3. Frequenzganganalyse

- Die Berechnung der Antwort auf eine harmonische Anregung wird als Frequenzganganalyse bezeichnet.
- Da die instationären aerodynamischen Lasten am einfachsten für harmonische Bewegungen berechnet werden können, bildet die Frequenzganganalyse die Grundlage der instationären Aeroelastik.
- Sie wird eingesetzt, um Böenlasten oder Lasten infolge von instationären Manövern zu berechnen.

3. Frequenzganganalyse

3.1 Grundgleichung

- Grundgleichung:
  - Aus der Bewegungsgleichung

    $$[M][\ddot{u}(t)]+[D][\dot{u}(t)]+[K][u(t)]=[l(t)]$$

    für das Finite-Elemente-Modell folgt mit

    $$[l(t)]=\Re\left([L(\Omega)]e^{i\Omega t}\right),\quad [u(t)]=\Re\left([U(\Omega)]e^{i\Omega t}\right)$$

    die Grundgleichung der Frequenzganganalyse:

    $$\boxed{\left(-\Omega^2[M]+i\Omega[D]+[K]\right)[U(\Omega)]=[L(\Omega)]}$$

  - $[L]$ und $[U]$ sind komplexe Matrizen mit den Informationen über Amplitude und Phase.

3.1 Grundgleichung

- Die komplexe Matrix

$$\left[K^d(\Omega)\right]=[K]+i\,\Omega[D]-\Omega^2[M]$$

ist die *dynamische Steifigkeitsmatrix*.

- Partitionierung:
  - Unterteilung der Grundgleichung in lokale Freiheitsgrade und Freiheitsgrade mit vorgegebenen Verschiebungen ergibt:

$$\begin{bmatrix}\left[K^d_{LL}(\Omega)\right] & \left[K^d_{LP}(\Omega)\right]\\ \left[K^d_{LP}(\Omega)\right]^T & \left[K^d_{PP}(\Omega)\right]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left[U_L(\Omega)\right]\\ \left[U_P(\Omega)\right]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left[L_L(\Omega)\right]\\ \left[L_P(\Omega)\right]\end{bmatrix}$$

3.1 Grundgleichung

- Aus der ersten Matrixzeile können die lokalen Verschiebungen $[U_L]$ berechnet werden:

$$\left[K_{LL}^{d}(\Omega)\right]\left[U_{L}(\Omega)\right]=\left[L_{L}(\Omega)\right]-\left[K_{LP}^{d}(\Omega)\right]\left[U_{P}(\Omega)\right]$$

- Aus der zweiten Matrixzeile folgt für die Lagerreaktionen:

$$\left[L_{P}(\Omega)\right]=\left[K_{LP}^{d}(\Omega)\right]^{T}\left[U_{L}(\Omega)\right]+\left[K_{PP}^{d}(\Omega)\right]\left[U_{P}(\Omega)\right]$$

- Bei aeroelastischen Problemen sind die vorgeschriebenen Verschiebungen in der Regel null.

3.2 Direkte Frequenzganganalyse

- Methode:
  - Die Grundgleichung der Frequenzganganalyse wird für jede gewünschte Erregerkreisfrequenz Ω gelöst.
- Vorteile:
  - Es werden keine weiteren Näherungen gemacht.
  - Frequenzabhängige Steifigkeits- oder Dämpfungsmatrizen, wie sie z. B. bei viskosen Dämpfern auftreten, können leicht berücksichtigt werden.
  - Die frequenzabhängigen aerodynamischen Matrizen können ohne weitere Näherungen berücksichtigt werden.

3.2 Direkte Frequenzganganalyse

- Nachteile:
  - Für jede Erregerkreisfrequenz muss ein komplexes lineares Gleichungssystem von sehr großer Dimension gelöst werden.
  - In der Nähe von Resonanzfrequenzen ist das Gleichungssystem schlecht konditioniert.
- Einsatz:
  - Die direkte Frequenzganganalyse kommt zum Einsatz, wenn die Antwort nur für sehr wenige Erregerfrequenzen zu berechnen ist.

3.3 Modale Frequenzganganalyse

- Methode:
  - Die Antwort wird durch eine Überlagerung von Eigenvektoren approximiert. Dabei ist die Anzahl der verwendeten Eigenvektoren klein im Vergleich zur Anzahl der Freiheitsgrade.
- Vorteile:
  - Das zu lösende Gleichungssystem ist von wesentlich kleinerer Dimension als bei der direkten Frequenzganganalyse.
  - Im Falle von modaler Dämpfung ergeben sich in der Strukturdynamik entkoppelte Gleichungen. In der Aeroelastik sind die Gleichungen jedoch immer über die aerodynamischen Matrizen gekoppelt.

