5. Potentialströmungen

- Aus den Wirbelsätzen folgt:
  - Ist der Wirbelvektor am Anfang überall null, so bleibt er immer null.
  - Eine solche Strömung heißt *wirbelfrei*.
- Geschwindigkeitspotential:
  - Für eine wirbelfreie Strömung gilt laut Voraussetzung:

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

  - Daraus folgt, dass sich der Strömungsvektor als Gradient eines *Geschwindigkeitspotentials* Φ darstellen lässt:

$$\boldsymbol{v} = \nabla \Phi$$

5. Potentialströmungen

- Eine Strömung, für die ein Geschwindigkeitspotential existiert, heißt *Potentialströmung*.
- Der Strömungsvektor und damit die Stromlinien sind senkrecht auf den Flächen $\Phi = \text{const.}$.
- Aus der Kontinuitätsgleichung folgt die Potentialgleichung:

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

- In kartesischen Koordinaten gilt: $$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$
- Aus der Impulsgleichung folgt:

$$\nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} + \frac{p}{\rho_0} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} + \frac{p}{\rho_0} = f(t)$$

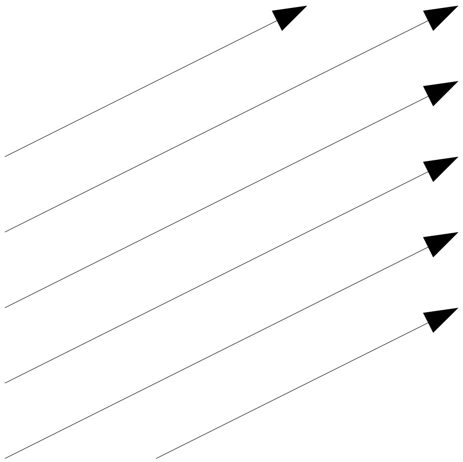
5. Potentialströmungen

- Diese instationäre Bernoulli-Gleichung wird auch als *Kelvin-Gleichung* bezeichnet.
- Die Funktion $f(t)$ wird durch die Randbedingungen fest-gelegt.

- Elementare Lösungen:
  - Translationsströmung:
    - Die konstante Strömung

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{v}_{\mathbf{0}}$$

ist wirbelfrei.

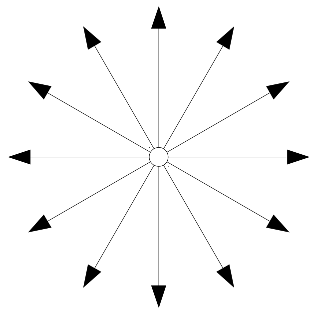


- Ihr Geschwindigkeitspotential ist

$$\Phi(\boldsymbol{x})=v_{0x}x+v_{0y}y+v_{0z}z=\boldsymbol{v}_{\mathbf{0}}\cdot\boldsymbol{x}\,.$$

5. Potentialströmungen

- Quellströmung:
  - Gegeben ist das kugelsymmetrische Strömungsfeld



$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})=\frac{Q}{4\pi}\frac{\boldsymbol{x}}{r^3}$$

  - Der Fluss durch eine Kugelfläche mit Radius r ist

$$\int_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\frac{Q}{4\pi}\int_S \frac{\boldsymbol{x}}{r^3}\cdot\frac{\boldsymbol{x}}{r}\,dS=\frac{Q}{4\pi r^2}\int_S dS=Q$$

  - Da der Fluss durch jede Kugelfläche den gleichen Wert hat, gilt überall außer im Ursprung:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$$

5. Potentialströmungen

- Mit $\nabla r = \dfrac{\boldsymbol{x}}{r}$ folgt

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \frac{Q}{4\pi r^2}\nabla r = -\nabla\left(\frac{Q}{4\pi r}\right) = \nabla\Phi(\boldsymbol{x})$$

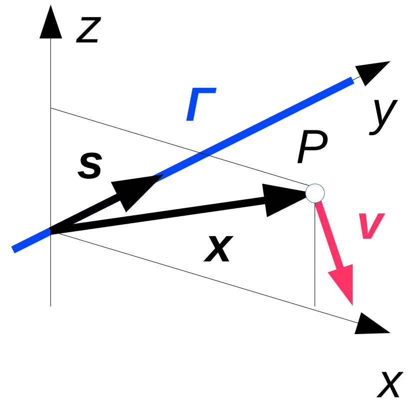
d. h. die Strömung hat das Potential $\Phi(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{Q}{4\pi r}$.

