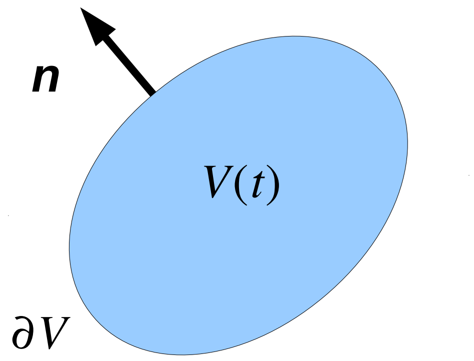
2. Euler-Gleichungen

- Die Euler-Gleichungen der Strömungsmechanik beschreiben die Strömung eines reibungsfreien Fluids.
- Sie können aus dem Impulssatz, der Massenerhaltung und dem Arbeitssatz gewonnen werden.
- Impulssatz:
  - Betrachtet wird ein mitschwimmendes Volumen $V(t)$.
  - Der Normalenvektor auf dem Rand $\partial V(t)$ zeigt aus dem betrachteten Volumen heraus.



2. Euler-Gleichungen

- Auf dem Rand des Volumens greift die Druckkraft an, die entgegen dem Normalenvektor gerichtet ist.
- Die Gewichtskraft hat keinen Einfluss auf die Strömung.
- Damit lautet der Impulssatz:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \boldsymbol{v}\, dV = -\int_{\partial V} p\, \boldsymbol{n}\, dS$$

- Mit dem Reynolds-Transport-Theorem für Vektorfelder und dem Integralsatz von Gauß folgt:

$$\int_{V(t)} \left(\frac{\partial(\rho \boldsymbol{v})}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)(\rho \boldsymbol{v}) + (\rho \boldsymbol{v})(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) \right) dV = -\int_{V(t)} \nabla p\, dV$$

2. Euler-Gleichungen

- Damit diese Gleichung für jedes mitschwimmende Volumen erfüllt ist, muss gelten:

$$\frac{\partial(\rho \boldsymbol{v})}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\rho\boldsymbol{v})+(\rho\boldsymbol{v})(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})=-\boldsymbol{\nabla}\,p$$

- Massenerhaltung:
  - Die Masse eines mitschwimmenden Volumens ändert sich nicht:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)}\rho\,dV=0$$

  - Mit dem Reynolds-Transport-Theorem für skalare Felder folgt:

$$\int_{V(t)}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})\right)dV=0$$

2. Euler-Gleichungen

- Damit diese Gleichung für jedes mitschwimmende Volumen erfüllt ist, muss gelten:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

- Diese Gleichung wird als *Kontinuitätsgleichung* bezeichnet.

• Kompressible Strömungen:

- Die Impulsgleichung und die Kontinuitätsgleichung reichen noch nicht aus, um die Strömungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, den Druck p und die Massendichte ρ zu berechnen.
- Zusätzliche Gleichungen folgen aus dem Arbeitssatz sowie der thermischen und der kalorischen Zustandsgleichung.

2. Euler-Gleichungen

- Inkompressible Strömungen:
  - Bei inkompressiblen Strömungen hat die Massendichte den konstanten Wert ρ_0, der als bekannt vorausgesetzt wird.
  - Strömungen können als imkompressibel betrachtet werden, wenn die Strömungsgeschwindigkeit klein im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit ist.
  - Inkompressible Strömungen werden durch die Impulsglei-chung und die Kontinuitätsgleichung vollständig beschrie-ben.
  - Die Kontinuitätsgleichung vereinfacht sich zu

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0}$$

2. Euler-Gleichungen

- Die Impulsgleichung vereinfacht sich zu

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla} p \, .$$

- Mit $2(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) - 2\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v})$

folgt:

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}{2}\right) - \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) = -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla} p}$$

2. Euler-Gleichungen

- Randbedingungen:
  - Auf dem Rand eines umströmten Körpers muss die Geschwindigkeit tangential zum Rand sein.
  - Ist $\boldsymbol{v}_S$ die Geschwindigkeit, mit der sich der Rand des umströmten Körpers bewegt, und $\boldsymbol{n}$ der Normalenvektor auf dem Rand, muss gelten:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}_S \cdot \boldsymbol{n}$$

  - Im Unendlichen muss die Strömungsgeschwindigkeit mit der Geschwindigkeit der ungestörten Anströmung übereinstimmen.