposition", [0, 0, 14, 10]);
plot(xg, cp(:, 1), "color", "green",
     xg, cp(:, 2), "color", "red");
grid;
ylim([-2, 5]);
leg1 = sprintf("\alpha = %2.0f\circ", alpha(1));
leg2 = sprintf("\alpha = %2.0f\circ", alpha(2));
legend(leg1, leg2);
legend("boxoff"); legend("left");
xlabel('x [mm]');
ylabel('\Delta c_p');

print([file, "cp.jpg"], "-djpg");

```

Ergebnisse

Die Ausgabedatei enthält die folgenden Daten:

alpha	cL	cM

0	0.3746	-0.0851
5	0.9229	-0.0851

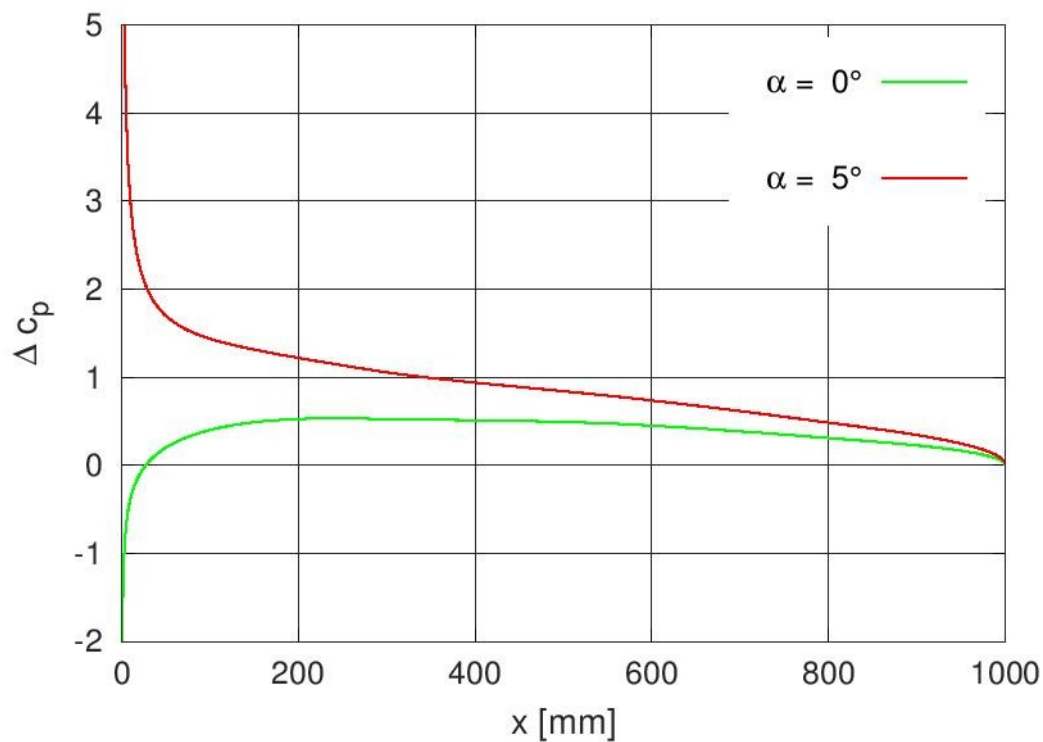


Abbildung 5.2: Druckbeiwert

$$dcL/da = 6.2832$$

Abbildung 5.1 zeigt die Skelettlinie und ihre Ableitung. Die Approximation gibt die Skelettlinie gut wieder. Die für die Berechnung des Druckbeiwerts benötigte Ableitung der Skelettlinie hat einen glatten Verlauf.

Der Verlauf des Druckbeiwerts für beide Anstellwinkel ist in Abbildung 5.2 dargestellt.

Aufgabe 6

Die Druckverteilung und die Beiwerte können mithilfe der Funktion `mfs_vortex2d` berechnet werden. Dazu wird die Skelettlinie durch ein abschnittsweise definiertes Polynom beschrieben, das mithilfe der in GNU Octave verfügbaren Funktion `mkpp` erstellt wird.

Für die Skelettlinie gilt:

$$z_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq (1-\kappa)c \\ -\eta_K(x-x_K) & \text{für } (1-\kappa)c \leq x \leq c \end{cases}$$

$$x_K = (1-\kappa)c$$

GNU Octave-Code

