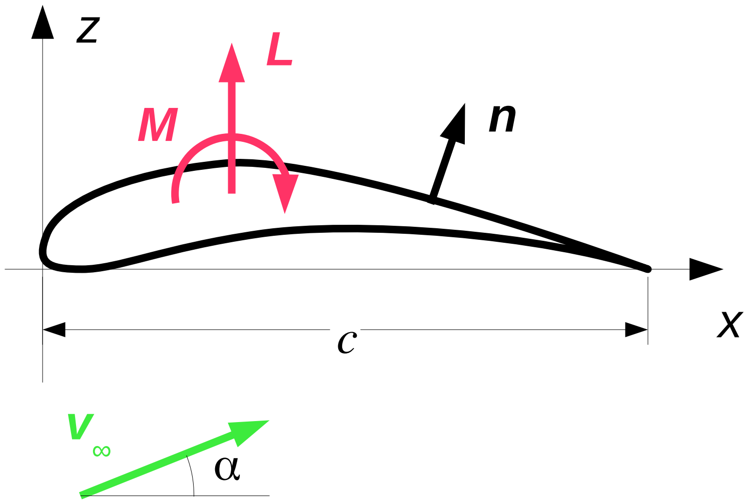
1. Profiltheorie

- In der Profiltheorie wird die Strömung um einen Tragflügel unendlicher Spannweite untersucht.
- Für die Aeroelastik genügt die Kenntnis des Auftriebs.
- Für die meisten Anwendungen ist die Theorie dünner Profile ausreichend, die auf lineare Gleichungen führt.

1. Profiltheorie

1.1 Aufgabenstellung

- Gegeben:
  - Geometrie des Profils:
    - oben: $z_p(x) = z_o(x)$
    - unten: $z_p(x) = z_u(x)$



  - Anströmgeschwindigkeit:

$$\boldsymbol{v}_\infty = v_\infty \left(\cos(\alpha)\, \boldsymbol{e}_x + \sin(\alpha)\, \boldsymbol{e}_z \right)$$

- Gesucht:
  - Potential der Strömung
  - Strömungsgeschwindig-keit
  - Druckverteilung
  - Auftrieb und Moment

1.1 Aufgabenstellung

- Gleichungen für das Potential:
  - Differenzialgleichung: $$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$
  - Randbedingungen:
    - Auf dem Profil: $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{n} \cdot \nabla \Phi = 0$
    - Im Unendlichen: $\boldsymbol{v} = \nabla \Phi = \boldsymbol{v}_\infty$ für $x \rightarrow -\infty$
  - Kutta-Bedingung:
    - An der Hinterkante ist die Strömungsgeschwindigkeit endlich und stetig.

1.1 Aufgabenstellung

- Störpotential und Geschwindigkeitsstörung:
  - Die Geschwindigkeit lässt sich in die Anströmgeschwindigkeit und die Geschwindigkeitsstörung aufspalten:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\infty + \boldsymbol{w}$$

  - Entsprechend setzt sich das Potential zusammen aus dem Potential der Anströmung und dem Störpotential:

$$\Phi = \Phi_\infty + \phi$$

  - Für das Potential der Anströmung gilt:

$$\Phi_\infty = \boldsymbol{v}_\infty \cdot \boldsymbol{x} = v_\infty \left(\cos(\alpha)\, x + \sin(\alpha)\, z \right)$$

1.1 Aufgabenstellung

- Gleichungen für das Störpotential:
  - Differenzialgleichung: $$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$
  - Randbedingungen:
    - Auf dem Profil: $\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{v}_\infty + \nabla \phi) = 0 \rightarrow \boldsymbol{n} \cdot \nabla \phi = -\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}_\infty$
    - Im Unendlichen: $\boldsymbol{w} = \nabla \phi = \boldsymbol{0}$ für $x \rightarrow -\infty$
  - Kutta-Bedingung:
    - An der Hinterkante ist die Geschwindigkeitsstörung endlich und stetig.