- Die Konstante Q gibt die *Quellstärke* an.
- Im ebenen Fall gilt:

$$\Phi(x, z) = \frac{Q}{2\pi}\ln\sqrt{x^2 + z^2}, \quad \boldsymbol{v}(x, z) = \frac{Q}{2\pi r^2}\boldsymbol{x}$$

5. Potentialströmungen

- Ebener Potentialwirbel:
  - Betrachtet wird ein Wirbelfaden entlang der *y*-Achse mit der Wirbelstärke Γ.
  - Mit $\boldsymbol{s} = s\boldsymbol{e}_y$, $d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{e}_y ds$, $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e}_x + z\boldsymbol{e}_z$ lautet das Gesetz von Biot-Savart:



$$\boldsymbol{v}(x,z) = -\frac{\Gamma}{4\pi}\int_C \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s})\times d\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s}|^3} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x\boldsymbol{e}_x + z\boldsymbol{e}_z - s\boldsymbol{e}_y)\times \boldsymbol{e}_y ds}{\sqrt{(x^2+z^2+s^2)^3}}$$

$$= -\frac{\Gamma}{4\pi}(x\boldsymbol{e}_z - z\boldsymbol{e}_x)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(x^2+z^2+s^2)^3}}$$

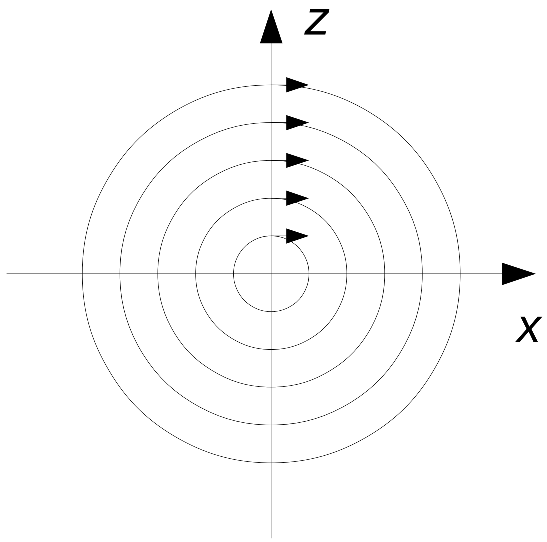
$$= \frac{\Gamma}{4\pi}(z\boldsymbol{e}_x - x\boldsymbol{e}_z)\left[\frac{s}{(x^2+z^2)\sqrt{x^2+z^2+s^2}}\right]_{s\to-\infty}^{s\to\infty} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{z\boldsymbol{e}_x - x\boldsymbol{e}_z}{x^2+z^2}$$

5. Potentialströmungen

- Damit gilt:

$$\boldsymbol{v}(x,z)=\frac{\Gamma}{2\pi r^2}\left(z\,\boldsymbol{e}_x - x\,\boldsymbol{e}_z\right) \text{ mit } r^2=x^2+z^2$$

$$v_x(x,z)=\frac{\Gamma}{2\pi r}\frac{z}{r}, \quad v_z(x,z)=-\frac{\Gamma}{2\pi r}\frac{x}{r}$$



- Das Geschwindigkeitsfeld hat das Potential

$$\Phi(x,z)=\frac{\Gamma}{2\pi}\arctan\left(\frac{x}{z}\right)$$

5. Potentialströmungen

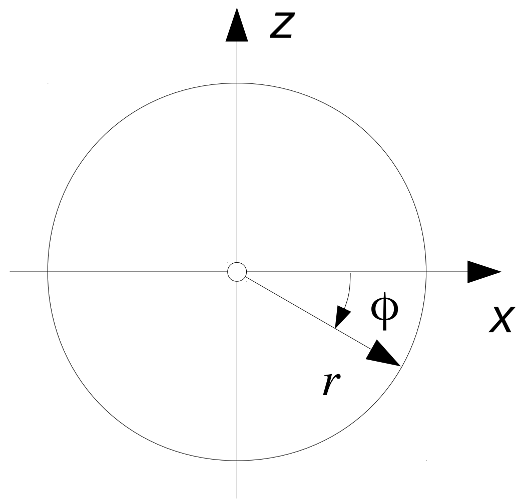
- Zirkulation entlang eines Kreises:

$$\boldsymbol{s} = r\cos(\phi)\boldsymbol{e}_x - r\sin(\phi)\boldsymbol{e}_z$$

$$d\boldsymbol{s} = \left(-r\sin(\phi)\boldsymbol{e}_x - r\cos(\phi)\boldsymbol{e}_z\right)d\phi$$
$$= \left(z\,\boldsymbol{e}_x - x\,\boldsymbol{e}_z\right)d\phi$$

$$\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s} = \frac{\Gamma}{2\pi r^2}\left(z^2 + x^2\right)d\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}d\phi$$

$$\oint \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s} = \frac{\Gamma}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi = \Gamma$$



- Die Zirkulation hat für alle Kurven, die die *y*-Achse umlaufen, den gleichen Wert.