

1. Grundlagen

- Das Verhalten linear-elastischer Strukturen lässt sich sehr einfach mithilfe des Prinzips der *virtuellen Leistung* untersuchen.
- Aus diesem Prinzip können numerische Verfahren wie z. B. die Methode der finiten Elemente leicht hergeleitet werden.

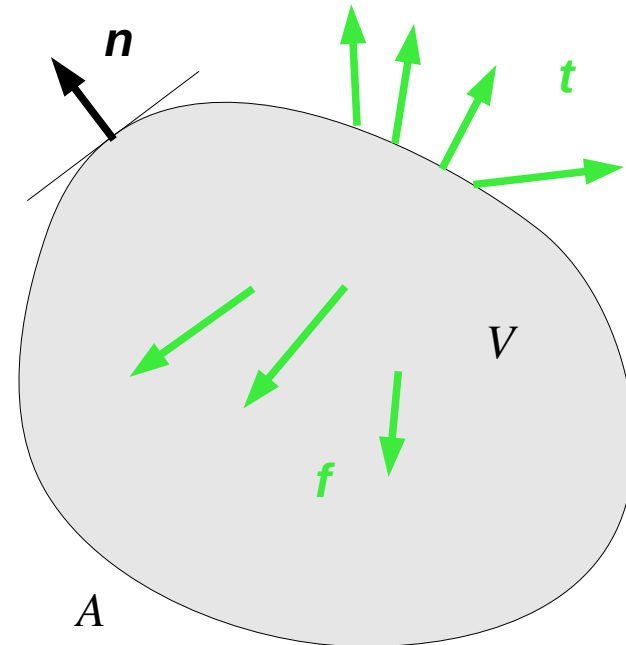
1. Grundlagen

1.1 Prinzip der virtuellen Leistung

1.2 Methode der finiten Elemente

1.1 Prinzip der virtuellen Leistung

- Energiebilanz:
 - Betrachtet wird eine linear-elastische Struktur mit Volumen V und Oberfläche A .
 - Im Inneren der Struktur greifen die Volumenkräfte f und an der Oberfläche die Flächenkräfte t an.



1.1 Prinzip der virtuellen Leistung

- Die zeitliche Änderung der Energie E der Struktur ist gleich der Leistung P der äußeren Kräfte:

$$\dot{E} = P$$

- Die Energie der Struktur setzt sich zusammen aus der Formänderungsenergie E^F und der kinetischen Energie E^K :

$$E = E^F + E^K$$

- Mit $\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}]^T$

und $\{\boldsymbol{\gamma}\} = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}]^T$

(Voigtsche Notation) gilt: $E^F = \frac{1}{2} \int_V \{\boldsymbol{\gamma}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV$

1.1 Prinzip der virtuellen Leistung

- Mit dem Elastizitätsgesetz $\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\mathbf{E}\}\{\boldsymbol{\gamma}\}$

folgt: $\{\boldsymbol{\gamma}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\boldsymbol{\gamma}\}^T \{\mathbf{E}\}\{\boldsymbol{\gamma}\}$

- Dabei ist $\{\mathbf{E}\}$ die *Elastizitätsmatrix*.
- Für die kinetische Energie gilt: $E^K = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV$
- Die Leistung der äußeren Kräfte berechnet sich zu

$$P = \int_V \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f} dV + \int_A \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{t} dA$$

1.1 Prinzip der virtuellen Leistung

- Damit lautet die Energiebilanz:

$$\int_V \{\dot{\boldsymbol{y}}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV + \int_V \rho \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \ddot{\boldsymbol{u}} dV = \int_V \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{f} dV + \int_A \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{t} dA$$

- Randbedingungen:
 - Auf einem Teil des Randes sind die Flächenkräfte vorgegeben. Sie definieren die *statischen Randbedingungen*.
 - Auf einem anderen Teil des Randes sind die Verschiebungen vorgegeben. Sie definieren die *geometrischen Randbedingungen*.

1.1 Prinzip der virtuellen Leistung

- Prinzip der virtuellen Leistung:
 - Die Energiebilanz muss für jeden festen Zeitpunkt erfüllt sein.
 - Bei vorgegeben äußeren Lasten, Verschiebungen und Beschleunigungen zu einem festen Zeitpunkt können beliebige Geschwindigkeiten auftreten, sofern sie die geometrischen Randbedingungen erfüllen.
 - Geschwindigkeiten \tilde{v} , die die geometrischen Randbedingungen erfüllen, heißen *virtuelle Geschwindigkeiten*.