1.1 Aufgabenstellung

- Druckverteilung:
  - Der Druck folgt aus der Bernoulli-Gleichung:

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 \left(1 - \frac{v^2}{v_\infty^2}\right)$$

  - Mit

$$v^2 = (\boldsymbol{v}_\infty + \boldsymbol{w}) \cdot (\boldsymbol{v}_\infty + \boldsymbol{w}) = v_\infty^2 + 2\,\boldsymbol{v}_\infty \cdot \boldsymbol{w} + w^2$$

    folgt:

$$p = p_\infty - \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 \left(2\frac{\boldsymbol{v}_\infty \cdot \boldsymbol{w}}{v_\infty^2} + \frac{w^2}{v_\infty^2}\right)$$

1.2 Linearisierung

- Annahmen:
  - Anstellwinkel:
    - Der Anstellwinkel ist so klein, dass gilt: $\cos(\alpha) \approx 1, \quad \sin(\alpha) \approx \alpha$
    - Diese Näherung gilt für $\alpha < 10°$. Das ist auch die Grenze für die Gültigkeit der Potentialtheorie.
  - Geschwindigkeitsstörung:
    - Die Geschwindigkeitsstörung ist klein im Vergleich zur Anströmgeschwindigkeit: $w / v_\infty \ll 1$
    - Diese Annahme ist in den beiden Staupunkten und im Bereich der Profilnase verletzt. Dort hat die Geschwindigkeitsstörung die gleiche Größenordnung wie die Anströmgeschwindigkeit.

1.2 Linearisierung

- Geometrie:
  - Die Profilkoordinate z_p sowie die Profilsteigung dz_p/dx sind klein: $z_p/c \ll 1, \; dz_p/dx \ll 1$
  - Die Annahme für die Profilsteigung ist im Bereich der Profil-nase nicht erfüllt.

- Anströmgeschwindigkeit:
  - Für kleine Winkel hängt die Anströmgeschwindigkeit linear vom Anstellwinkel ab:

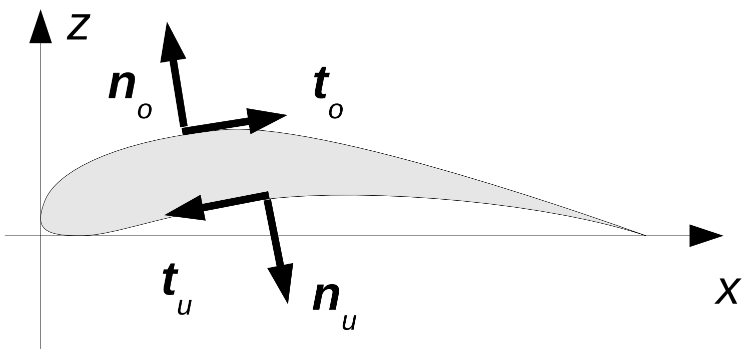
$$\boldsymbol{v}_\infty = v_\infty \left(\boldsymbol{e}_x + \alpha \, \boldsymbol{e}_z \right)$$

1.2 Linearisierung

- Randbedingungen:
  - Tangentenvektor:

$$\boldsymbol{t}_o = \boldsymbol{e}_x + \frac{dz_o}{dx}\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{t}_u = -\left(\boldsymbol{e}_x + \frac{dz_u}{dx}\boldsymbol{e}_z\right)$$



  - Nach außen zeigender Normalenvektor:

$$\boldsymbol{n}_o = -\frac{dz_o}{dx}\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{n}_u = \frac{dz_u}{dx}\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_z$$

  - Randbedingung auf der Oberseite:

$$\boldsymbol{n}_o \cdot \boldsymbol{w} = -\boldsymbol{n}_o \cdot \boldsymbol{v}_\infty$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{dz_0}{dx}w_x + w_z = -v_\infty\left(-\frac{dz_0}{dx} + \alpha\right)$$

1.2 Linearisierung

- Randbedingung auf der Unterseite:

$$\boldsymbol{n}_u \cdot \boldsymbol{w} = -\boldsymbol{n}_u \cdot \boldsymbol{v}_\infty \;\rightarrow\; \frac{dz_u}{dx} w_x - w_z = -v_\infty \left(\frac{dz_u}{dx} - \alpha \right)$$

- Der erste Term auf der linken Seite beider Gleichungen ist ein Produkt aus zwei kleinen Größen und wird daher vernachlässigt.
- Damit ergeben sich die linearisierten Randbedingungen

$$w_z(x, z_p(x)) = v_\infty \left(\frac{dz_p}{dx} - \alpha \right), \quad p = o, u, \quad 0 \le x \le c,$$

die für Punkte auf dem Profil erfüllt sein müssen.

1.2 Linearisierung

- Da z_p als klein vorausgesetzt wird, können die Randbedingungen auf die Profilsehne übertragen werden:

$$w_{oz}(x)=\lim_{z_p \downarrow 0} w_z(x, z_p)=v_\infty\left(\frac{dz_o}{dx}-\alpha\right), \quad 0 \le x \le c$$
$$w_{uz}(x)=\lim_{z_p \uparrow 0} w_z(x, z_p)=v_\infty\left(\frac{dz_u}{dx}-\alpha\right), \quad 0 \le x \le c$$

- Die Randbedingung im Unendlichen sowie die Kutta-Bedingung gelten unverändert.

