

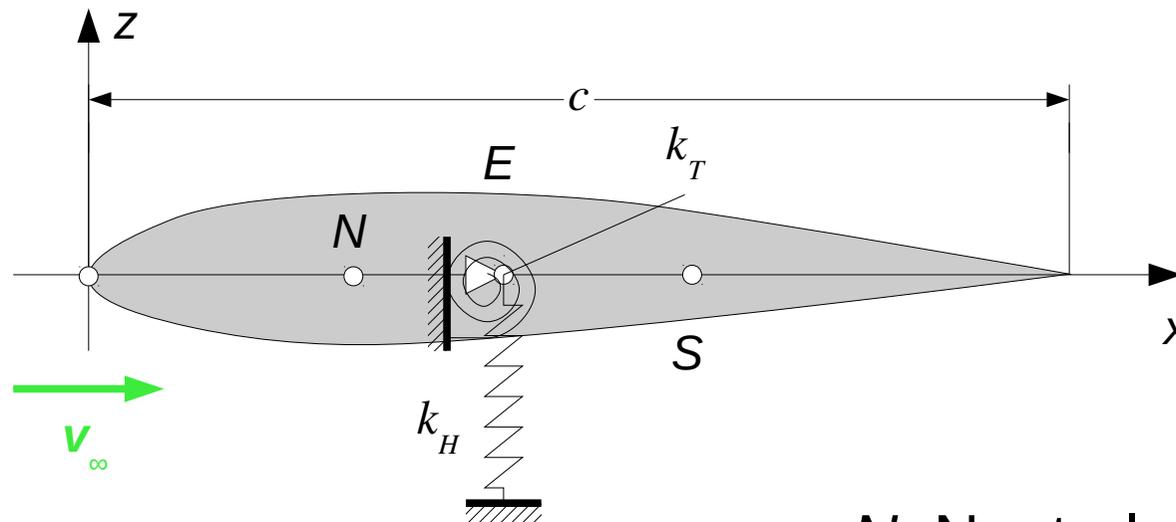
### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Flattern ist eine dynamische Instabilität.
- Durch Rückkopplung mit den Luftkräften wird die elastische Struktur zu Schwingungen mit einer anwachsenden Amplitude angefacht.
- Die wesentlichen physikalischen Zusammenhänge lassen sich am Beispiel eines starren elastisch gelagerten Profils untersuchen.

### 3. Biege-Torsionsflattern

- Berechnungsmodell:



$N$ : Neutralpunkt, Koordinate  $x_N$   
 $E$ : Lagerpunkt, Koordinate  $x_E$   
 $S$ : Schwerpunkt, Koordinate  $x_S$

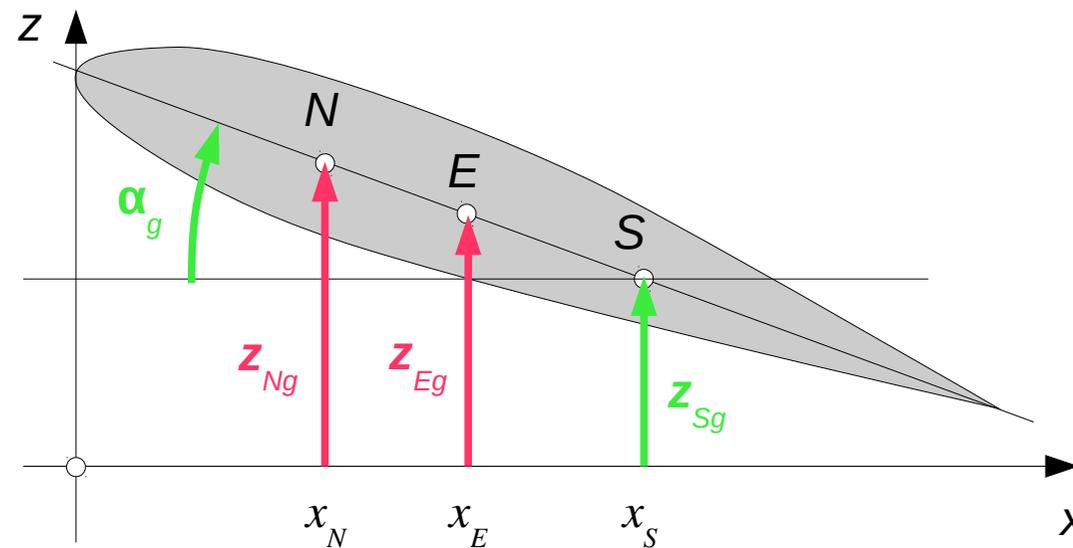
### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Das starre Profil ist im Punkt  $E$  gelenkig gelagert und wird durch eine Torsionsfeder mit der Federsteifigkeit  $k_T$  gehalten.
- Der Punkt  $E$  kann sich in vertikaler Richtung verschieben. Er wird durch eine Feder mit der Federsteifigkeit  $k_H$  gehalten.
- Der Ursprung des Koordinatensystems liegt in der Profilnahe.
- Zu untersuchen ist die Bewegung des Profils für kleine Auslenkungen aus der statischen Gleichgewichtslage.

### 3. Biege-Torsionsflattern

- Kinematik:
  - Als Bezugspunkt für die Bewegung des starren Profils wird der Schwerpunkt gewählt.



### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- In der statischen Gleichgewichtslage gilt:  $z_{Sg} = z_{S0}$ ,  $\alpha_g = \alpha_0$
- Für kleine Auslenkungen  $z_S(t)$  und  $\alpha(t)$  aus der statischen Gleichgewichtslage gilt

$$z_{Ng}(t) = z_{N0} + z_N(t), \quad z_{Eg}(t) = z_{E0} + z_E(t)$$

$$z_{Sg}(t) = z_{S0} + z_S(t), \quad \alpha_g(t) = \alpha_0 + \alpha(t)$$

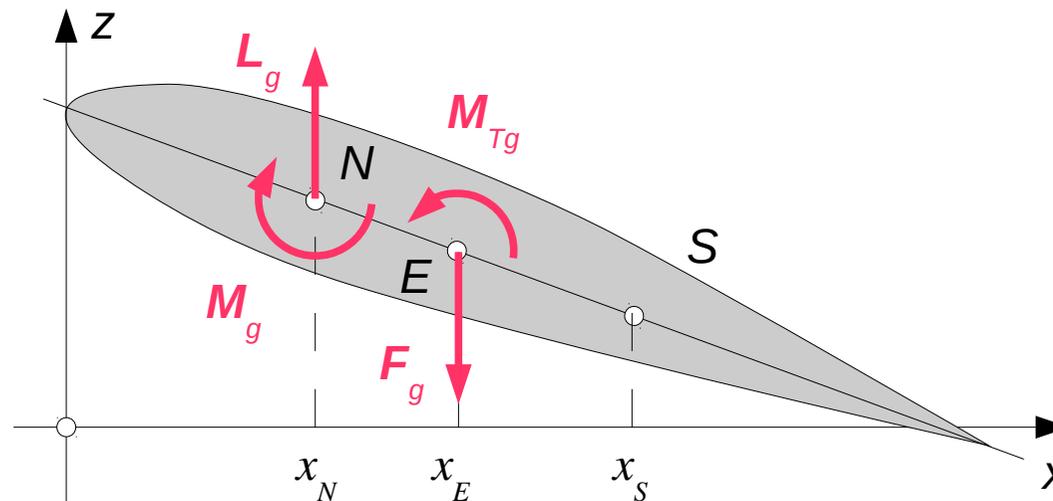
mit

$$z_{N0} = z_{S0} + (x_S - x_N)\alpha_0, \quad z_N(t) = z_S(t) + (x_S - x_N)\alpha(t)$$

$$z_{E0} = z_{S0} + (x_S - x_E)\alpha_0, \quad z_E(t) = z_S(t) + (x_S - x_E)\alpha(t)$$

### 3. Biege-Torsionsflattern

- Kinetik:
  - Das Profil hat die Masse  $m$  und das Massenträgheitsmoment  $J_y$  bezüglich des Schwerpunkts.



### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Schwerpunktsatz:  $\sum F_z = m \ddot{z}_S : L_g - F_g = m \ddot{z}_S$

- Drallsatz bezüglich des Schwerpunkts:

$$\sum M_y^S = J_y \ddot{\alpha} : M_g - M_{Tg} + L_g(x_S - x_N) - F_g(x_S - x_E) = J_y \ddot{\alpha}$$

- In der statischen Gleichgewichtslage gilt:

$$\sum F_z = 0 : L_0 - F_0 = 0$$

$$\sum M_y^S = 0 : M_0 - M_{T0} + L_0(x_S - x_N) - F_0(x_S - x_E) = 0$$

- Für die Lasten in der ausgelenkten Lage gilt:

$$L_g(t) = L_0 + L(t), \quad F_g(t) = F_0 + F(t)$$

$$M_g(t) = M_0 + M(t), \quad M_{Tg}(t) = M_{T0} + M_T(t)$$

### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Einsetzen in Schwerpunktsatz und Drallsatz ergibt:

$$\sum F_z = m \ddot{z}_S \quad : \quad L(t) - F(t) = m \ddot{z}_S(t)$$

$$\sum M_y^S = J_y \ddot{\alpha} \quad :$$

$$M(t) - M_T(t) + L(t)(x_S - x_N) - F(t)(x_S - x_E) = J_y \ddot{\alpha}(t)$$

- Für die elastischen Lasten gilt:

$$F(t) = k_H z_E(t) = k_H (z_S(t) + (x_S - x_E) \alpha(t))$$

$$M_T(t) = k_T \alpha(t)$$

- Einsetzen in den Schwerpunktsatz ergibt:

$$L(t) = m \ddot{z}_S(t) + k_H z_S(t) + k_H (x_S - x_E) \alpha(t)$$

### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Einsetzen in den Drallsatz ergibt:

$$M(t) + (x_S - x_N)L(t) = J_y \ddot{\alpha}(t) + \left( k_T + (x_S - x_E)^2 k_H \right) \alpha(t) + (x_S - x_E) k_H z_S(t)$$