1.1 Prinzip der virtuellen Leistung

- Die zugehörigen virtuellen Verzerrungsgeschwindigkeiten werden mit denselben Differenzialbeziehungen aus den virtuellen Geschwindigkeiten berechnet wie die Verzerrungen aus den Verschiebungen.
- Damit folgt aus der Energiebilanz das *Prinzip der virtuellen Leistung*:

$$\int_V \{ \tilde{\dot{\mathbf{y}}} \}^T \{ \boldsymbol{\sigma} \} dV + \int_V \rho \tilde{\mathbf{v}} \cdot \ddot{\mathbf{u}} dV = \int_V \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{f} dV + \int_A \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{t} dA \quad \text{für alle } \tilde{\mathbf{v}}$$

- Der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ gehört zu den tatsächlichen Verschiebungen \mathbf{u} .

1.1 Prinzip der virtuellen Leistung

- Für einen Quader lässt sich das Prinzip der virtuellen Leistung durch elementare Rechnung zeigen.
- Im Prinzip der virtuellen Leistung sind die folgenden drei Bedingungen enthalten:
 - Für den freigeschnittenen Körper sind die kinetischen Gleichungen erfüllt.
 - Für jeden freigeschnittenen Teilbereich des Körpers sind die kinetischen Gleichungen erfüllt.
 - Am Rand stimmt der Spannungsvektor mit den vorgegebenen Lasten überein (statische Randbedingungen).

1.1 Prinzip der virtuellen Leistung

- In der Mathematik werden die geometrischen Randbedingungen als *wesentliche Randbedingungen* und die statischen Randbedingungen als *natürliche Randbedingungen* bezeichnet.
- Zusammen mit den Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsanforderungen legen die wesentlichen Randbedingungen den Funktionenraum für die Lösung und die virtuellen Geschwindigkeiten fest.
- Die natürlichen Randbedingungen ergeben sich aus dem Prinzip der virtuellen Leistung.

1.1 Prinzip der virtuellen Leistung

- Mit den Abkürzungen

$$K[\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{u}] = \int_V \{\tilde{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV, \quad M[\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{u}] = \int_V \rho \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{u} dV$$

$$L[\tilde{\mathbf{v}}] = \int_V \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{f} dV + \int_A \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{t} dA$$

lautet das Prinzip der virtuellen Leistung:

$$K[\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{u}] + M[\tilde{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{u}}] = L[\tilde{\mathbf{v}}]$$

- $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ ist der Spannungstensor zur Verschiebung \mathbf{u} .
- $\{\tilde{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}\} = \{\tilde{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}(\tilde{\mathbf{v}})\}$ ist die Matrix der Verzerrungsgeschwindigkeiten zur virtuellen Geschwindigkeit $\tilde{\mathbf{v}}$.

1.1 Prinzip der virtuellen Leistung

- $K[\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{u}]$ und $M[\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{u}]$ sind so genannte *Bilinearformen*:

$$K[\tilde{\mathbf{v}}, \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2] = \alpha_1 K[\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_1] + \alpha_2 K[\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_2], \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

$$K[\alpha_1 \tilde{\mathbf{v}}_1 + \alpha_2 \tilde{\mathbf{v}}_2, \mathbf{u}] = \alpha_1 K[\tilde{\mathbf{v}}_1, \mathbf{u}] + \alpha_2 K[\tilde{\mathbf{v}}_2, \mathbf{u}]$$

$$M[\tilde{\mathbf{v}}, \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2] = \alpha_1 M[\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_1] + \alpha_2 M[\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_2], \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

$$M[\alpha_1 \tilde{\mathbf{v}}_1 + \alpha_2 \tilde{\mathbf{v}}_2, \mathbf{u}] = \alpha_1 M[\tilde{\mathbf{v}}_1, \mathbf{u}] + \alpha_2 M[\tilde{\mathbf{v}}_2, \mathbf{u}]$$

- $L[\tilde{\mathbf{v}}]$ ist eine *Linearform*:

$$L[\alpha_1 \tilde{\mathbf{v}}_1 + \alpha_2 \tilde{\mathbf{v}}_2] = \alpha_1 L[\tilde{\mathbf{v}}_1] + \alpha_2 L[\tilde{\mathbf{v}}_2]$$

1.1 Prinzip der virtuellen Leistung

- Eigenschaften von $K[\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{u}]$:

