4. Wirbelsätze

- Wirbelvektor:
  - Der *Wirbelvektor* ist definiert durch

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}}$$

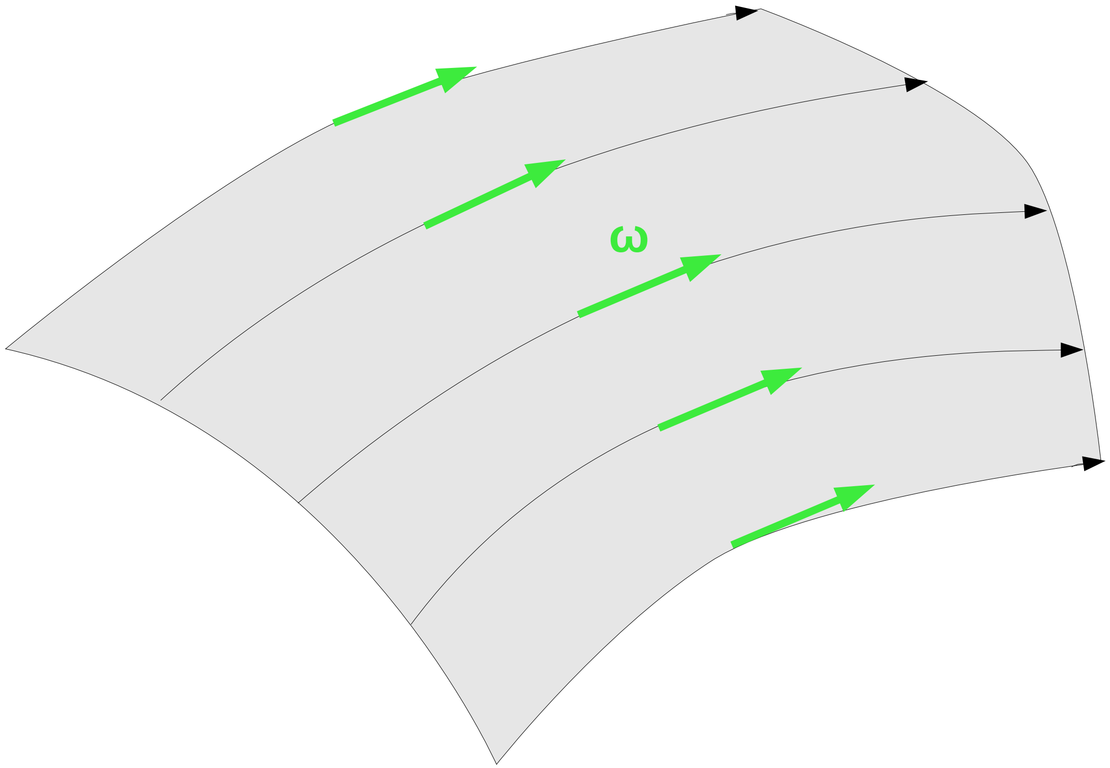
  - Er beschreibt die Drehung einer Strömung.
  - Aus der für jedes Vektorfeld $\boldsymbol{w}$ gültigen Beziehung $\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{w} \right) = 0$ folgt:

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0}$$

  - *Wirbellinien* sind Kurven, deren Tangente in jedem Punkt parallel zum Wirbelvektor ist.

4. Wirbelsätze

- Die Wirbellinien, die zu einem bestimmten Zeitpunkt durch eine Kurve gehen, bilden eine *Wirbelfläche*.



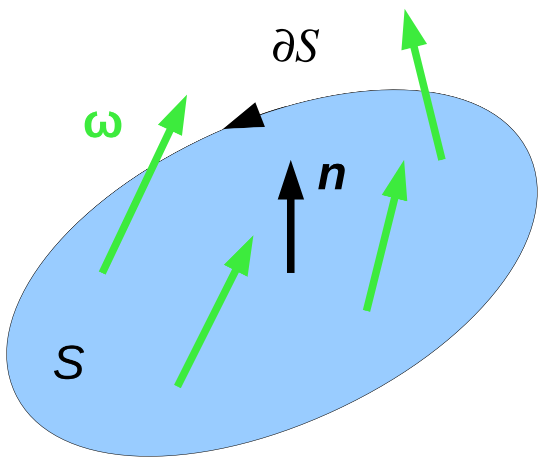
4. Wirbelsätze

- Zirkulation
  - Die *Zirkulation* ist definiert als Linienintegral der Geschwindigkeit längs einer geschlossenen Kurve:

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{v} \cdot d\,\boldsymbol{s}$$

  - Der Integralsatz von Stokes verknüpft die Zirkulation mit dem Wirbelvektor:

$$\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \oint_{\partial S} \boldsymbol{v} \cdot d\,\boldsymbol{s} = \Gamma$$



4. Wirbelsätze

- Wirbelsätze von Helmholtz:
  - Wegen $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$ für alle skalaren Felder ϕ folgt durch Bilden der Rotation aus der Impulsgleichung:

$$\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \nabla \times (\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v})) = \mathbf{0}$$

  - Damit gilt für den Wirbelvektor:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega})$$

  - Ist der Wirbelvektor in einem Gebiet null, so bleibt er dort für alle Zeiten null.

4. Wirbelsätze

- Mit $\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{v}(\nabla\cdot\boldsymbol{\omega})-\boldsymbol{\omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}$

  folgt wegen $\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}=0$:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$$

- Integration über ein mitschwimmendes Volumen ergibt:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)}\boldsymbol{\omega}\,dV=\int_{V(t)}(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\,dV$$

- Ist der Wirbelvektor in einem mitschwimmenden Volumen null, so bleibt er für alle Zeiten null.

4. Wirbelsätze

- Wirbelsatz von Kelvin:
  - Aus dem Transport-Theorem für Kurvenintegrale folgt für die zeitliche Änderung der Zirkulation über eine mitschwimmende geschlossene Kurve:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\oint_{C(t)} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s} = \oint_{C(t)} \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} \right)\cdot d\boldsymbol{s}$$

  - Mit der Impulsgleichung folgt:

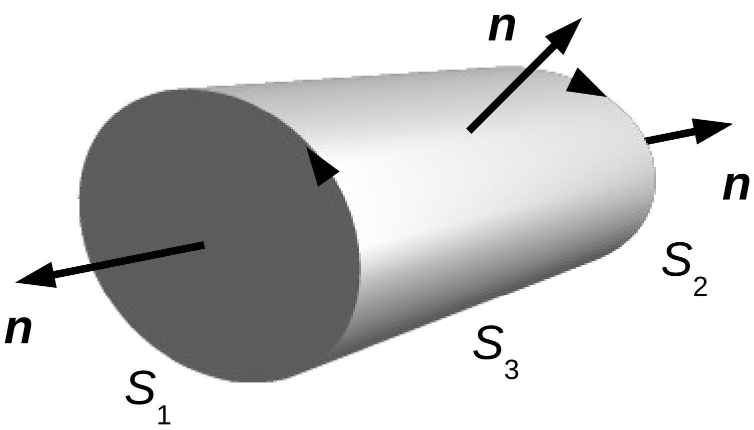
$$\oint_{C(t)} \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} \right)\cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{1}{\rho_0}\oint_{C(t)} \nabla p\cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

  - Damit ist gezeigt: $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$

4. Wirbelsätze

- Die Zirkulation über eine mitschwimmende geschlossene Kurve ist zeitlich konstant.

- Wirbelröhre:
  - Wirbellinien, die zu einem bestimmten Zeitpunkt durch eine geschlossene Kurve gehen, bilden eine *Wirbelröhre*.



4. Wirbelsätze

- Für ein Volumen V, das durch eine Fläche S_3 auf einer Wirbelröhre und zwei Flächen S_1 und S_2, die die Wirbelröhre schneiden, begrenzt wird, gilt:

$$0 = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \, dV = \int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} \, dS + \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} \, dS + \int_{S_3} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} \, dS$$

- Das Integral über S_3 ist null, da dort der Wirbelvektor senkrecht zum Normalenvektor ist.
- Mit $\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}$ auf S_1 und $\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{n}$ auf S_2 folgt:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n}_1 \, dS = \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n}_2 \, dS$$