```

# Übungsblatt 4.1, Aufgabe 6: Flügel mit Klappe
#                               Lösung mit Mefisto
#
# -----

set(0, "defaultlinewidth", 2);
set(0, "defaultaxesfontname", "Arial");
set(0, "defaultaxesfontsize", 12);

alpha = 0.00;      % Anstellwinkel
k      = 0.20;      % Klappentiefenverhältnis
etaK   = 0.10;      % Klappenwinkel

n      = 100;       % Anzahl Intervalle

file = mfilename();
fid  = fopen([file, ".res"], "wt");

# Intervallgrenzen

x = linspace(0, 1, n + 1);

# Beschreibung des Profils mit ausgeschlagener Klappe

breaks = [0, 1 - k, 1];
coefs  = [0, 0; -etaK, 0];
camber = mkpp(breaks, coefs);

# Rechnung

[cp, xv, cL, cM] = mfs_vortex2d(x, camber);

# Analytische Lösung

CL = acos(1 - 2 * k) + 2 * sqrt(k * (1 - k));
CL = 2 * pi * alpha + 2 * CL * etaK;
CM = - 2 * sqrt(k * (1 - k)) * (1 - k) * etaK;

# Ausgabe der Beiwerte

fprintf(fid, "n :      %3.0d      exakt\n", n);
fprintf(fid, "cL:   %8.5f  %8.5f\n", cL, CL)
fprintf(fid, "cM:   %8.5f  %8.5f\n", cM, CM)

fclose(fid);

# Graphische Darstellung der Druckverteilung (mit Profilsehne)

figure(1, "position", [100, 500, 750, 500],
       "paperposition", [0, 0, 14, 10]);
plot(x, 10 * ppval(camber, x), "color", "blue",
      xv, cp, "color", "red");
legend('10 z_S/c', '\Delta c_P');

```



```

legend("boxoff"); legend("left");
axis([0, 1, -0.5, 2]);
grid;
xlabel('x/c');

print([file, ".jpg"], "-djpg");

```

Die Ergebnisse stimmen mit denen aus Aufgabe 4 überein.

Aufgabe 7

Zur Approximation der Skelettlinie steht in Mefisto die Funktion `mfs_airfoil` zur Verfügung. Druckverteilung und Beiwerte werden mit der Funktion `mfs_vortex2d` berechnet.

GNU Octave-Code

```

# Übungsblatt 4.1, Aufgabe 7: Clark-Y-Profil
#                               Lösung mit Mefisto
#
# -----

set(0, "defaultlinelength", 2);
set(0, "defaultaxesfontname", "Arial");
set(0, "defaultaxesfontsize", 12);

ns    = 5;      % Anzahl der Spline-Segmente
np    = 100;    % Anzahl der Intervalle des Profils

alpha = [0, 5]; % Anstellwinkel in Grad

file = mfilename();
fid  = fopen([file, ".res"], "wt");

# Daten der Skelettlinie einlesen

zsx = dlmread("clarky-il.csv", ",", "A134:B194");
c    = zsx(end, 1);
zsx  = zsx / c;

# Intervallgrenzen

theta = linspace(0, pi, np + 1);
x      = 0.5 * (1 - cos(theta));

# Spline-Approximation

zsp = mfs_airfoil("fit", "camber", zsx, ns);
dzsp = ppder(zsp);

# Graphische Kontrolle

figure(1, "position", [100, 500, 750, 750],

```

```

        "paperposition", [0, 0, 15, 12]);

subplot(2, 1, 1)
    plot(zsx(:, 1), zsx(:, 2), "color", "green",
        "marker", "x", "linestyle", "none",
        x, ppval(zsp, x), "color", "red");
    grid;
    ylabel('z_S/c');

subplot(2, 1, 2);
    plot(x, ppval(dzsp, x), "color", "red");
    grid;
    ylabel('dz_S/dx');
    xlabel('x/c');

print([file, "z.jpg"], "-djpg");