• Für die Formänderungsenergie gilt: $E^F = \frac{1}{2} K[\mathbf{u}, \mathbf{u}]$

• Die Bilinearform ist symmetrisch: $K[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = K[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$

• Die Bilinearform ist positiv semidefinit: $K[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geq 0 \quad \forall \mathbf{u}$

• Die Bilinearform ist null für die *Starrkörperbewegungen* \mathbf{u}_S :

$$K[\mathbf{u}_S, \mathbf{u}_S] = 0$$

• Starrkörperbewegungen sind verzerrungsfreie Bewegungen:

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}_S) = \mathbf{0}$$

• Wenn die wesentlichen Randbedingungen keine Starrkörperbewegungen zulassen, ist K positiv definit.

1.1 Prinzip der virtuellen Leistung

- Eigenschaften von $M[\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{u}]$:

- Für die kinetische Energie gilt: $E^K = \frac{1}{2} M[\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}]$
- Die Bilinearform ist symmetrisch: $M[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = M[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$
- Die Bilinearform ist positiv definit, d. h. es gibt eine reelle Konstante $\mu > 0$, so dass gilt:

$$M[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geq \mu \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV \quad \forall \mathbf{u}$$

1.2 Methode der finiten Elemente

- Die Methode der finiten Elemente ist ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Lösungen des Prinzips der virtuellen Leistung.
- Sie ist ein Spezialfall der Methode von Bubnow und Galerkin.
- Methode von Bubnow und Galerkin:
 - Vorgegeben sind N Funktionen $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$, die die wesentlichen Randbedingungen erfüllen.
 - Für die Lösung wird der folgende Approximationsansatz gemacht:

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^N q_n \mathbf{v}_n$$

1.2 Methode der finiten Elemente

- Die Koeffizienten q_n werden so bestimmt, dass das Prinzip der virtuellen Leistung für alle virtuellen Geschwindigkeiten der Form

$$\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{n=1}^N \tilde{q}_n \mathbf{v}_n, \quad \tilde{q}_n \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

erfüllt ist.

- Einsetzen der Ansätze ergibt:

$$\sum_{m=1}^N \tilde{q}_m \left(\sum_{n=1}^N K[\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_n] q_n + \sum_{n=1}^N M[\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_n] \ddot{q}_n - L[\mathbf{v}_m] \right) = 0$$

- Damit diese Gleichung für beliebige \tilde{q}_m erfüllt ist, muss gelten:

$$\sum_{n=1}^N K[\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_n] q_n + \sum_{n=1}^N M[\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_n] \ddot{q}_n - L[\mathbf{v}_m] = 0, \quad m = 1, \dots, N$$

1.2 Methode der finiten Elemente

- Mit den Matrizen

$$[K] = \begin{bmatrix} K[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1] & \cdots & K[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_N] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K[\mathbf{v}_N, \mathbf{v}_1] & \cdots & K[\mathbf{v}_N, \mathbf{v}_N] \end{bmatrix}, \quad [l] = \begin{bmatrix} L[\mathbf{v}_1] \\ \vdots \\ L[\mathbf{v}_N] \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1] & \cdots & M[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_N] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M[\mathbf{v}_N, \mathbf{v}_1] & \cdots & M[\mathbf{v}_N, \mathbf{v}_N] \end{bmatrix}, \quad [q] = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix}$$