1.2 Linearisierung

- Bernoulli-Gleichung:
  - Die Bernoulli-Gleichung lautet:

$$p = p_\infty - \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 \left(2 \frac{w_x}{v_\infty} + 2 \frac{w_z}{v_\infty} \alpha + \frac{w^2}{v_\infty^2} \right)$$

  - Die Vernachlässigung von Produkten kleiner Größen ergibt:

$$p \approx p_\infty - \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 \cdot 2 \frac{w_x}{v_\infty} = p_\infty - 2 \frac{w_x}{v_\infty} q_\infty$$

  - Für den *Druckbeiwert* folgt:

$$\boxed{c_P = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} = -2 \frac{w_x}{v_\infty}}$$

1.2 Linearisierung

- Superposition:
  - Die Linearisierung führt auf das folgende lineare mathematische Problem zur Bestimmung des Störpotentials:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad \boldsymbol{w} = \nabla \phi$$

$$w_{pz}(x) = v_\infty \left(\frac{dz_p}{dx} - \alpha \right), \quad p = o, u, \quad 0 \le x \le c$$

$\nabla \phi \rightarrow 0$ für $x \rightarrow -\infty$

$\nabla\phi$ ist an der Hinterkante stetig und endlich.

1.2 Linearisierung

- Für die Profilgeometrie gilt:

$$z_o = \frac{1}{2}\left(z_o + z_u\right) + \frac{1}{2}\left(z_o - z_u\right)$$
$$z_u = \frac{1}{2}\left(z_o + z_u\right) - \frac{1}{2}\left(z_o - z_u\right)$$

- Der erste Term beschreibt die *Skelettlinie*:

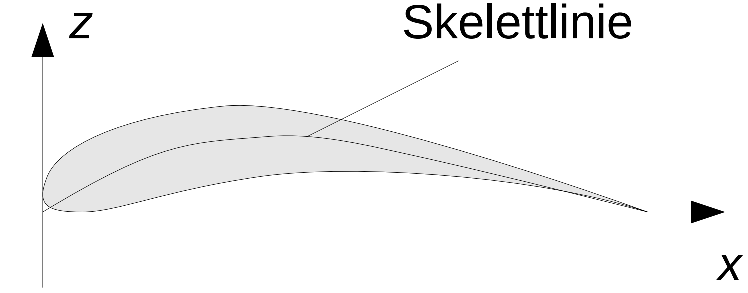
$$z_S = \frac{1}{2}\left(z_o + z_u\right)$$

- Der zweite Term beschreibt die Profildicke:

$$z_D = z_o - z_u$$

- Damit gilt:

$$z_o = z_S + \frac{z_D}{2}, \quad z_u = z_S - \frac{z_D}{2}$$



1.2 Linearisierung

- Für die Randbedingungen folgt:

$$w_{oz} = v_\infty \left(\frac{dz_S}{dx} - \alpha + \frac{1}{2} \frac{dz_D}{dx} \right), \quad w_{uz} = v_\infty \left(\frac{dz_S}{dx} - \alpha - \frac{1}{2} \frac{dz_D}{dx} \right), \quad 0 \le x \le c$$

- Das Störpotential lässt sich in zwei Bestandteile zerlegen:

$$\phi = \phi_D + \phi_S$$

- Randbedingungen für ϕ_D:

$$\left(\frac{\partial \phi_D}{\partial z} \right)_{o,u} = \pm \frac{1}{2} v_\infty \frac{dz_D}{dx}$$

- Randbedingung für ϕ_S:

$$\frac{\partial \phi_S}{\partial z} = v_\infty \left(\frac{dz_S}{dx} - \alpha \right)$$

1.2 Linearisierung

- Tropfentheorie:
  - Das Potential ϕ_D beschreibt die Strömung um ein symmetrisches Profil bei einer Anströmung entlang der *x*-Achse.
  - Da diese Strömung symmetrisch bezüglich der *x*-Achse ist, ist der Auftrieb null.
  - Die Berechnung dieses Potentials wird als Tropfentheorie bezeichnet.
  - Sie wird benötigt, wenn die Grenzschicht und der Widerstand des Profils bestimmt werden sollen.

1.2 Linearisierung

- Skelett-Theorie:
  - Das Potential ϕ_S beschreibt die Strömung um die Skelettlinie, wenn die Anströmgeschwindigkeit den Anstellwinkel α hat.
  - Die Berechnung dieses Potentials wird als Skelett-Theorie bezeichnet.
  - Die Skelett-Theorie liefert die in der Aeroelastik benötigten Größen Auftrieb und Moment.