4. Wirbelsätze

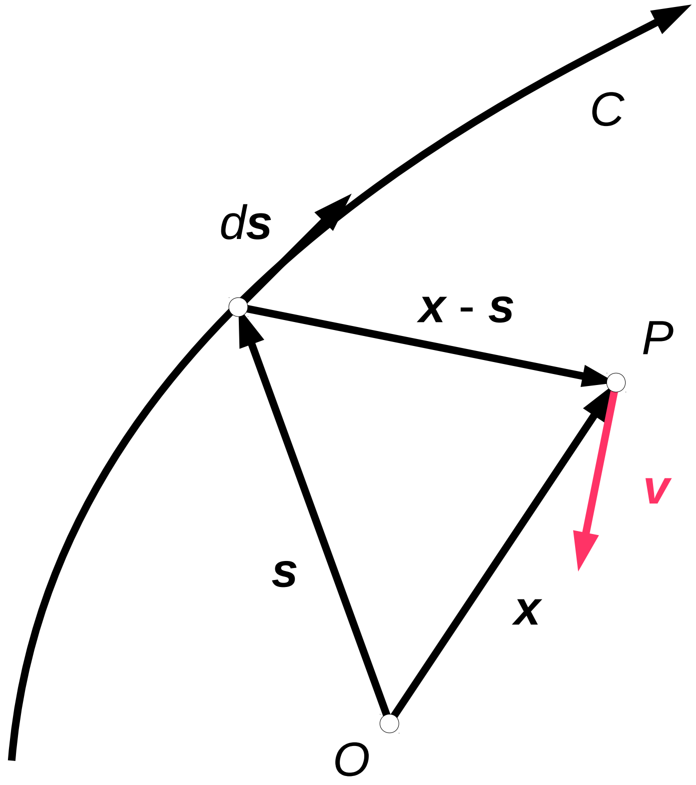
- Der Wirbelfluss durch jede Querschnittsfläche einer Wirbelröhre hat den gleichen Wert.
- Daraus folgt, dass Wirbelröhren im Inneren der Strömung weder beginnen noch enden können. Wirbelröhren bilden daher entweder geschlossene Kurven, oder sie sind unendlich lang.
- Ist C eine beliebige geschlossene Kurve auf der Wirbelröhre, die die Wirbelröhre umfasst, dann gilt:

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{v} \cdot d\,\boldsymbol{s} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n}\, dS\,, \quad C = \partial S$$

- Die Zirkulation über jede Kurve, die die Wirbelröhre umfasst, hat daher den gleichen Wert.

4. Wirbelsätze

- Wirbelfäden:
  - Wird eine Wirbelröhre auf eine Linie zusammengezogen, wobei der Betrag des Wirbelvektors gegen Unendlich geht, so dass die Zirkulation konstant bleibt, entsteht ein *Wirbelfaden*.
  - Die Zirkulation gibt die *Wirbelstärke* des Wirbelfadens an.



4. Wirbelsätze

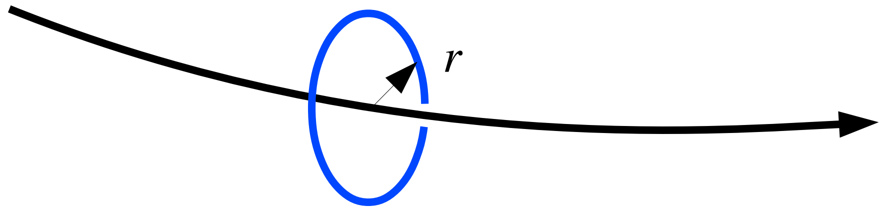
- Für die Geschwindigkeit, die ein Wirbelfaden im Punkt *P* induziert, gilt das *Gesetz von Biot und Savart* (siehe z. B. Karamcheti, Kap. 18.7):

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\Gamma}{4\pi}\int_C \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s})\times d\,\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s}|^3}$$

- Die Richtung des Geschwindigkeitsvektors ergibt sich nach der Rechthandregel, wobei der Daumen in Richtung des Wirbelfadens zeigt.

4. Wirbelsätze

- Freie und gebundene Wirbel:
  - Freie Wirbel befinden sich im Inneren des Strömungsfelds.
  - Gebundene Wirbel befinden sich auf dem Rand oder außerhalb des Strömungsfelds.
  - Für einen freien Wirbelfaden gilt: Zu jedem $R > 0$ gibt es einen geschlossenen, den Wirbelfaden umfassenden Kreis mit Radius $r < R$, der ganz im Strömungsfeld liegt.



4. Wirbelsätze

- Kinematik freier Wirbelfäden:
  - Nach dem Wirbelsatz von Kelvin ist die Zirkulation über eine mitschwimmende geschlossene Kurve konstant.
  - Daher muss jede geschlossene mitschwimmende Kurve, die den Wirbelfaden zu einem bestimmten Zeitpunkt umschließt, diesen zu jedem Zeitpunkt umschließen.
  - Daraus folgt:
    - In einer stationären Strömung muss ein freier Wirbelfaden mit einer Stromlinie der von ihm nicht beeinflussten Strömung übereinstimmen.
    - In einer instationären Strömung bewegt sich ein freier Wirbelfaden mit der von ihm nicht beeinflussten Strömung.