lauten diese Gleichungen: $[K][q] + [M][\ddot{q}] = [l]$

1.2 Methode der finiten Elemente

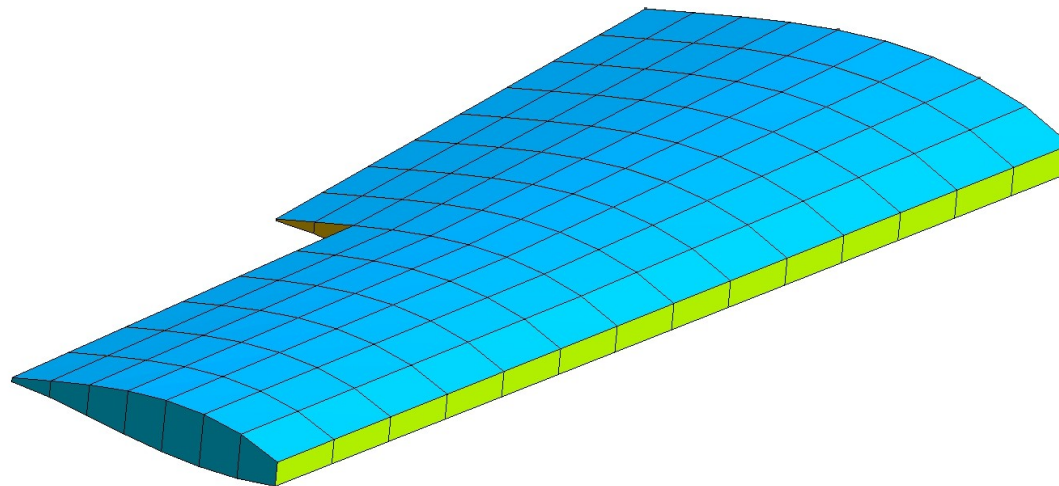
- Das ist ein System von gewöhnlichen linearen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung.
- Für statische Probleme reduziert sich das Differenzialgleichungssystem auf ein lineares Gleichungssystem:

$$[K][q]=[l]$$

- Matrix $[K]$ ist die *Steifigkeitsmatrix*, Matrix $[M]$ die *Massenmatrix* und Matrix $[l]$ die *Lastmatrix*.

1.2 Methode der finiten Elemente

- Methode der finiten Elemente:
 - Die Methode der finiten Elemente ist ein Bubnov-Galerkin-Verfahren, bei dem die Ansatzfunktionen automatisch erzeugt werden.



1.2 Methode der finiten Elemente

- Ansatzfunktionen:
 - Die Struktur wird in Elemente unterteilt, deren Geometrie einfach zu beschreiben ist: $V \approx \bigcup_E V_E$
 - Die Eckpunkte der Elemente werden als *Knoten* bezeichnet.
 - Die Verschiebungen innerhalb eines Elements werden durch Interpolation der Verschiebungen an den Knoten des Elements dargestellt.
 - Dadurch ergeben sich Verschiebungen, die auf dem gesamten Gebiet stetig sind:

$$[u(\mathbf{x})] = \sum_n [H_n(\mathbf{x})] u_n = [H(\mathbf{x})][u]$$

1.2 Methode der finiten Elemente

- Matrix $[\mathbf{u}(\mathbf{x})]$ enthält die Komponenten des Verschiebungsvektors an der Stelle \mathbf{x} .
- Matrix $[\mathbf{H}(\mathbf{x})]$ enthält die Interpolationsfunktionen.
- Matrix $[u]$ enthält die Komponenten aller Verschiebungsvektoren an den Knoten.
- Die virtuellen Geschwindigkeiten werden durch Interpolation der virtuellen Geschwindigkeiten an den Knoten des Elements dargestellt:

$$[\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x})] = [\mathbf{H}(\mathbf{x})][\tilde{\mathbf{v}}]$$

- Damit werden die Steifigkeitsmatrix, die Massenmatrix und die Lastmatrix wie beim allgemeinen Bubnow-Galerkin-Verfahren berechnet.

1.2 Methode der finiten Elemente

- Konsistente und konzentrierte Massenmatrix:
 - Die mit den Ansatzfunktionen berechnete Massenmatrix wird als *konsistente Massenmatrix* bezeichnet.
 - In der Praxis wird meist eine *konzentrierte Massenmatrix* verwendet.
 - Anstelle einer kontinuierlichen Massenverteilung werden Punktmassen auf die Elementknoten gesetzt, deren Gesamtmasse die Masse des Elements ergibt.
 - Konzentrierte Massen liefern zu große Werte für die Massenträgheitsmomente des Elements.
 - Die konzentrierte Massenmatrix hat den Vorteil, dass sie eine Diagonalmatrix ist.

1.2 Methode der finiten Elemente

- Eigenschaften der Matrizen:
 - Aus den Eigenschaften der Bilinearformen K und M folgt:

- Die Steifigkeitsmatrix $[K]$ und die Massenmatrix $[M]$ sind symmetrisch:

$$[K]^T = [K], \quad [M]^T = [M]$$

- Die Steifigkeitsmatrix ist positiv semidefinit:

$$[u]^T [K] [u] \geq 0 \quad \forall \quad [u] \neq [0]$$

- Die konsistente Massenmatrix ist positiv definit:

$$[u]^T [M] [u] > 0 \quad \forall \quad [u] \neq [0]$$

- Die konzentrierte Massenmatrix ist positiv semidefinit:

$$[u]^T [M] [u] \geq 0 \quad \forall \quad [u]$$

1.2 Methode der finiten Elemente

- Strukturelemente:
 - Finite Elemente für Balken, Platten und Schalen werden als Strukturelemente bezeichnet.
 - Dabei werden zunächst die kinematischen Annahmen der Balkentheorie bzw. der Schalentheorie in das Prinzip der virtuellen Leistung eingearbeitet.
 - Anschließend werden Verschiebungsansätze für die Funktionen, die die Verschiebungen beschreiben, eingeführt.

