1. Transport-Theoreme

- Transport-Theoreme beschreiben die zeitliche Ableitung von Integralen über zeitabhängige Integrationsgebiete.
- Das *Reynolds-Transport-Theorem* beschreibt die zeitliche Ableitung des Integrals über ein mitschwimmendes Volumen, d. h. ein Volumen, dessen Berandung sich mit der Strömungsgeschwindigkeit bewegt. Es enthält daher zu jedem Zeitpunkt dieselbe Flüssigkeit.
- Mithilfe des Reynolds-Transport-Theorems lassen sich die Strömungsgleichungen aus den Erhaltungssätzen der Mechanik herleiten.

1. Transport-Theoreme

- Jacobi-Matrix:
  - Sei $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)$ eine umkehrbare differenzierbare Abbildung, die ein Gebiet $V_0 \subset \mathbb{R}^3$ auf ein Gebiet $V(t) \subset \mathbb{R}^3$ abbildet.
  - Ist $\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t))$ ein differenzierbares skalares Feld, dann gilt für den Gradienten:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x_{01}} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x_{02}} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x_{03}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial x_{01}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial x_{01}} & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_{01}} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial x_{02}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial x_{02}} & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_{02}} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial x_{03}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial x_{03}} & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_{03}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

1. Transport-Theoreme

- Mit der *Jacobi-Matrix*

$$[J]=\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{01}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{02}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_{03}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{03}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{03}} \end{bmatrix}$$

und dem *Nabla-Operator*

$$\boldsymbol{\nabla}=\boldsymbol{e_1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\boldsymbol{e_2}\frac{\partial}{\partial x_2}+\boldsymbol{e_3}\frac{\partial}{\partial x_3}$$

