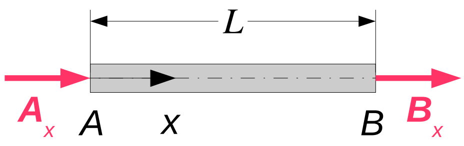
# 2.1 Grundlagen

## Aufgaben

### Aufgabe 1




Geben Sie das Prinzip der virtuellen Leistung für einen Stab mit konstanter Querschnittsfläche $S$ an, der an seinen beiden Enden durch Kräfte in Richtung der Stabachse belastet wird. Leiten Sie daraus die Gleichgewichtsbedingungen und die natürlichen Randbedingungen her.

Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration.

### Aufgabe 2

Bei einer Biegung in der *xz*-Ebene gilt nach der Balkentheorie von Euler-Bernoulli für die Verschiebung

$$u(x,z)=\phi(x)z\ ,$$

wobei der Biegewinkel $\phi(x)$ über

$$\phi(x)=-\frac{dw}{dx}$$

mit der Biegelinie $w(x)$ zusammenhängt.

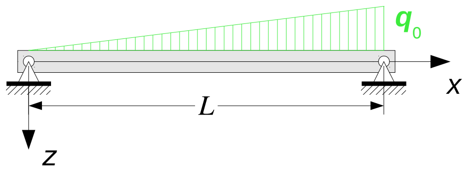
a) Bestimmen Sie die Bilinearform $K[\tilde{w},w]$ und die Linearform $L[\tilde{w}]$ für den Fall, dass der Balken durch eine Streckenlast $q_z(x)$ belastet wird und auf beiden Seiten gelenkig gelagert ist.

b) Leiten Sie die Differentialgleichung der Balkenbiegung und die natürlichen Randbedingungen aus dem Prinzip der virtuellen Leistung her.

(Ergebnis: a) $K[\tilde{w},w]=\int_0^L E\,I_y \frac{d^2\tilde{w}}{dx^2}\frac{d^2 w}{dx^2}dx\ ,\ L[\tilde{w}]=\int_0^L \tilde{w}\,q_z\,dx$ )

## Aufgabe 3

Der abgebildete Balken hat die konstante Biegesteifigkeit $EI_y$. Er wird durch die Streckenlast




$$q_z(x) = q_0 \frac{x}{L}$$

belastet.

Für die Biegelinie wird der Ansatz

$$w(x) = \sum_{n=1}^{3} q_n w_n(x)$$

mit

$$w_1(x) = \frac{x}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad w_2(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad w_3(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$

gemacht.

a) Zeigen Sie, dass die Verschiebungen die wesentlichen Randbedingungen erfüllen.

b) Berechnen Sie die Steifigkeitsmatrix $[K]$ und die Lastmatrix $[l]$ nach der Methode von Bubnow und Galerkin.

c) Berechnen Sie die Koeffizienten $q_n$ und vergleichen Sie die so gewonnene Biegelinie mit der analytischen Lösung.

(Ergebnis: $[K] = \frac{E I_y}{5 L^3} \begin{bmatrix} 20 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $[l] = \frac{1}{60} q_0 L \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[q] = \frac{q_0 L^4}{720 E I_y} \begin{bmatrix} 14 \\ 2 \\ 15 \end{bmatrix}$)