2. Modalanalyse

- Die Ermittlung der Eigenschwingungen wird als Modalanalyse bezeichnet.
- Die Modalanalyse kann experimentell oder rechnerisch erfolgen.
- Die experimentelle Modalanalyse von Flugzeugen erfolgt im *Standschwingversuch*.
- Bei der rechnerischen Modalanalyse muss ein Eigenwertproblem gelöst werden.

2. Modalanalyse

2.1 Eigenwertproblem

- Freie ungedämpfte Schwingungen:
  - Freie ungedämpfte Schwingungen sind Lösungen von

$$[K_{LL}][u_L]+[M_{LL}][\ddot{u}_L]=[0]$$

  - Sie beschreiben die Bewegung, die sich einstellt, wenn die Struktur aus einer ausgelenkten Lage losgelassen wird.
  - Der Lösungsansatz $[u_L(t)]=[x]\phi(t)$

führt auf: $[K_{LL}][x]\phi(t)+[M_{LL}][x]\ddot{\phi}(t)=[0]$

$$\rightarrow \quad [K_{LL}][x]=-[M_{LL}][x]\frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)}$$

2.1 Eigenwertproblem

- Da die linke Seite nicht von der Zeit abhängt, muss gelten:

$$\frac{\ddot{\phi}}{\phi} = -\omega^2 = const. \rightarrow \phi(t) = c_s \sin(\omega t) + c_c \cos(\omega t)$$

- Für den Vektor $[x]$ folgt das algebraische Eigenwertproblem:

$$\boxed{[K_{LL}][x] = \omega^2 [M_{LL}][x]}$$

2.2 Eigenschaften der Lösung

- Aus den Eigenschaften der Matrizen folgt:
  - Ist N die Dimension der Steifigkeits- und der Massenmatrix, dann gibt es im Falle einer positiv definiten Massenmatrix genau N reelle Lösungen $\left(\omega_n^2,\ [x_n]\right)$ des algebraischen Eigenwertproblems.
  - Die *Eigenvektoren* $[x_n]$ beschreiben die Form der Eigenschwingung.
  - Die *Eigenwerte* ω_n^2 liefern die Eigenkreisfrequenzen ω_n und die Eigenfrequenzen $f_n = \omega_n / (2\pi)$, die den zeitlichen Verlauf der Eigenschwingung beschreiben.

2.2 Eigenschaften der Lösung

- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal bezüglich der Steifigkeits- und der Massenmatrix:

$$[x_m]^T [K_{LL}][x_n]=0 \,,\quad [x_m]^T [M_{LL}][x_n]=0 \quad \text{für} \quad m \neq n$$

- Sie können so normiert werden, dass gilt:

$$[x_n]^T [M_{LL}][x_n]=1 \;\Rightarrow\; [x_n]^T [K_{LL}][x_n]=\omega_n^2$$

- Die Eigenvektoren bilden eine Basis des N-dimensionalen Vektorraums der Verschiebungen, d. h. jeder Verschiebungsvektor kann als Linearkombination der Eigenvektoren dargestellt werden:

$$[u_L]=\sum_{n=1}^{N} q_n [x_n]$$

2.2 Eigenschaften der Lösung

- Für eine konzentrierte Massenmatrix hat das Eigenwertproblem nur M Lösungen, wobei M gleich der Anzahl der von null verschiedenen Diagonalelemente der Massenmatrix ist.
- Die Eigenvektoren spannen daher nur einen M-dimensionalen Unterraum des Vektorraums der Verschiebungen auf.
- Verschiebungsvektoren, die nicht in diesem Unterraum liegen, beschreiben Bewegungen, deren kinetische Energie null ist. Diese Bewegungen sind physikalisch ohne Bedeutung.

2.3 Lösungsverfahren

- Das zu lösende algebraische Eigenwertproblem ist in der Praxis von großer Dimension ($N > 10^6$).
- Meist muss jedoch nur eine kleine Anzahl von Eigenschwingungen mit den niedrigsten Eigenfrequenzen berechnet werden.
- Dafür werden effiziente iterative Verfahren benötigt.
- Gebräuchliche Verfahren sind die *Unterraumiteration* und die *Lanczos-Verfahren*.
- Grundlage beider Verfahren ist die Vektoriteration.

2.4 Praktische Hinweise

- Einheiten:
  - Die Einheiten von Steifigkeit und Masse müssen konsistent sein.
  - In der Praxis werden in der Regel folgende Einheiten verwendet:
    - Längeneinheit: mm
    - Krafteinheit: N
    - Elastizitätsmodul: $\mathrm{MPa} = \mathrm{N/mm^2}$
  - Damit ist die Einheit für die Masse eine abgeleitete Einheit.