gilt: $[\boldsymbol{\nabla_0}\phi]=[J][\boldsymbol{\nabla}\phi]$

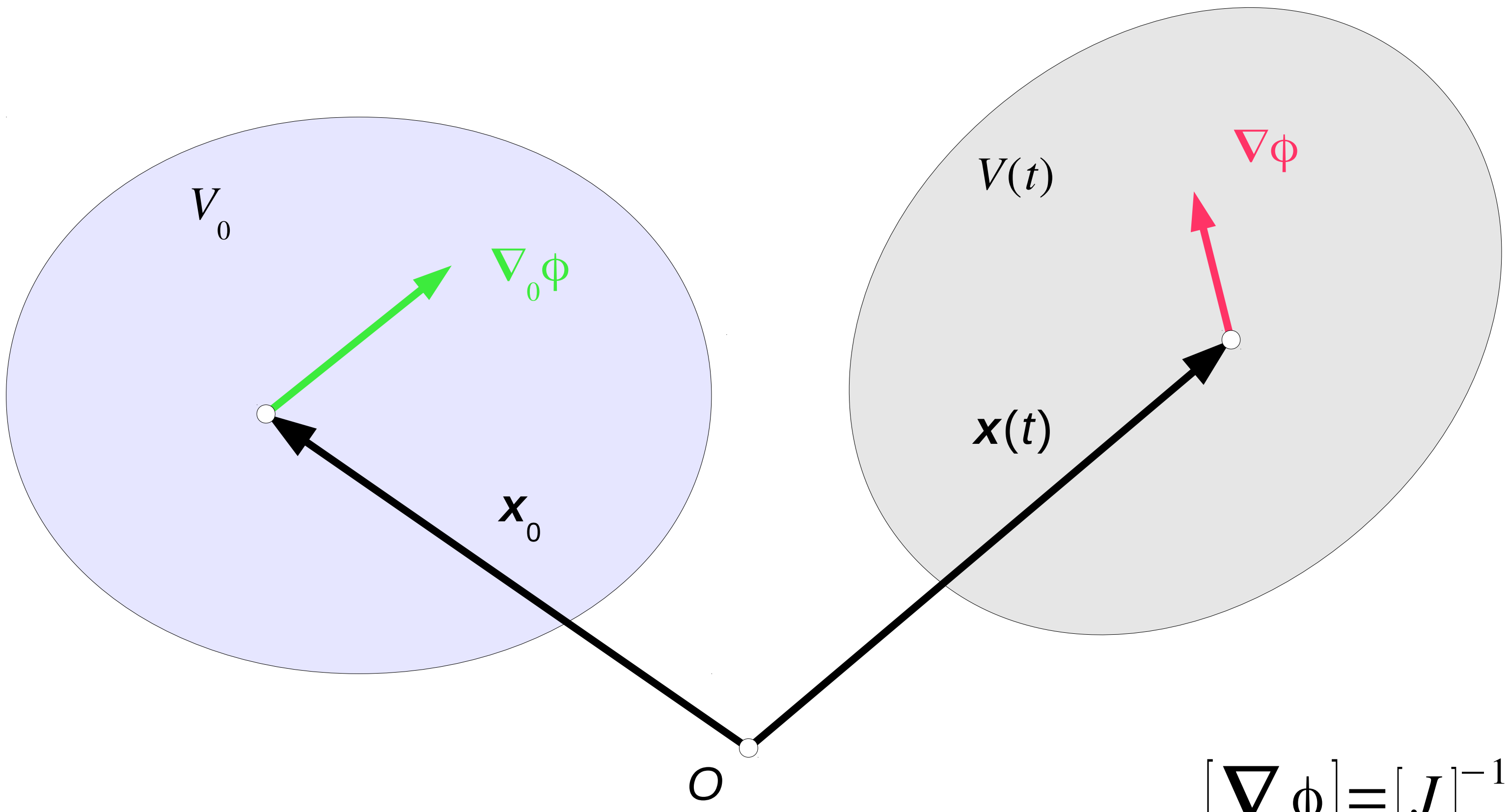
- Die Umkehrung ist

$$[\boldsymbol{\nabla}\phi]=[J]^{-1}[\boldsymbol{\nabla_0}\phi]$$

mit

$$[J]^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{\partial x_{01}}{\partial x_1} & \frac{\partial x_{02}}{\partial x_1} & \frac{\partial x_{03}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial x_{01}}{\partial x_2} & \frac{\partial x_{02}}{\partial x_2} & \frac{\partial x_{03}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial x_{01}}{\partial x_3} & \frac{\partial x_{02}}{\partial x_3} & \frac{\partial x_{03}}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

1. Transport-Theoreme



$$[\nabla\phi] = [J]^{-1}[\nabla_0\phi]$$

1. Transport-Theoreme

- Die inverse Matrix kann mithilfe der Determinante $J = \det([J])$ und der *algebraischen Komplemente* J_{mn} dargestellt werden:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} J_{11} & J_{21} & J_{31} \\ J_{12} & J_{22} & J_{32} \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} \end{bmatrix}$$

- Das algebraische Komplement J_{mn} ist die Determinante der Matrix, die durch Streichen der m-ten Zeile und der n-ten Spalte entsteht, multipliziert mit $(-1)^{n+m}$ (Vorzeichen nach der Schachbrettregel):

+	-	+
-	+	-
+	-	+

1. Transport-Theoreme

- Beispiele:

$$J_{11}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_2}{\partial x_{02}} & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_{02}}\\ \dfrac{\partial x_2}{\partial x_{03}} & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_{03}}\end{vmatrix},\quad J_{12}=-\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial x_{02}} & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_{02}}\\ \dfrac{\partial x_1}{\partial x_{03}} & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_{03}}\end{vmatrix}$$

$$J_{13}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial x_{02}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial x_{02}}\\ \dfrac{\partial x_1}{\partial x_{03}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial x_{03}}\end{vmatrix},\quad J_{21}=-\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_2}{\partial x_{01}} & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_{01}}\\ \dfrac{\partial x_2}{\partial x_{03}} & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_{03}}\end{vmatrix}$$

1. Transport-Theoreme

- Zeitableitung der Jacobi-Determinante:
  - Mit der Produktregel folgt aus der Regel von Sarrus:

$$\dot{J}=\begin{vmatrix}\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{01}}\\ \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{02}}\\ \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_{03}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{03}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{03}}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial x_{01}} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{01}}\\ \frac{\partial x_1}{\partial x_{02}} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{02}}\\ \frac{\partial x_1}{\partial x_{03}} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_{03}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{03}}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{01}} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_{01}}\\ \frac{\partial x_1}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{02}} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_{02}}\\ \frac{\partial x_1}{\partial x_{03}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{03}} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_{03}}\end{vmatrix}$$