- Mit  $k_{zz} = k_H$ ,  $k_{z\alpha} = (x_S - x_E) k_H$ ,  $k_{\alpha\alpha} = k_T + (x_S - x_E)^2 k_H$

lauten diese beiden Gleichungen:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_S \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{zz} & k_{z\alpha} \\ k_{z\alpha} & k_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_S \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_S - x_N & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix}$$

$$[M][\ddot{u}] + [K][u] = [T]_{SN} [l]_N$$

### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Die linke Seite der Gleichung beschreibt das dynamische Verhalten der Struktur.
- Auf der rechten Seite stehen die aerodynamischen Lasten.
- Wenn der Punkt  $E$  nicht mit dem Schwerpunkt übereinstimmt, ist die Hubbewegung mit der Nickbewegung über die Steifigkeitsmatrix gekoppelt.
- Aerodynamische Lasten:
  - Für die Untersuchung der aerodynamischen Lasten wird der Neutralpunkt als Bezugspunkt für die Bewegung gewählt. Seine Vertikalverschiebung wird im Folgenden mit  $h(t)$  bezeichnet:

$$h(t) = z_N(t) = z_S(t) + (x_S - x_N)\alpha(t)$$

### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- In Matrix-Schreibweise gilt:

$$[u]_N = \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_S - x_N \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_S \\ \alpha \end{bmatrix} = [T]_{SN}^T [u]$$

- Die Bewegung des Profils hat folgende Einflüsse:
  - Infolge der Hub- und der Nickbewegung ändert sich der Anstellwinkel: Die aerodynamischen Lasten hängen von  $[\dot{u}]_N$  ab.
  - Die das Profil umgebende Luft wird beschleunigt: Die aerodynamischen Lasten hängen von  $[\ddot{u}]_N$  ab.
  - Die momentane Strömung hängt auch von der vorausgehenden Bewegung des Profils ab. Daher hängen die aerodynamischen Lasten von der Vergangenheit ab.

### 3. Biege-Torsionsflattern

- Bei kleinen Störungen ist die Abhängigkeit linear:

$$[l]_N = q_\infty \left( [A^1][\dot{u}]_N + [A^2][\ddot{u}]_N + \int_0^\infty [A(\tau)][u(t-\tau)]_N d\tau \right)$$

- Einsetzen in die kinetischen Gleichungen ergibt:

$$\begin{aligned} [M][\ddot{u}] + [K][u] \\ = q_\infty [T]_{SN} \left( [A^1][\dot{u}]_N + [A^2][\ddot{u}]_N + \int_0^\infty [A(\tau)][u(t-\tau)]_N d\tau \right) \end{aligned}$$

- Die Lösung dieser linearen Integro-Differenzialgleichung hat die Form

$$[u(t)] = [U]e^{\lambda t} \rightarrow [\dot{u}] = \lambda[U]e^{\lambda t}, \quad [\ddot{u}] = \lambda^2[U]e^{\lambda t}$$

### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Der Integralterm berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [A(\tau)][u(t-\tau)]_N d\tau &= \int_0^{\infty} [A(\tau)][U]_N e^{\lambda(t-\tau)} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} [A(\tau)] e^{-\lambda\tau} d\tau [U]_N e^{\lambda t} \end{aligned}$$

- Mit der *aerodynamischen Matrix*

$$[Q(\lambda)]_N = \lambda[A^1] + \lambda^2[A^2] + \int_0^{\infty} [A(\tau)] e^{-\lambda\tau} d\tau$$

folgt für die Amplitude der aerodynamischen Lasten:

$$[L(\lambda)]_N = q_{\infty} [Q(\lambda)]_N [U(\lambda)]_N$$

### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Flattergleichung:

- Mit  $[Q(\lambda)] = [T]_{SN} [Q(\lambda)]_N [T]_{SN}^T$  lautet die zu lösende Gleichung:

$$\left( \lambda^2 [M] + [K] - q_\infty [Q(\lambda)] \right) [U] = [0]$$

- Diese *Flattergleichung* hat nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn die *Flatterdeterminante* null ist:

$$\det \left( \lambda^2 [M] + [K] - q_\infty [Q(\lambda)] \right) = 0$$

- Die Lösung dieser transzendenten Gleichung liefert die komplexen Eigenwerte  $\lambda = -\delta + i\omega$ .

### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Stabilität:
  - Für  $\delta > 0$  nimmt die Störung exponentiell ab. Das System ist stabil.
  - Für  $\delta < 0$  nimmt die Störung exponentiell zu. Das System ist instabil:
    - $\omega \neq 0$ : Schwingung mit exponentiell anwachsender Amplitude  
→ Flattern
    - $\omega = 0$ : exponentiell anwachsende Auslenkung → Divergenz
  - Die *Stabilitätsgrenze* liegt bei  $\delta = 0$ .

### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Aerodynamische Matrix:

- Für eine ebene Platte mit der Fläche  $S$ , die eine harmonische Hub- und Nickbewegung ausführt, d. h. für  $\lambda = i\omega$ , gilt nach Küssner (1936):

$$\hat{L}(\omega) = \frac{\pi}{8} \rho \omega^2 c^2 S (-2k_a \hat{h}/c + k_b \hat{\alpha})$$

$$\hat{M}(\omega) = \frac{\pi}{16} \rho \omega^2 c^3 S (-2m_a \hat{h}/c + m_b \hat{\alpha})$$