1.3 Skelett-Theorie

- Aufgabenstellung:
  - Gesucht ist die Lösung des folgenden Randwertproblems:

Differenzialgleichung : $$\frac{\partial^2 \phi_S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_S}{\partial z^2} = 0, \quad \boldsymbol{w} = \nabla \phi_S$$

Randbedingung: $$w_z(x) = v_\infty \left(\frac{dz_S}{dx} - \alpha \right), \quad 0 \le x \le c$$

$$\nabla \phi_S \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad x \rightarrow -\infty$$

Kutta-Bedigung: $\nabla \phi_S$ ist an der Hinterkante stetig und endlich.

1.3 Skelett-Theorie

- Aus der Lösung können Auftrieb und Moment berechnet werden.

- Ansatz:
  - Aus der Randbedingung folgt, dass die Geschwindigkeitskomponente w_z auf der Ober- und Unterseite der Skelettlinie gleich ist.
  - Damit die Strömung eine resultierende Kraft auf die Skelettlinie ausübt, muss der Druck auf der Ober- und der Unterseite verschieden sein.
  - Aus der linearisierten Bernoulli-Gleichung folgt daher, dass die Geschwindigkeitskomponente w_x auf der Ober- und Unterseite unterschiedlich sein muss.

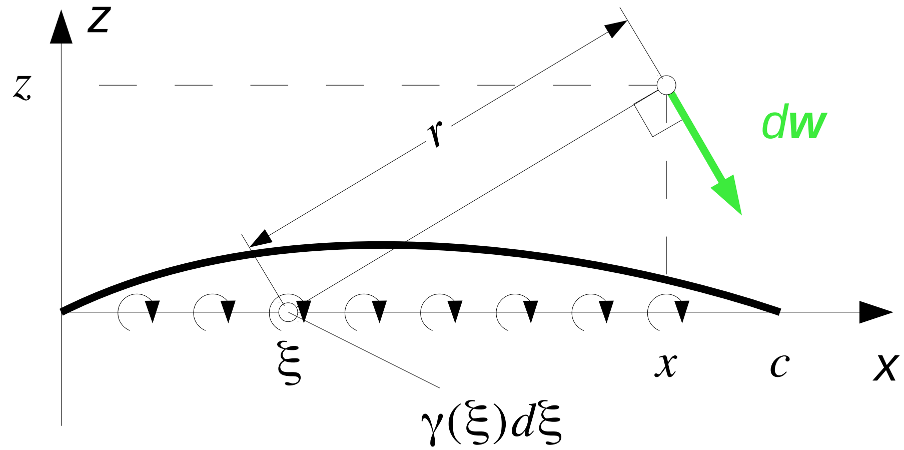
1.3 Skelett-Theorie

- Diese Überlegungen legen einen Lösungsansatz mithilfe einer Wirbelverteilung entlang der Profilsehne nahe.
- Für den Beitrag eines Wirbelelements zur Geschwindigkeit gilt:

$$dw_x = \frac{\gamma(\xi)\, d\xi}{2\pi r} \frac{z}{r}$$

$$dw_z = -\frac{\gamma(\xi)\, d\xi}{2\pi r} \frac{x-\xi}{r}$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + z^2}$$



1.3 Skelett-Theorie

- Für die gesamte Geschwindigkeit folgt:

$$w_x(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^c \frac{\gamma(\xi)\, z\, d\xi}{(x-\xi)^2+z^2}, \quad w_z(x,z)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^c \frac{\gamma(\xi)(x-\xi)\, d\xi}{(x-\xi)^2+z^2}$$

- Ermittlung der Wirbelverteilung:
  - Die Randbedingung auf der Skelettlinie lautet:

$$w_z(x,0)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^c \frac{\gamma(\xi)\, d\xi}{x-\xi}=v_\infty\left(\frac{dz_S}{dx}-\alpha\right)$$

  - Die Kutta-Bedingung verlangt: $\gamma(c)=0$
  - Es lässt sich zeigen, dass durch die Kutta-Bedingung die Lösung dieser Integralgleichung eindeutig festgelegt wird.