3.3 Modale Frequenzganganalyse

- Nachteile:
  - Die Methode liefert eine Näherungslösung für die Grundgleichung der Frequenzganganalyse.
  - Für frequenzabhängige Matrizen, wie sie in der Aeroelastik vorkommen, sind weitere Näherungen nötig.
  - Es muss zuerst eine Modalanalyse durchgeführt werden, um die Eigenvektoren und Eigenfrequenzen zu ermitteln.
- Einsatz:
  - Die modale Frequenzganganalyse wird verwendet, wenn die Antworten für sehr viele Erregerfrequenzen gesucht sind. Sie ist die Standardmethode für die Berechnung von instationären aeroelastischen Vorgängen.

3.3 Modale Frequenzganganalyse

3.3.1 Modale Reduktion

3.3.2 Verbesserte modale Reduktion

3.3.1 Modale Reduktion

- Transformation auf modale Koordinaten:
  - Da die Eigenvektoren eine Basis bilden, lässt sich jeder Verschiebungsvektor als Linearkombination der Eigenvektoren darstellen:

$$[U_L] = \sum_{n=1}^{N} [x_n] Q_n$$

  - Mit den Matrizen

$$[X] = \begin{bmatrix} [x_1] & \cdots & [x_N] \end{bmatrix} \text{ und } [U]_X^T = \begin{bmatrix} Q_1 & \cdots & Q_N \end{bmatrix}$$

    gilt: $[U_L] = [X][U]_X$

  - $[U_L]$ und $[U]_X$ sind komplexe Matrizen, während $[X]$ reell ist.

3.3.1 Modale Reduktion

- Einsetzen in die Grundgleichung und Projektion auf die Eigenvektoren ergibt:

$$\left(-\Omega^2[X]^T[M_{LL}][X]+i\,\Omega[X]^T[D_{LL}][X]+[X]^T[K_{LL}][X]\right)[U]_X$$
$$=[X]^T[L_L]$$

- Mit den modalen Matrizen

$$[M]_X=[X]^T[M_{LL}][X],\ \ [D]_X=[X]^T[D_{LL}][X]$$
$$[K]_X=[X]^T[K_{LL}][X],\ \ [L]_X=[X]^T[L_L]$$

folgt: $$\left(-\Omega^2[M]_X+i\,\Omega[D]_X+[K]_X\right)[U]_X=[L]_X$$

3.3.1 Modale Reduktion

- Wegen der Orthogonalitätseigenschaften der Eigenvektoren sind die Gleichungen nur über die Dämpfung gekoppelt.
- Wenn die Eigenvektoren massennormiert sind, gilt:

$$[M]_X = [X]^T [M_{LL}][X] = [I]$$

$$[K]_X = [X]^T [K_{LL}][X] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_N^2 \end{bmatrix} = [\Omega]^2$$

- Wenn die Kopplung durch die Dämpfung vernachlässigt werden kann, spricht man von *modaler Dämpfung*.

3.3.1 Modale Reduktion

- Die Rayleigh-Dämpfung führt auf eine modale Dämpfung:

$$[D]_X = \alpha_K [\Omega]^2 + \alpha_M [I]$$

- Allgemeiner kann modale Dämpfung durch *modale Lehrsche Dämpfungsmaße* beschrieben werden:

$$[D]_X = \begin{bmatrix} 2\omega_1 D_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2\omega_N D_N \end{bmatrix}$$

- Modale Dämpfung führt auf entkoppelte Gleichungen:

$$\left(-\Omega^2 + 2i\Omega\omega_n D_n + \omega_n^2\right) Q_n = [x_n]^T [L_L], \quad n = 1, \ldots N$$

3.3.1 Modale Reduktion

- Daraus folgt für die modalen Koeffizienten:

$$Q_n(\Omega)=\frac{[x_n]^T[L_L]}{\omega_n^2-\Omega^2+2i\Omega\omega_n D_n}=H(\eta_n, D_n)\frac{[x_n]^T[L_L]}{\omega_n^2}, \quad \eta_n=\frac{\Omega}{\omega_n}$$

- Die *modale Übertragungsfunktion*

$$H(\eta, D)=\frac{1}{1-\eta^2+2iD\eta}$$

stimmt mit der Übertragungsfunktion eines Systems mit einem Freiheitsgrad überein.

3.3.1 Modale Reduktion

- Modale Reduktion:
  - Da der Rechenaufwand zur Ermittlung aller Eigenschwingungen in der Regel deutlich größer ist als der Rechenaufwand zur Lösung der Grundgleichung, ist die modale Transformation für die praktische Berechnung unbrauchbar.
  - Die meisten Eigenfrequenzen liegen jedoch weit oberhalb der Erregerfrequenz. Ihre Antwort ist daher mit guter Näherung quasistatisch.
  - Daher ergeben sich bereits brauchbare Ergebnisse, wenn nur die $p \ll N$ Eigenschwingungen mit den niedrigsten Eigenfrequenzen verwendet werden.

