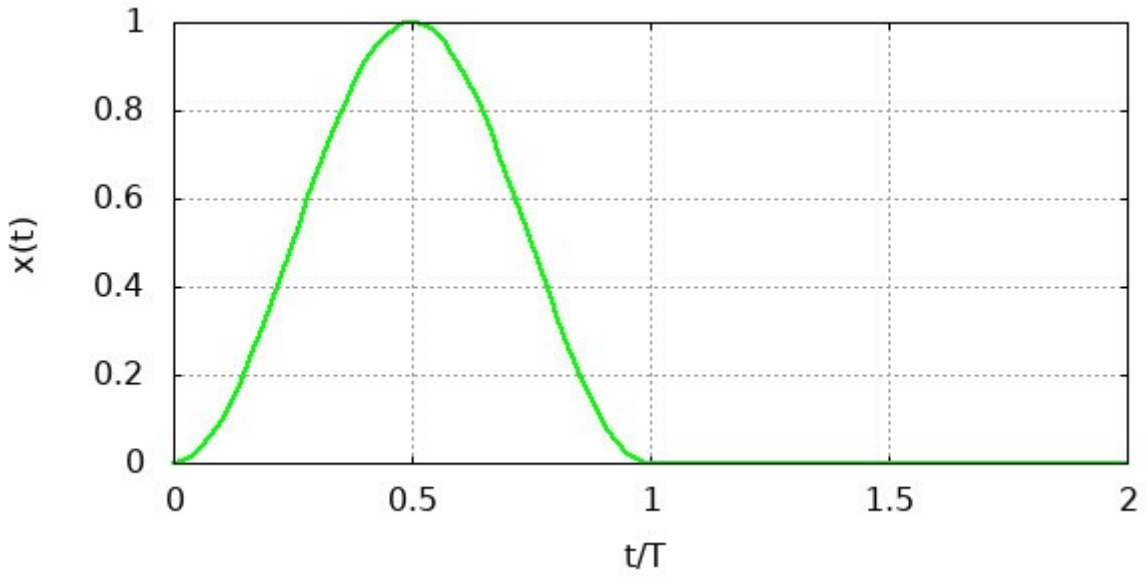
7.3 Böen

Lösungen

Aufgabe 1

a) Graphische Darstellung der Funktion



b) Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformierte berechnet sich zu

$$X(\Omega)=\int_0^T \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]e^{-i\Omega t}\,dt=\frac{1}{2}\left(X_1(\Omega)-X_2(\Omega)\right)$$

mit

$$X_1(\Omega)=\int_0^T e^{-i\Omega t}\,dt=\frac{1}{-i\Omega}\left[e^{-i\Omega t}\right]_{t=0}^{t=T}=\frac{i}{\Omega}\left(e^{-i\Omega T}-1\right)$$
$$=\frac{i\left(\cos(\Omega T)-1-i\sin(\Omega T)\right)}{\Omega}=\frac{\sin(\Omega T)}{\Omega}+i\frac{\cos(\Omega T)-1}{\Omega}$$

$$
\begin{aligned}
X_2(\Omega) &= \int_0^T \cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) e^{-i\Omega t}\,dt \\
&= \left[\frac{e^{-i\Omega t}}{(2\pi/T)^2-\Omega^2}\left(-i\Omega\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)+\left(\frac{2\pi}{T}\right)\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right)\right]_{t=0}^{t=T} \\
&= \frac{i}{(2\pi/T)^2-\Omega^2}\left(-\Omega e^{-i\Omega T}+\Omega\right) = \frac{-i\Omega}{(2\pi/T)^2-\Omega^2}\left(e^{-i\Omega T}-1\right) \\
&= \frac{i\Omega}{\Omega^2-(2\pi/T)^2}\left(\cos(\Omega T)-1-i\sin(\Omega T)\right) \\
&= \frac{\Omega}{\Omega^2-(2\pi/T)^2}\left(\sin(\Omega T)+i\left(\cos(\Omega T)-1\right)\right)
\end{aligned}
$$

Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
X(\Omega) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Omega}-\frac{\Omega}{\Omega^2-(2\pi/T)^2}\right)\left(\sin(\Omega T)+i\left(\cos(\Omega T)-1\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{(2\pi/T)^2}{(2\pi/T)^2-\Omega^2}\left(\frac{\sin(\Omega T)}{\Omega}+i\frac{\cos(\Omega T)-1}{\Omega}\right) \\
&= \frac{T}{2}\frac{4\pi^2}{4\pi^2-(\Omega T)^2}\left(\frac{\sin(\Omega T)}{\Omega T}+i\frac{\cos(\Omega T)-1}{\Omega T}\right)
\end{aligned}
$$