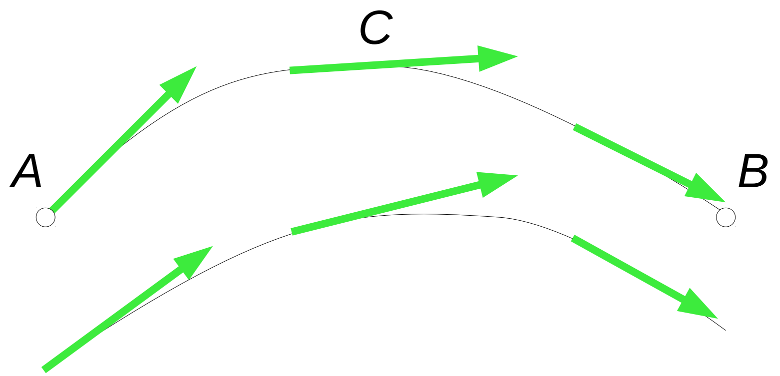
3. Bernoulli-Gleichung

- Für eine stationäre inkompressible Strömung kann die Impulsgleichung entlang einer Stromlinie integriert werden.

- Stromlinien:
  - Stromlinien sind Kurven, deren Tangente in jedem Punkt parallel zum Geschwindigkeitsvektor ist.



3. Bernoulli-Gleichung

- Integration der Impulsgleichung entlang einer Stromlinie:
  - Für eine stationäre Strömung lautet die Impulsgleichung:

$$\nabla\left(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2}\right)-\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})=-\frac{1}{\rho_0}\nabla p$$

  - Integration entlang einer Stromlinie ergibt zunächst:

$$\int_C \nabla\left(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2}\right)\cdot d\,\boldsymbol{s}-\int_C \left(\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})\right)\cdot d\,\boldsymbol{s}=-\frac{1}{\rho_0}\int_C \nabla\, p\cdot d\,\boldsymbol{s}$$

  - Wegen $\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v}) \perp \boldsymbol{v} \parallel d\,\boldsymbol{s}$ gilt:

$$\int_C \left(\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})\right)\cdot d\,\boldsymbol{s}=0$$

3. Bernoulli-Gleichung

- Damit bleibt:

$$0 = \int_C \nabla \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} + \frac{p}{\rho_0} \right) \cdot d\,\boldsymbol{s} = \frac{1}{2} \boldsymbol{v}_B \cdot \boldsymbol{v}_B + \frac{p_B}{\rho_0} - \frac{1}{2} \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{v}_A - \frac{p_A}{\rho_0}$$

- Daraus folgt die Bernoulli-Gleichung für zwei Punkte *A* und *B* auf der gleichen Stromlinie:

$$\frac{1}{2} \rho_0 v_B^2 + p_B = \frac{1}{2} \rho_0 v_A^2 + p_A$$

- Ist die ungestörte Strömung im Unendlichen eine Parallelströmung, dann gilt:

$$\boxed{\frac{1}{2} \rho_0 v_\infty^2 + p_\infty = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 + p \quad \text{bzw.} \quad q_\infty + p_\infty = q + p}$$