1. Transport-Theoreme

- Entwickeln der einzelnen Determinanten jeweils nach der Spalte, die die Zeitableitung enthält, ergibt:

$$\dot{J} = \left(\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_{01}} J_{11} + \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_{02}} J_{21} + \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_{03}} J_{31} \right) + \left(\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_{01}} J_{12} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_{02}} J_{22} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_{03}} J_{32} \right)$$
$$+ \left(\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_{01}} J_{13} + \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_{02}} J_{23} + \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_{03}} J_{33} \right)$$

- Mit $J_{mn} = J \dfrac{\partial x_{0m}}{\partial x_n}$ folgt nach der Kettenregel:

$$\dot{J} = J \left(\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} \right) = J \, \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{x}} = J \operatorname{div}(\dot{\boldsymbol{x}})$$

1. Transport-Theoreme

- Reynolds-Transport-Theorem für skalare Felder:
  - Sei $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ ein skalares Feld und $V(t)$ ein mitschwimmendes Volumen, d. h. ein Volumen, dessen Berandung sich mit der Strömungsgeschwindigkeit bewegt.
  - Dann gilt:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \phi(\boldsymbol{x}, t)\, dV = \frac{d}{dt}\int_{V_0} \phi\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x_0}, t), t\big) J(t)\, dV_0$$

$$= \int_{V_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi\right) J\, dV_0 + \int_{V_0} \phi\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x_0}, t), t\big) \dot{J}\, dV_0$$

$$= \int_{V(t)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi + \phi\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}\right) dV$$

1. Transport-Theoreme

- Mit der Strömungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}}$ und

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot (\phi \boldsymbol{v})$$

folgt:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi(\boldsymbol{x}, t) \, dV = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \boldsymbol{v}) \right) dV}$$

- Reynolds-Transport-Theorem für Vektorfelder:
  - Sei $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t)$ ein Vektorfeld und $V(t)$ ein mitschwimmendes Volumen.

1. Transport-Theoreme

- Dann gilt:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)\,dV = \frac{d}{dt}\int_{V_0} \boldsymbol{w}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x_0},t),t\big)\,J(t)\,dV_0$$

$$= \int_{V_0}\left(\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + (\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{w}\right) J\,dV_0 + \int_{V_0} \boldsymbol{w}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x_0},t),t\big)\,\dot{J}\,dV_0$$

$$= \int_{V(t)}\left(\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + (\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}\right) dV$$

- Mit der Strömungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{x}}$ folgt:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)\,dV = \int_{V(t)}\left(\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right) dV}$$

1. Transport-Theoreme

- Transport-Theorem für Kurvenintegrale:
  - Sei $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t)$ ein Vektorfeld und $C(t)$ eine mitschwimmende Kurve, die die mitschwimmenden Punkte *A* und *B* verbindet.
  - Die Kurve wird beschrieben durch die zeitabhängige Abbildung

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s, t) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{x}(s_A, t) = \boldsymbol{x}_A(t), \quad \boldsymbol{x}(s_B, t) = \boldsymbol{x}_B(t) \quad \text{und} \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}.$$

  - Dann gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_{C(t)} \boldsymbol{w} \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{d}{dt} \int_{s_A}^{s_B} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}(s, t), t) \cdot \frac{d\boldsymbol{x}}{ds}(s, t)\, ds$$

$$= \int_{s_A}^{s_B} \left(\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + (\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \nabla) \boldsymbol{w} \right) \cdot \frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\, ds + \int_{s_A}^{s_B} \boldsymbol{w} \cdot \frac{d\dot{\boldsymbol{x}}}{ds}\, ds$$

1. Transport-Theoreme

- Damit ist gezeigt:

$$\frac{d}{dt}\int_{C(t)} \boldsymbol{w}\cdot d\,\boldsymbol{s} = \int_{C(t)} \left(\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{w} \right)\cdot d\,\boldsymbol{s} + \int_{s_A}^{s_B} \boldsymbol{w}\cdot\frac{d\,\boldsymbol{v}}{ds}\,ds$$

- Für $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$ gilt für das zweite Integral auf der rechten Seite:

$$\int_{s_A}^{s_B} \boldsymbol{v}\cdot\frac{d\,\boldsymbol{v}}{ds}\,ds = \frac{1}{2}\int_{s_A}^{s_B} \frac{d}{ds}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\,ds = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{B}}\cdot\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{A}})$$

- Für eine geschlossene Kurve ($A = B$) folgt daraus:

$$\frac{d}{dt}\oint \boldsymbol{v}\cdot d\,\boldsymbol{s} = \oint \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v} \right)\cdot d\,\boldsymbol{s}$$