# Rechnung

[cp, xv, cL, cM] = mfs_vortex2d(x, zsp, alpha);
cla = 180 * diff(cL) / diff(alpha) / pi;

# Ausgabe der Beiwerte

fprintf(fid, "   alpha           cL           cM\n");
fprintf(fid, "   -----\n");
fprintf(fid, "   %2.0f   %7.4f   %7.4f\n",
    alpha(1), cL(1), cM(1));
fprintf(fid, "   %2.0f   %7.4f   %7.4f\n",
    alpha(2), cL(2), cM(2));
fprintf(fid, "\n   dcL/da = %7.4f\n", cla);

fclose(fid);

# Graphische Darstellung der Druckverteilung

figure(2, "position", [400, 400, 750, 500],
    "paperposition", [0, 0, 14, 10]);
plot(xv, cp(1, :), "color", "green",
    xv, cp(2, :), "color", "red");
grid;
ylim([-2, 5]);
leg1 = sprintf("\alpha = %2.0f\circ", alpha(1));
leg2 = sprintf("\alpha = %2.0f\circ", alpha(2));
legend(leg1, leg2);
legend("boxoff"); legend("left");
xlabel('x/c');
ylabel('\Delta c_p');

print([file, "cp.jpg"], "-djpg");

```

Die Ergebnisse stimmen mit denen aus Aufgabe 5 überein.

Aufgabe 8

Abbildung 8.1 zeigt die Profilkontur und die von Airfoil Tools berechnete Skelettlinie. Diese Skelettlinie zeigt an der Profilnase eine Störung, die auf den von Airfoil Tools verwendeten Algorithmus zur Ermittlung der Skelettlinie zurückzuführen ist. Für die Berechnung wird daher die Kontur des Profils durch einen kubischen Spline approximiert und daraus die Skelettlinie ermittelt.

```
# Übungsblatt 4.1, Aufgabe 8: NACA 63(2)-615
#
# -----

warning("off", "Octave:missing-glyph");

set(0, "defaultlinelinewidth", 2);
set(0, "defaultaxesfontname", "Arial");
set(0, "defaultaxesfontsize", 12);

ns    = 7;      % Anzahl der Spline-Segmente
np    = 100;   % Anzahl der Intervalle des Profils

alpha = [1, 5]; % Anstellwinkel in Grad

file = mfilename();
fid  = fopen([file, ".res"], "wt");

# Daten der Skelettlinie einlesen

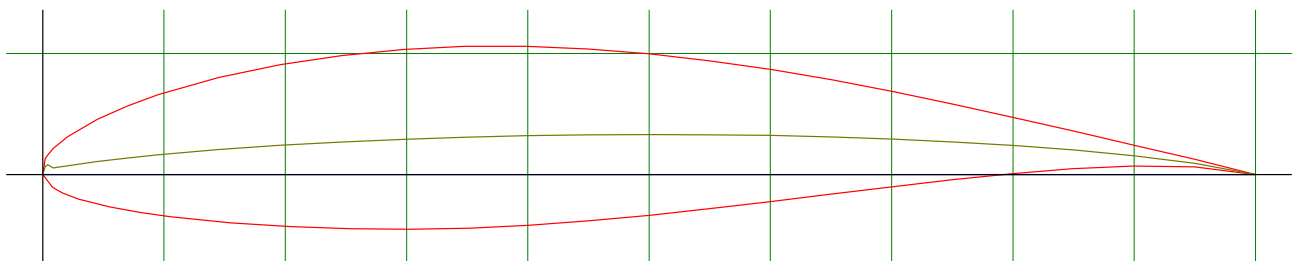
contour = dlmread("naca632615-il.csv", ",", "A10:B60");
camber  = dlmread("naca632615-il.csv", ",", "A64:B89");
c       = contour(end, 1);
contour = contour / c; camber = camber / c;