3.3.1 Modale Reduktion

- Mit den Abkürzungen

$$\left[X^p\right]=\left[\left[x_1\right] \quad \cdots \quad \left[x_p\right]\right],\ \left[U\right]_p=\left[Q_1 \quad \cdots \quad Q_p\right]^T$$

$$\left[M\right]_p=\left[X^p\right]^T\left[M_{LL}\right]\left[X^p\right],\ \left[K\right]_p=\left[X^p\right]^T\left[K_{LL}\right]\left[X^p\right]$$

$$\left[D\right]_p=\left[X^p\right]^T\left[D_{LL}\right]\left[X^p\right],\ \left[L\right]_p=\left[X^p\right]^T\left[L_L\right]$$

lauten die Gleichungen für die modale Reduktion:

$$\left[U_L\right]\approx\left[U_L^p\right]=\left[X^p\right]\left[U\right]_p$$

$$\left(-\Omega^2\left[M\right]_p+i\Omega\left[D\right]_p+\left[K\right]_p\right)\left[U\right]_p=\left[L\right]_p$$

3.3.1 Modale Reduktion

- Die Anzahl der benötigten Eigenschwingungen ergibt sich aus der Bedingung

$$\eta_p < 0,3 \;\rightarrow\; \omega_p > 3\,\Omega_{max}$$

- In der Praxis ist p um mehrere Zehnerpotenzen kleiner als N, so dass sich die modale Reduktion auch dann lohnt, wenn die Dämpfung nicht modal ist.
- In der Aeroelastik sind die Gleichungen infolge der aerodynamischen Matrix immer gekoppelt.

3.3.2 Verbesserte modale Reduktion

- Nachteile der modalen Reduktion:
  - Bei der gewöhnlichen modalen Reduktion wird die quasistatische Antwort der weggelassenen Eigenvektoren komplett vernachlässigt.
  - Damit ergibt sich eine brauchbare Näherung für die Verschiebungen, wenn gilt:

$$\max_{n>p}\left\{\left|[x_n]^T[L_L]\right|/\omega_n^2\right\} \ll \max_{n\leq p}\left\{\left|\left([x_n]^T[L_L]\right)\right|/\omega_n^2\right\}$$

  - Diese Bedingung ist in der Praxis meist erfüllt.
  - Antworten wie Verzerrungen und Spannungen beruhen auf räumlichen Ableitungen der Eigenfunktionen.

3.3.2 Verbesserte modale Reduktion

- Die räumlichen Ableitungen sind umgekehrt proportional zur Wellenlänge, die mit zunehmender Frequenz abnimmt.
- Deshalb ist der Beitrag der höheren Eigenschwingungen zu den Verzerrungen und Spannungen größer als zu den Verschiebungen.
- Daher sind die mit der modalen Reduktion berechneten Näherungen für die Verzerrungen und Spannungen oft nicht befriedigend.
- Wird die quasistatische Antwort der weggelassenen Eigenvektoren berücksichtigt, ergeben sich für alle Antworten gute Näherungen.

3.3.2 Verbesserte modale Reduktion

- Methode der modalen Beschleunigungen:
  - Da die Antwort der weggelassenen Eigenvektoren quasistatisch ist, können die Beiträge zu den Trägheits- und Dämpfungskräften vernachlässigt werden.
  - Umstellen der Grundgleichung ergibt zunächst:

$$[K_{LL}][U_L] = [L_L] + \left(\Omega^2 [M_{LL}] - i\,\Omega [D_{LL}]\right)[U_L]$$

  - Werden die Trägheits- und Dämpfungskräfte mit den aus der modalen Reduktion gewonnenen Verschiebungen berechnet, können korrigierte Verschiebungen aus

$$[K_{LL}]\left[U_L^{pc}\right] = [L_L] + \left(\Omega^2 [M_{LL}] - i\,\Omega [D_{LL}]\right)\left[X^p\right][U]_p$$

berechnet werden.

3.3.2 Verbesserte modale Reduktion

- Die Methode der modalen Beschleunigungen wird im Englischen als *Mode Acceleration Method* oder *Force Summation Method* bezeichnet.
- Sie ist die Standardmethode zur Berechnung von instationären aeroelastischen Problemen.

3.4 Praktische Hinweise

- Netzfeinheit:
  - Die Vernetzung muss in der Lage sein, alle Eigenschwingungen, die für die modale Reduktion benötigt werden, gut zu approximieren.
- Frequenzraster:
  - Da sich die Antworten in der Nähe der Resonanzfrequenzen stark ändern, müssen sie in der Nähe der Resonanz für ausreichend viele Erregerfrequenzen berechnet werden.
  - Dazu sollten in der Halbwertsbreite jeder Resonanzfrequenz 5 bis 9 Erregerfrequenzen vorgegeben werden.

3.4 Praktische Hinweise

- Werden diese Erregerfrequenzen gleichmäßig über die Halbwertsbreite verteilt, stellt eine ungerade Anzahl sicher, dass die Resonanzfrequenz selbst auch als Erregerfrequenz auftritt.
- Das Verhalten zwischen den einzelnen Halbwertsbreiten kann durch ein überlagertes gleichmäßiges Raster von Erregerfrequenzen erfasst werden.
- In der Aeroelastik ändern sich die Eigenfrequenzen infolge der Strömung und sind deshalb nicht aus der Modalanalyse bekannt. Daher muss ein feineres Frequenzraster verwendet werden.