1.2 Methode der finiten Elemente

- Randbedingungen:
 - Den Knoten an der Einspannung werden die vorgegebenen Verschiebungen zugewiesen.
 - Dann erfüllen die Verschiebungen die wesentlichen Randbedingungen.
 - Die virtuellen Geschwindigkeiten an der Einspannung sind null.
 - Die bekannten Verschiebungen an der Einspannung sind *vorgeschriebene Verschiebungen*. Sie werden mit dem Index P gekennzeichnet.

1.2 Methode der finiten Elemente

- Die unbekanntes Verschiebungen an den übrigen Knoten werden als *lokale Verschiebungen* bezeichnet und mit dem Index L gekennzeichnet.
- Damit ergibt sich die partitionierte Bewegungsgleichung:

$$\begin{bmatrix} [M_{LL}] & [M_{LP}] \\ [M_{LP}]^T & [M_{PP}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\ddot{u}_L] \\ [\ddot{u}_P] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LP}] \\ [K_{LP}]^T & [K_{PP}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_L] \\ [u_P] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [l_L] \\ [l_P] \end{bmatrix}$$

- Auflösen nach den unbekanntes Größen ergibt:

$$\begin{aligned} [M_{LL}][\ddot{u}_L] + [K_{LL}][u_L] &= [l_L] - [M_{LP}][\ddot{u}_P] - [K_{LP}][u_P] \\ [l_P] &= [M_{LP}]^T [\ddot{u}_L] + [M_{PP}][\ddot{u}_P] + [K_{LP}]^T [u_L] + [K_{PP}][u_P] \end{aligned}$$

1.2 Methode der finiten Elemente

- Dämpfung:
 - Bei realen Strukturen treten neben den elastischen Kräften, den Trägheitskräften und den aufgebrachtten Kräften noch Dämpfungskräfte auf.
 - Geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskräfte können mithilfe einer Dämpfungsmatrix beschrieben werden.
 - Dann lautet die Bewegungsgleichung:

$$[M][\ddot{u}] + [D][\dot{u}] + [K][u] = [l]$$

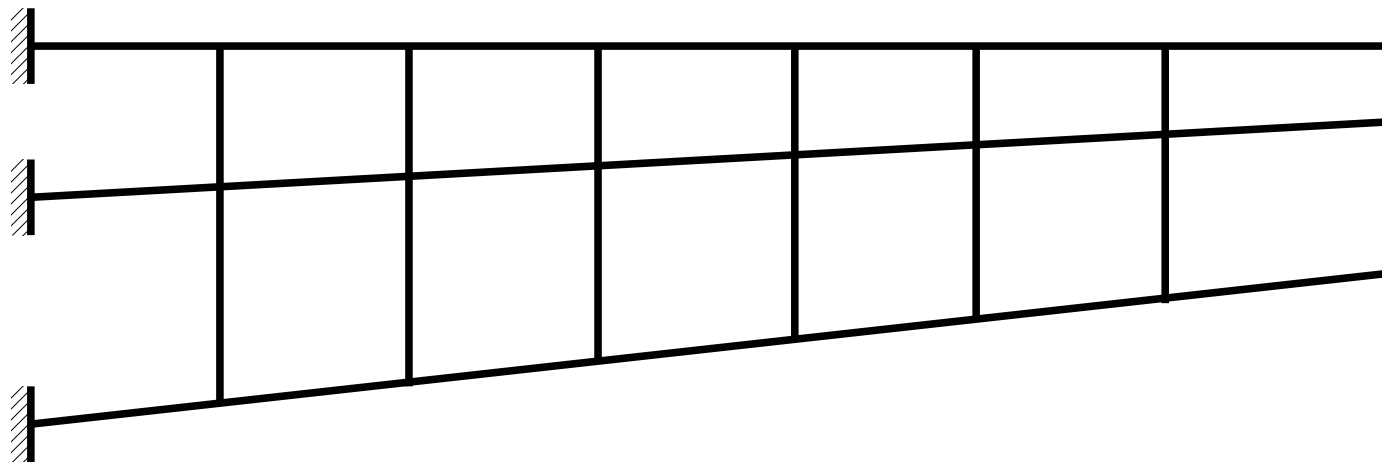
1.2 Methode der finiten Elemente

- Die Dämpfungsmatrizen diskreter Dämpfer werden experimentell bestimmt.
- Bei der *Rayleigh-Dämpfung* wird die Dämpfungsmatrix durch eine Linearkombination der Steifigkeits- und der Massenmatrix approximiert:

$$[D] = \alpha_K [K] + \alpha_M [M]$$

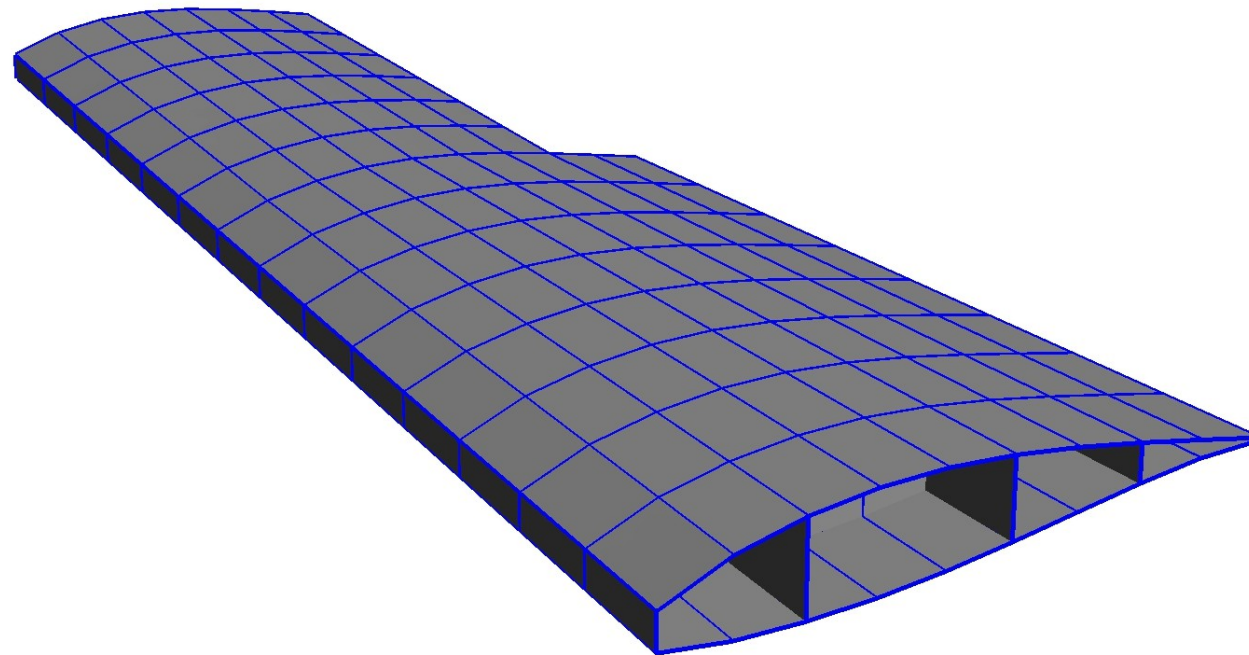
1.2 Methode der finiten Elemente

- Modellierung von Flugzeugstrukturen:
 - Das einfachste Modell eines Tragflügels ist ein Balkenmodell.
 - Holme und Rippen werden durch Balken approximiert, deren Steifigkeiten angepasst werden.



1.2 Methode der finiten Elemente

- Ein genaueres Modell eines Tragflügels besteht aus Balkenelementen für Holme, Spanten und Stringer und aus Membran- oder Schalenelementen für die Hautfelder.



1.2 Methode der finiten Elemente

- Die einfachsten Flugzeugmodelle bestehen aus Balkenelementen für Rumpf, Tragflügel und Leitwerke.
- Genauere Modelle bestehen aus Balkenelementen sowie aus Membran- oder Schalenelementen.
- Die Strukturmasse wird oft anteilmäßig den Anbauteilen zugeschlagen. Die Anbauteile werden als Massenpunkte oder starre Körper modelliert, die an geeigneten Knotenpunkten angeschlossen sind.