# Intervallgrenzen

theta = linspace(0, pi, np + 1);
x      = 0.5 * (1 - cos(theta));

# Spline-Approximation

figure(1, "position", [100, 100, 800, 300],
       "paperposition", [0, 0, 15, 5]);
zs     = mfs_airfoil("fit", "contour", contour, ns, "plot");
```



Name = NACA 63(2)-615
Chord = 100mm Radius = 0mm Thickness = 100% Origin = 0° Pitch = 0°

Abbildung 8.1: Profilkontur und Skelettlinie aus gegebenen Daten

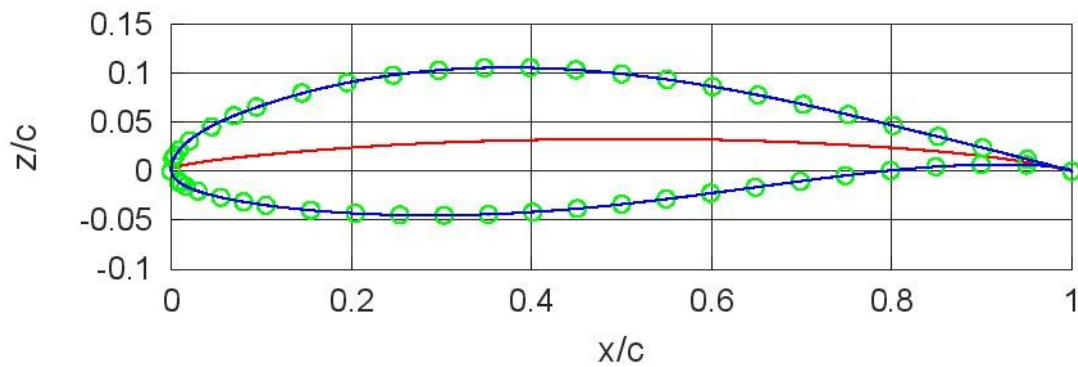


Abbildung 8.2: Approximation der Profilkontur und Skelettlinie

```
dzs = ppder(zs);
```

```
print("airfoil.jpg", "-djpg");
```

```
# Graphische Kontrolle
```

```
figure(2, "position", [100, 500, 750, 750],  
        "paperposition", [0, 0, 16, 12]);
```

```
subplot(2, 1, 1)  
plot(camber(:, 1), camber(:, 2), "color", "green",  
      "marker", "x", "linestyle", "none",
```

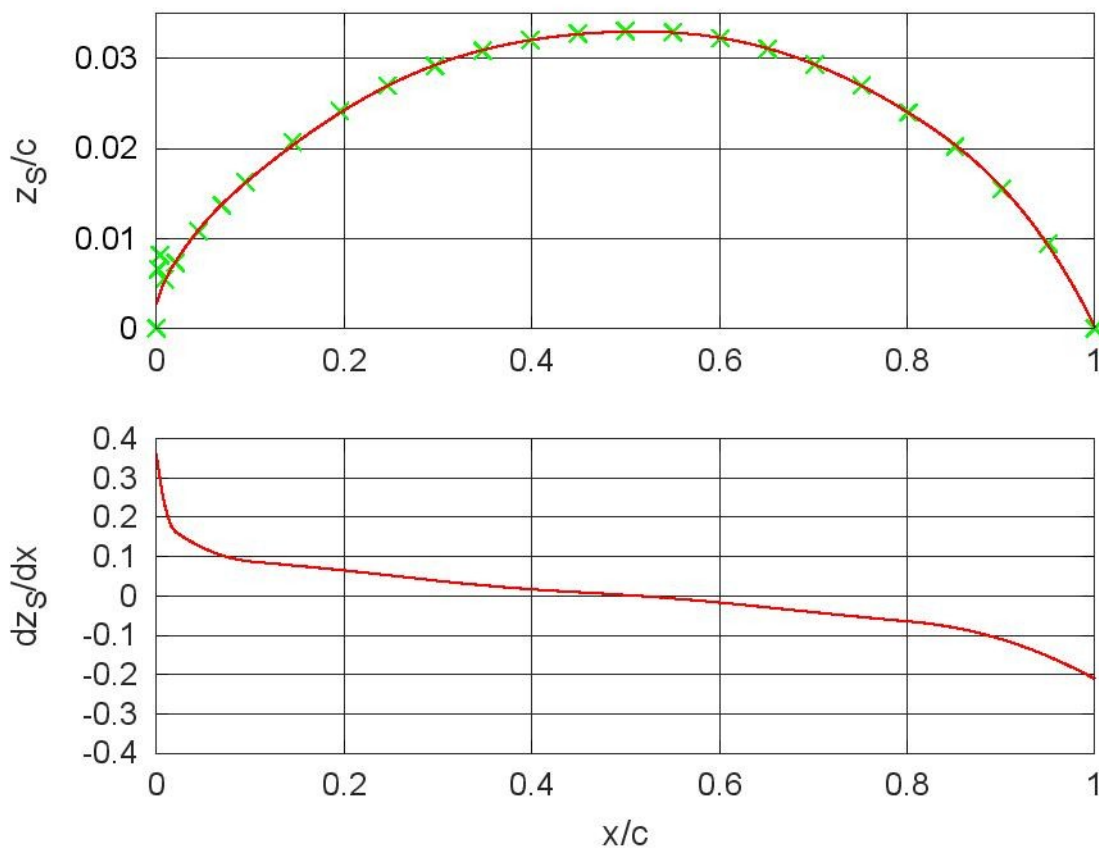


Abbildung 8.3: Skelettlinie und Ableitung