2.4 Praktische Hinweise

- Einheit für die Masse:

$$1\,\mathrm{N} = 1\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1\,\frac{\mathrm{kg}\cdot 10^3\,\mathrm{mm}}{\mathrm{s}^2}$$

$$1\,\mathrm{N} = 1000\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{mm}}{\mathrm{s}^2}$$

$$1\,\mathrm{kg} = 10^{-3}\,\frac{\mathrm{N\,s}^2}{\mathrm{mm}}$$

- Konsistente Einheiten:
  - N, kg, m
  - N, t, mm
- Falsch:
  - N, kg, mm

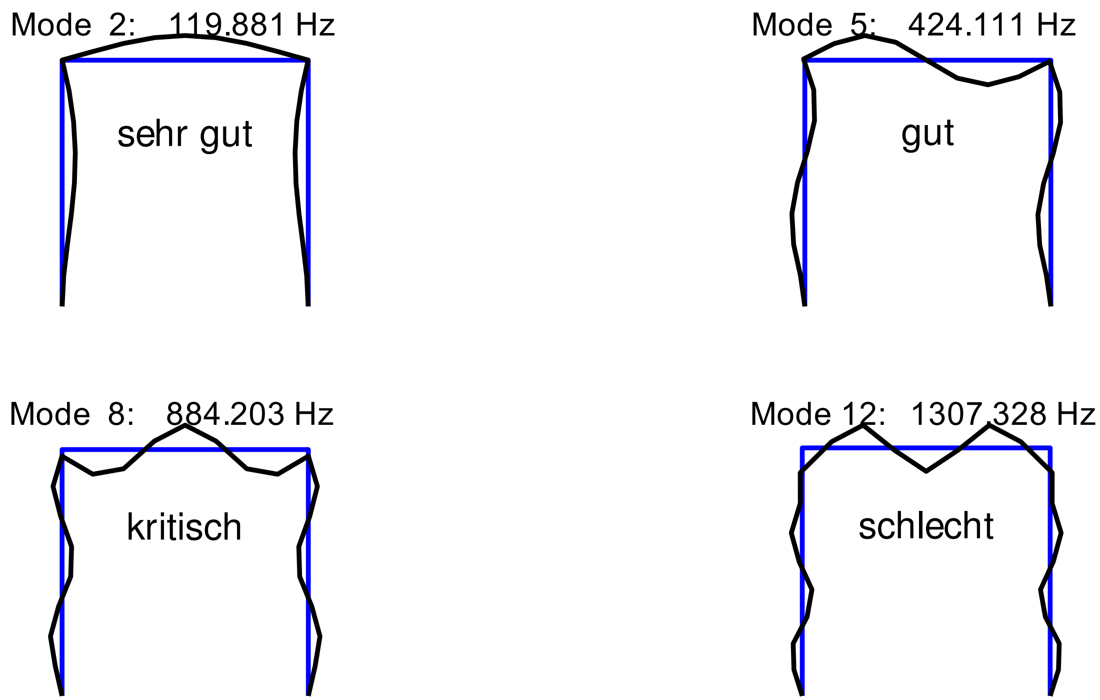
$$\boxed{1\,\frac{\mathrm{N\,s}^2}{\mathrm{mm}} = 1000\,\mathrm{kg} = 1\,\mathrm{t}}$$

2.4 Praktische Hinweise

- Netzfeinheit:
  - Die finiten Elemente müssen so klein sein, dass die zu berechnenden Eigenfunktionen gut approximiert werden können.
  - Da mit zunehmender Eigenfrequenz die Wellenlänge abnimmt, muss die Vernetzung um so feiner sein, je höher die Eigenfrequenz ist.
  - Bei Verwendung von Elementen mit einem linearen Ansatz sollten mindestens sechs Elemente und bei Elementen mit quadratischem Ansatz mindestens zwei Elemente pro Wellenlänge verwendet werden.

2.4 Praktische Hinweise

- Die Qualität der Vernetzung kann anhand der Schwingformen bewertet werden:



2.4 Praktische Hinweise

- Lokale Schwingungen:
  - Bei komplexen Strukturen, die aus vielen Einzelteilen zusammengebaut sind, treten häufig Schwingungen auf, die nur eines der Einzelteile betreffen.
  - Solche Schwingungen, bei denen sich die Schwingform auf einen kleinen Teilbereich der Struktur beschränkt, werden als lokale Schwingungen bezeichnet.
  - Wenn die Struktur viele ähnliche Einzelteile enthält, gibt es Frequenzintervalle, in denen sehr viele lokale Schwingungen liegen.
  - Ein Beispiel dafür sind Schwingungen von Streben im Inneren des Flugzeugrumpfs.

2.4 Praktische Hinweise

- In der Aeroelastik interessieren überwiegend Biege- und Torsionsschwingungen von Tragflügel und Rumpf, während lokale Schwingungen im Inneren des Flugzeugs keine Bedeutung haben.
- Lokale Schwingungen lassen sich vermeiden, wenn die Elemente, mit denen die Einbauteile abgebildet werden, keine Massendichte haben, sondern ihre Masse auf die Anschlusspunkte konzentriert wird.