

3.5 Potentialströmungen

Aufgaben

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{Q}{4\pi r} \quad \text{mit } r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

die Potentialgleichung erfüllt.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{2\pi} \ln(r) \quad \text{mit } r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + z^2}$$

die ebene Potentialgleichung erfüllt.

Aufgabe 3

Ermitteln Sie die Potentialfunktion für das Strömungsfeld

$$\mathbf{v}(x, z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{z \mathbf{e}_x - x \mathbf{e}_z}{x^2 + z^2}$$

des ebenen Potentialwirbels in der xz-Ebene.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Potentialfunktion

$$\Phi(x, z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \arctan\left(\frac{x}{z}\right)$$

des ebenen Potentialwirbels die Potentialgleichung erfüllt.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Zirkulation des ebenen Potentialwirbels

$$\mathbf{v}(x, z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{z \mathbf{e}_x - x \mathbf{e}_z}{x^2 + z^2}$$

für jeden Weg, der den Ursprung des Koordinatensystems nicht umschließt, null ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Integralsatz von Stokes.

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die Zirkulation

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

des ebenen Potentialwirbels

$$\mathbf{v}(x, z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{z \mathbf{e}_x - x \mathbf{e}_z}{x^2 + z^2}$$

für jeden Weg, der den Ursprung des Koordinatensystems umschließt, den gleichen Wert hat.

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass die Zirkulation für einen Weg, der mehrere Potentialwirbel umschließt, gleich der Summe der Zirkulationen der umschlossenen Potentialwirbel ist.

Aufgabe 8

Gegeben ist die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\mathbf{M} \cdot \nabla \left(\frac{1}{4\pi r} \right), \quad r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Dabei ist \mathbf{M} ein beliebiger konstanter Vektor.

- Zeigen Sie, dass die Funktion die Potentialgleichung erfüllt.
- Berechnen Sie das zugehörige Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x})$.

Anmerkung: Diese Strömung wird als Dipolströmung bezeichnet. Sie ergibt sich durch Überlagerung von zwei Quellströmungen, deren Quellstärken den gleichen Betrag, aber unterschiedliches Vorzeichen haben, wenn ihr Abstand gegen null geht. Der Vektor \mathbf{M} heißt Dipolmoment.

Aufgabe 9

Das Potential eines ebenen Dipols in der xz -Ebene ist

$$\Phi(x, z) = \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}}{2\pi r^2}, \quad \mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z, \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}$$

mit einem beliebigen konstanten Vektor \mathbf{M} .

- Zeigen Sie, dass die ebene Potentialgleichung erfüllt ist.
- Berechnen Sie das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x})$.
- Welche Gleichungen für das Geschwindigkeitsfeld ergeben sich für $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_x$?

Aufgabe 10

Ein ebener Potentialwirbel bewegt sich in einem rechten Winkel.

- Stellen Sie das Differenzialgleichungssystem auf, das seine Bewegung beschreibt.
- Lösen Sie das Differenzialgleichungssystem mithilfe von GNU Octave (Funktion `lsode`).

Hinweis zu a): Verwenden Sie gespiegelte Wirbel, um die Randbedingungen auf den beiden Wänden zu erfüllen.

Zahlenwerte zu b): $\Gamma = 4\pi \text{ m}$, $x_0 = 3 \text{ m}$, $z_0 = 0,5 \text{ m}$