```

        x, ppval(zs, x), "color", "red");
    grid;
    set(gca(), "ytick", 0 : 0.01 : 0.04);
    ylabel('z_S/c');

    subplot(2, 1, 2)
    plot(x, ppval(dzs, x), "color", "red");
    grid;
    ylabel('dz_S/dx');
    xlabel('x/c');

    print([file, "z.jpg"], "-djpg");

```

Abbildung 8.2 zeigt die approximierte Kontur des Profils (blau) und die daraus berechnete Skelettlinie. Mit eingezeichnet sind die gegebenen Datenpunkte der Profilkontur. Die Approximation verläuft im Rahmen der Zeichengenauigkeit durch die gegebenen Datenpunkte.

Abbildung 8.3 zeigt die Skelettlinie zusammen mit ihrer Ableitung. Die grünen Kreuze entsprechen den Datenpunkten. Die Abbildung zeigt, dass der zweite und der dritte Datenpunkt offensichtlich falsch sind. Ebenfalls zu sehen ist, dass die approximierte Skelettlinie an der Flügelnase nicht exakt bei null beginnt. Durch eine Erhöhung der Anzahl der Spline-Segmente lässt sich die Abweichung verringern. Dann ergibt sich jedoch ein weniger glatter Verlauf der ersten Ableitung. Die Verwendung von 7 Spline-Segmenten stellt insofern einen Kompromiss dar.

Auftriebsanstieg und Nullauftriebswinkel können aus den berechneten Beiwerten ermittelt werden. Wegen der Linearität gilt für den Auftriebsanstieg:

$$c_{L\alpha} = \frac{dc_L}{d\alpha} = \frac{\Delta c_L}{\Delta \alpha}$$

Aus

$$c_L = c_{L\alpha}(\alpha - \alpha_0)$$

folgt für den Nullauftriebswinkel:

$$\alpha_0 = \alpha - \frac{c_L}{c_{L\alpha}}$$

Sein Wert muss unabhängig von dem für die Berechnung verwendeten Anstellwinkel α sein.

Rechnung