- Die Koeffizienten  $k_a$ ,  $k_b$ ,  $m_a$  und  $m_b$  hängen von der *reduzierten Frequenz*  $k$  ab:

$$k = \frac{\omega c}{2 v_\infty}$$

### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Sie werden als instationäre aerodynamische Beiwerte bezeichnet.
- Mit dem Staudruck  $q_\infty = \rho v_\infty^2 / 2$  folgt:  $\rho \omega^2 c^2 = 4 k^2 \rho v_\infty^2 = 8 k^2 q_\infty$
- Für die aerodynamischen Kräfte folgt:

$$\hat{L}(k) = \pi q_\infty S k^2 (-2 k_a \hat{h}/c + k_b \hat{\alpha})$$

$$\hat{M}(k) = \frac{\pi}{2} q_\infty S c k^2 (-2 m_a \hat{h}/c + m_b \hat{\alpha})$$

- Damit gilt für die aerodynamische Matrix:

$$[Q(k)]_N = \pi S k^2 \begin{bmatrix} -2 k_a / c & k_b \\ -m_a & m_b c / 2 \end{bmatrix}$$

### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Die instationären aerodynamischen Beiwerte berechnen sich zu (vgl. Försching, S. 264)

$$k_a(k) = -1 + \frac{2i}{k} C(k) \quad , \quad m_a = \frac{1}{2}$$

$$k_b(k) = -\frac{1}{2} + \frac{i}{k} (1 + 2C(k)) + \frac{2C(k)}{k^2} \quad , \quad m_b(k) = \frac{3}{8} - \frac{i}{k}$$

- $C(k)$  ist die *Theodorsen-Funktion*:

$$C(k) = F(k) + iG(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)}$$

- $H_n^{(2)}(k)$  sind die Hankelschen Zylinderfunktionen 2. Art der Ordnung  $n$ .

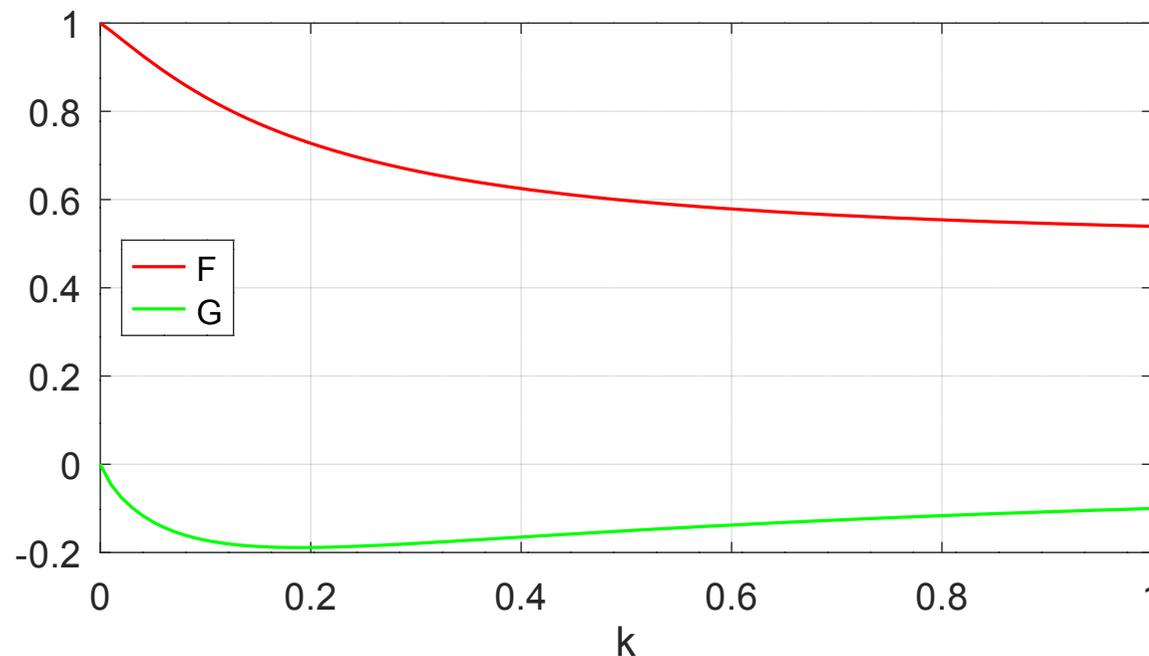
### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Sie können mit GNU Octave mit der Funktion `besselh` berechnet werden:

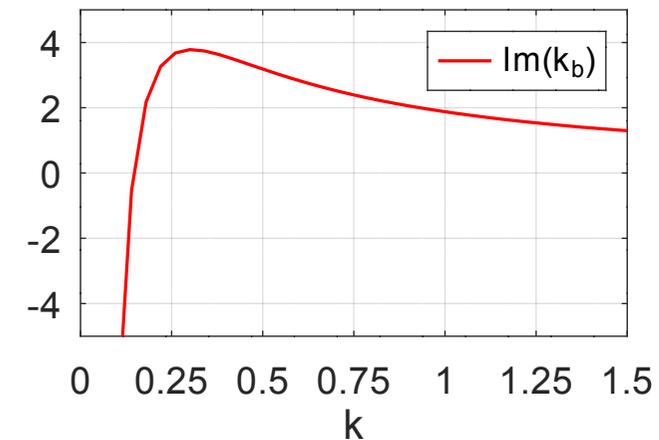
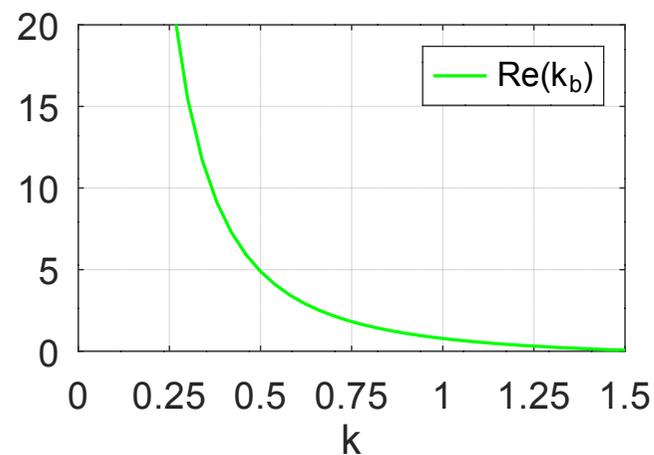
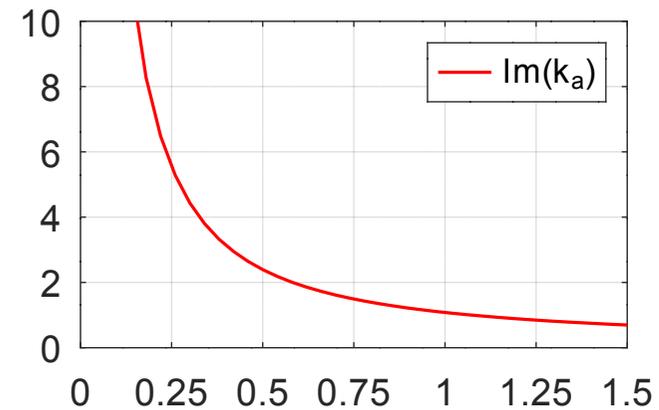
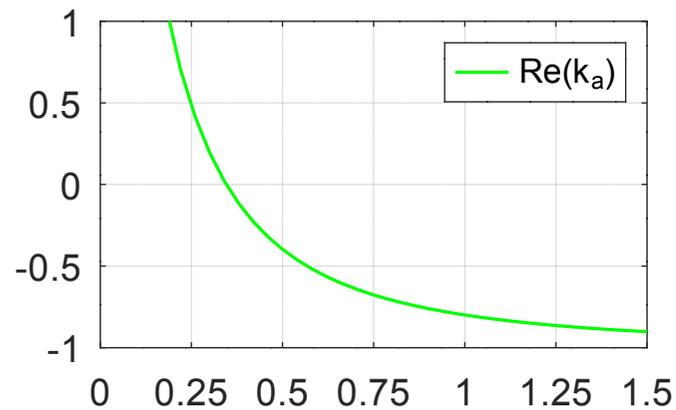
$$\mathbf{h} = \mathbf{besselh}(n, 2, \mathbf{k});$$

- Theodorsen-Funktion:



### 3. Biege-Torsionsflattern

- Instationäre aerodynamische Beiwerte:



### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Lösung der Flattergleichung:

- Die Lösung der Flattergleichung

$$\left(\lambda^2[M] + [K] - q_\infty[Q(\lambda)]\right)[U] = [0]$$

erweist sich aus zwei Gründen als schwierig:

- Es handelt sich um ein nichtlineares nicht symmetrisches komplexes Eigenwertproblem.
  - Die aerodynamische Matrix ist in der Regel nur für rein imaginäre Werte von  $\lambda$ , die einer harmonischen Bewegung entsprechen, bekannt.
- Die *k-Methode* ist ein physikalisch anschauliches Verfahren, das diese Probleme umgeht.

### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Damit als Lösungen Schwingungen mit konstanter Amplitude auftreten, wird der Flattergleichung ein Dämpfungsterm hinzugefügt.
- Mit  $\lambda = i\omega$  lautet die modifizierte Gleichung:

$$\left(-\omega^2[M] - q_\infty[Q(k)] + (1+i\gamma)[K]\right)[U] = [0]$$

- Der Faktor  $\gamma$  kann als Strukturdämpfung interpretiert werden:
  - Für  $\gamma > 0$  wird dem System Energie entzogen.
  - Für  $\gamma < 0$  wird dem System Energie hinzugefügt.

### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Der Faktor  $\gamma$  ist zunächst unbekannt. Er ergibt sich als Teil der Lösung so, dass der Energieaustausch mit der Strömung kompensiert wird.
- Mit  $\omega = 2 v_\infty k / c$  und  $q_\infty = \rho v_\infty^2 / 2$  folgt:

$$\left( [K] - \frac{v_\infty^2}{1+i\gamma} \left( 4 \frac{k^2}{c^2} [M] + \frac{\rho}{2} [Q(k)] \right) \right) [U] = [0]$$

- Für jeden festen Wert von  $k$  folgt daraus ein lineares Eigenwertproblem:

$$\left( [K] - \mu \left( 4 \frac{k^2}{c^2} [M] + \frac{\rho}{2} [Q(k)] \right) \right) [U] = [0] \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{v_\infty^2}{1+i\gamma}$$

### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Das Eigenwertproblem kann in GNU Octave mit der Funktion `eig` gelöst werden.
- Aus dem Eigenwert lässt sich die Geschwindigkeit und der Dämpfungsfaktor berechnen:

$$\mu = \frac{v_\infty^2}{1+i\gamma} = v_\infty^2 \frac{1-i\gamma}{1+\gamma^2} \rightarrow \Re(\mu) = \frac{v_\infty^2}{1+\gamma^2}, \quad \Im(\mu) = -\frac{v_\infty^2 \gamma}{1+\gamma^2}$$

$$\Im(\mu) = -\gamma \Re(\mu) \rightarrow \gamma = -\frac{\Im(\mu)}{\Re(\mu)}$$

$$v_\infty^2 = (1+\gamma^2) \Re(\mu) = \frac{\Re^2(\mu) + \Im^2(\mu)}{\Re(\mu)} = \frac{|\mu|^2}{\Re(\mu)}$$

### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Für die Frequenz folgt:  $\omega = 2 v_{\infty} k / c$ ,  $f = \omega / (2 \pi)$
- Die Werte der Strukturdämpfung  $\gamma$  werden über der Geschwindigkeit  $v_{\infty}$  aufgetragen.
- Flattern tritt auf, wenn die Strukturdämpfung positiv wird.
- Die Methode wird auch als *Geschwindigkeits-Dämpfungs-Methode* bezeichnet.
- Da sich für jede reduzierte Frequenz zwei Eigenwerte ergeben, ergeben sich zwei Kurven.
- Welcher Kurve die Werte jeweils zuzuordnen sind, kann z. B. anhand der Eigenvektoren entschieden werden.

### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Die komplexen Eigenvektoren beschreiben die Flutterform.
- Im Zeitbereich gilt:  $[u(t)] = \Re([U]e^{i\omega t})$
- Der Realteil gibt die Verschiebungen zu den Zeitpunkten 0,  $T/2$  und  $T$  an, wobei  $T = 1/f$  die Periode ist.
- Der Imaginärteil gibt die Verschiebungen zu den Zeitpunkten  $T/4$  und  $3T/4$  an.

### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Beispiel:
  - Gegeben:
    - $c = 0,4 \text{ m}$ ,  $S = 0,4 \text{ m}^2$
    - $x_N = 0,1 \text{ m}$ ,  $x_E = 0,15 \text{ m}$
    - $x_S = 0,19 \text{ m}$
    - $m = 25 \text{ kg}$ ,  $J_y = 0,35 \text{ kgm}^2$
    - $k_H = 5000 \text{ N/m}$
    - $k_T = 1000 \text{ Nm}$
    - $\rho = 1,21 \text{ kg/m}^3$
  - Gesucht:
    - Niedrigste Geschwindigkeit  $v_F$ , bei der Flattern auftritt
    - Flatterform

### 3. Biege-Torsionsflattern

- Schwingungen ohne Strömung:

- Die Schwingungen ohne Strömung sind Lösungen des Eigenwertproblems

$$[K][x_n] = \omega_n^2 [M][x_n] .$$

- 1. Eigenschwingung: Hubschwingung

$$\omega_H = 14,08 \frac{1}{s}, \quad [x_H] = \begin{bmatrix} z_{SH} \\ \alpha_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,2131 \end{bmatrix}$$



- 2. Eigenschwingung: Nickschwingung

$$\omega_N = 53,68 \frac{1}{s}, \quad [x_N] = \begin{bmatrix} z_{SN} \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0030 \\ 1 \end{bmatrix}$$



### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Festlegung der reduzierten Frequenzen:

- Für die reduzierten Frequenzen gilt:

$$k_{min} = \frac{\omega_{min} c}{2 v_{max}}, \quad k_{max} = \frac{\omega_{max} c}{2 v_{min}}$$