```

[cp, xv, cL, cM] = mfs_vortex2d(x, zs, alpha);
clad = diff(cL) / diff(alpha);
cla  = 180 * clad / pi;

alpha0 = alpha - cL / clad;

```

Ausgabe der Beiwerte

```
fprintf(fid, "  alpha  alpha0      cL      cM\n");
fprintf(fid, " -----\n");
fprintf(fid, "    %2.0f    %7.4f    %7.4f    %7.4f\n",
        alpha(1), alpha0(1), cL(1), cM(1));
fprintf(fid, "    %2.0f    %7.4f    %7.4f    %7.4f\n",
        alpha(2), alpha0(2), cL(2), cM(2));
fprintf(fid, "\n dcL/da = %7.4f\n", cla);

fclose(fid);
```

Die Ausgabedatei enthält die folgenden Ergebnisse:

alpha	alpha0	cL	cM
1	-4.7923	0.6352	-0.1282
5	-4.7923	1.0739	-0.1282

dcL/da = 6.2832

Der Auftriebsanstieg stimmt auf 5 Stellen mit dem theoretischen Wert von 2π überein, und mit beiden Anstellwinkeln ergibt sich der gleiche Wert für den Nullauftriebswinkel.

Zuletzt wird der Druckbeiwert für beide Anstellwinkel graphisch dargestellt. Der folgende Code erzeugt Abbildung 8.4.

Graphische Darstellung der Druckverteilung

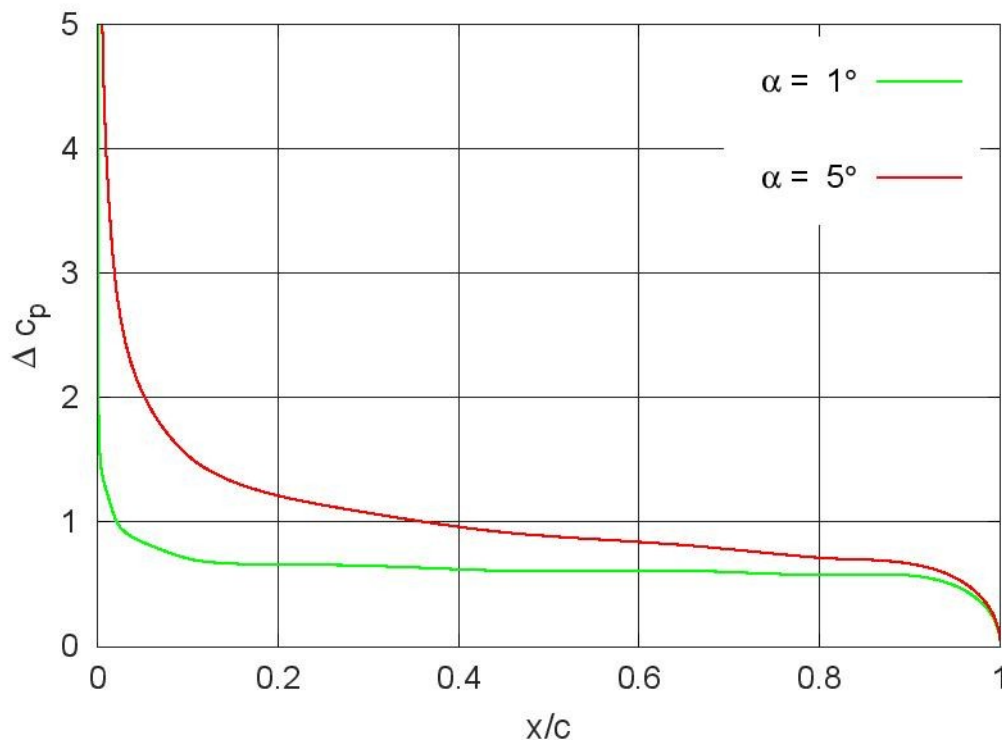


Abbildung 8.4: Druckbeiwert

```
figure(3, "position", [400, 400, 750, 500],  
       "paperposition", [0, 0, 14, 10]);  
plot(xv, cp(1, :), "color", "green",  
     xv, cp(2, :), "color", "red");  
grid;  
ylim([0, 5]);  
leg1 = sprintf("\\alpha = %2.0f\\circ", alpha(1));  
leg2 = sprintf("\\alpha = %2.0f\\circ", alpha(2));  
legend(leg1, leg2);  
legend("boxoff"); legend("left");  
xlabel('x/c');  
ylabel('\\Delta c_p');  
  
print([file, "cp.jpg"], "-djpg");
```