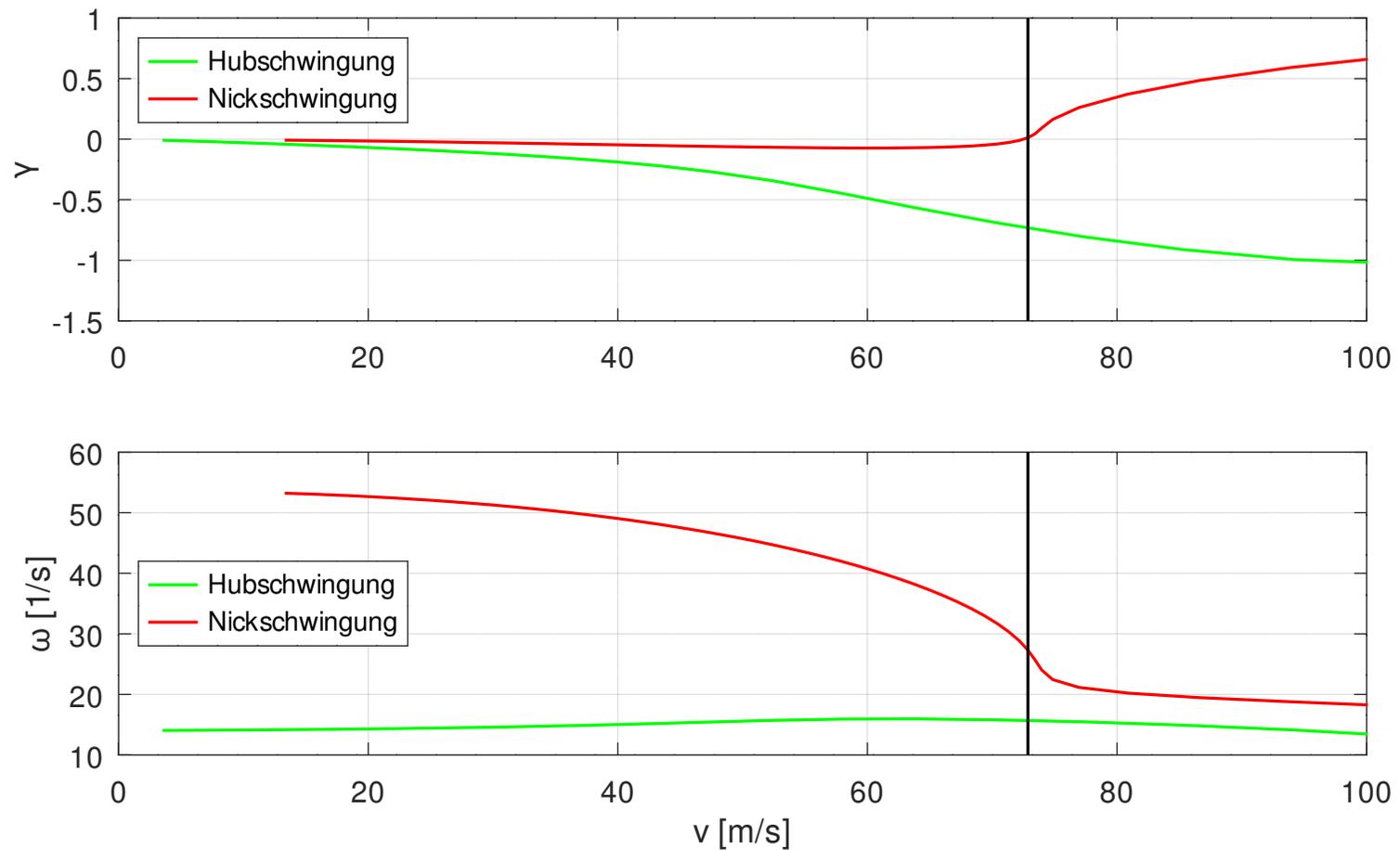
- Mit  $v_{min} = 15 \text{ m/s}$  und  $v_{max} = 100 \text{ m/s}$  folgt unter Verwendung der Kreisfrequenzen ohne Strömung:

$$k_{min} = \frac{14,08 \text{ s}^{-1} \cdot 0,4 \text{ m}}{2 \cdot 100 \text{ m/s}} = 0,028, \quad k_{max} = \frac{54,68 \text{ s}^{-1} \cdot 0,4 \text{ m}}{2 \cdot 15 \text{ m/s}} = 0,73$$

- Gewählt:  $k_{min} = 0,025$ ,  $k_{max} = 0,8$ ,  $\Delta k = 0,005$

### 3. Biege-Torsionsflattern

- Verläufe von  $\gamma(v)$  und  $\omega(v)$ :



### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Auswertung:

- Die Hubschwingung wird mit zunehmender Geschwindigkeit immer stabiler. Ihre Kreisfrequenz ändert sich nur wenig.
- Die Nickschwingung wird bei  $v = 72,8$  m/s instabil.
- Dabei nimmt die Kreisfrequenz stark ab und nähert sich der Kreisfrequenz der Hubschwingung.
- Bei Beginn des Flatterns hat die Nickschwingung eine Kreisfrequenz von  $27,3$  1/s.

### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Flutterform:

- Die Flutterform wird durch den zur Nickschwingung gehörenden Eigenvektor bei der Flattergeschwindigkeit beschrieben:

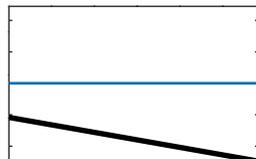
$$[U] = \begin{bmatrix} \hat{z}_s \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4687 - 0,0810 i \\ 0,9346 + 0,0654 i \end{bmatrix}, \quad |\hat{z}_s| = 0,4757, \quad \arg(\hat{z}_s) = -170,2^\circ \\ |\hat{\alpha}| = 0,9369, \quad \arg(\hat{\alpha}) = 4,0^\circ$$

- Die Nickbewegung hat gegenüber der Hubbewegung eine Phasenverschiebung von fast  $180^\circ$ .
- Die Form der Flatterschwingung ist auf der nächsten Seite dargestellt.

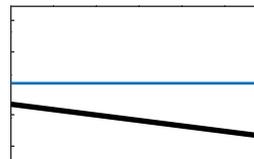
### 3. Biege-Torsionsflattern

---

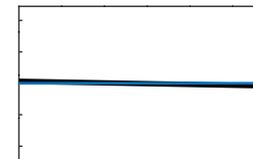
$t = (0/9) T$



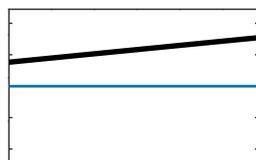
$t = (1/9) T$



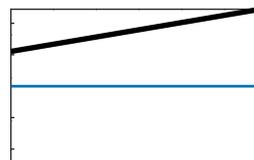
$t = (2/9) T$



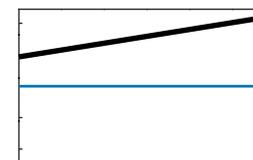
$t = (3/9) T$



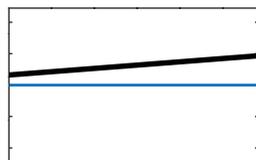
$t = (4/9) T$



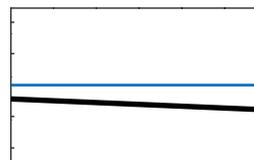
$t = (5/9) T$



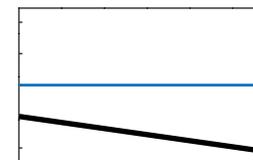
$t = (6/9) T$



$t = (7/9) T$

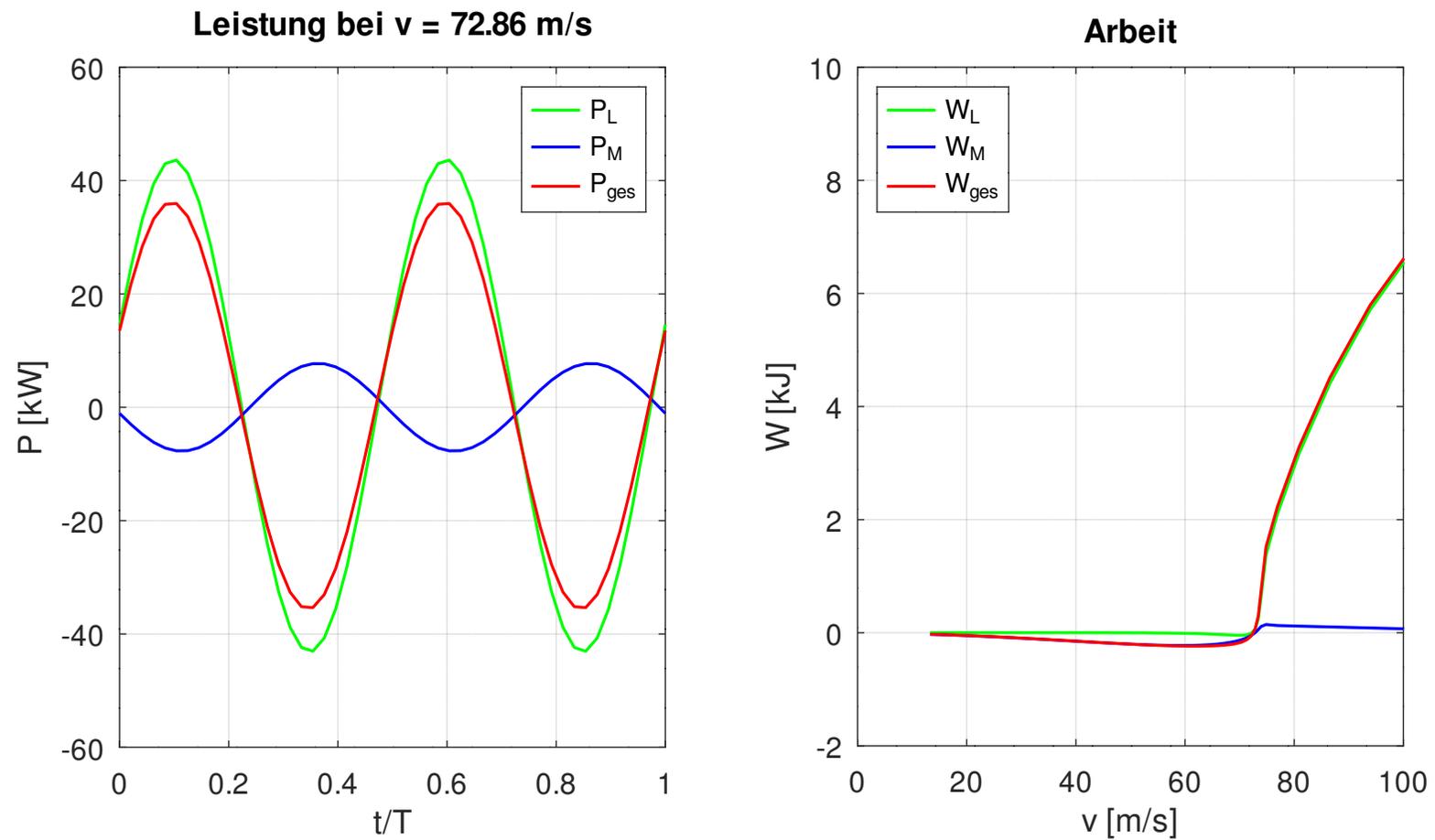


$t = (8/9) T$



### 3. Biege-Torsionsflattern

- Leistung und Arbeit der Luftkräfte:



### 3. Biege-Torsionsflattern

---

- Das linke Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf der Leistung der Luftkräfte während einer Periode der Flatterschwingung.
- Die Leistung der Auftriebskraft und die Leistung des Moments sind in Gegenphase.
- Den größten Beitrag liefert die Auftriebskraft.
- Die Fläche unter der Kurve ist nahezu null.
- Das rechte Diagramm zeigt die während einer Periode von den Luftkräften verrichtete Arbeit in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit.
- Bei Überschreiten der Flattergeschwindigkeit steigt die Arbeit stark an.