1.3 Skelett-Theorie

- Das Integral ist im Sinne des Cauchy-Hauptwerts zu verstehen:

$$\int_0^c \frac{\gamma(\xi)\,d\xi}{x-\xi} = \lim_{\epsilon \to 0}\left(\int_0^{x-\epsilon} \frac{\gamma(\xi)\,d\xi}{x-\xi} + \int_{x+\epsilon}^c \frac{\gamma(\xi)\,d\xi}{x-\xi}\right)$$

- Die Substitution $x = \frac{c}{2}\left(1+\cos(\theta)\right), \quad \xi = \frac{c}{2}\left(1+\cos(\phi)\right)$

$$d\xi = -\frac{c}{2}\sin(\phi)\,d\phi$$

führt auf:

$$\int_0^c \frac{\gamma(\xi)\,d\xi}{x-\xi} = -\int_\pi^0 \frac{\gamma(\phi)\sin(\phi)\,d\phi}{\cos(\theta)-\cos(\phi)} = -\int_0^\pi \frac{\gamma(\phi)\sin(\phi)\,d\phi}{\cos(\phi)-\cos(\theta)}$$

1.3 Skelett-Theorie

- Damit lautet die Integralgleichung:

$$\frac{1}{2\pi v_\infty}\int_0^\pi \frac{\gamma(\phi)\sin(\phi)\,d\phi}{\cos(\phi)-\cos(\theta)}=\frac{dz_S}{dx}(\theta)-\alpha$$

- Einsetzen des Lösungsansatzes (Glauert, 1929)

$$\gamma(\phi)=-2v_\infty\left(\left(\frac{G_0}{2}-\alpha\right)\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty} G_n\sin(n\phi)\right)$$

ergibt: $$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{G_0}{2}-\alpha\right)\int_0^\pi \frac{\tan(\phi/2)\sin(\phi)\,d\phi}{\cos(\phi)-\cos(\theta)}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} G_n\int_0^\pi \frac{\sin(n\phi)\sin(\phi)\,d\phi}{\cos(\phi)-\cos(\theta)}=\frac{dz_S}{dx}(\theta)-\alpha$$

1.3 Skelett-Theorie

- Mit $\tan(\phi/2)\sin(\phi)=1-\cos(\phi)$

  sowie (siehe z. B. Karamcheti, Anhang E, oder Moran, Anhang A)

  $$\int_0^\pi \frac{\cos(n\phi)\,d\phi}{\cos(\phi)-\cos(\theta)}=\pi\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)},\quad \int_0^\pi \frac{\sin(n\phi)\sin(\phi)\,d\phi}{\cos(\phi)-\cos(\theta)}=-\pi\cos(n\theta)$$

  folgt: $$\frac{G_0}{2}-\alpha+\sum_{n=1}^{\infty} G_n\cos(n\theta)=\frac{dz_S}{dx}(\theta)-\alpha$$

- Daraus folgt für die Koeffizienten der Wirbelbelegung:

  $$G_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{dz_S}{dx}(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta,\quad n=0,1,2,\ldots$$

1.3 Skelett-Theorie

- Die Birnbaum-Ackermannschen Normalverteilungen:
  - 1. Normalverteilung:
    - Für die angestellte ebene Platte gilt:

$$\frac{dz_S}{dx}=0 \;\rightarrow\; G_n=0\,,\quad n=0,1,2,\dots$$

    - Damit gilt für die Wirbelbelegung: $\gamma_1(\theta)=2\,v_\infty\,\alpha\tan(\theta/2)$
    - Mit $\cos(\theta)=2\,x/c-1$

$$\sin(\theta)=\sqrt{1-(2\,x/c-1)^2}=2\sqrt{(x/c)(1-x/c)}$$

$$\tan(\theta/2)=\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}=\frac{2-2\,x/c}{2\sqrt{(x/c)(1-x/c)}}=\sqrt{\frac{1-x/c}{x/c}}$$

folgt: $\gamma_1(x)=2\,v_\infty\,\alpha\sqrt{\dfrac{1-x/c}{x/c}}$

1.3 Skelett-Theorie

- 2. Normalverteilung:
  - Nur G_1 ist von null verschieden:

$$\frac{dz_S}{dx}(\theta)=G_1\cos(\theta) \;\rightarrow\; \frac{dz_S}{dx}(x)=G_1\left(2\frac{x}{c}-1\right)$$

$$z_S(x)=G_1 c\left(\frac{x^2}{c^2}-\frac{x}{c}\right)=G_1 c\frac{x}{c}\left(\frac{x}{c}-1\right)$$

  - Die Skelettlinie ist eine quadratische Parabel.
  - Der größte Wert tritt in der Mitte auf:

$$h=z_S\left(\frac{c}{2}\right)=-\frac{1}{4}G_1 c \;\rightarrow\; G_1=-4\frac{h}{c} \;\rightarrow\; z_S(x)=4h\frac{x}{c}\left(1-\frac{x}{c}\right)$$

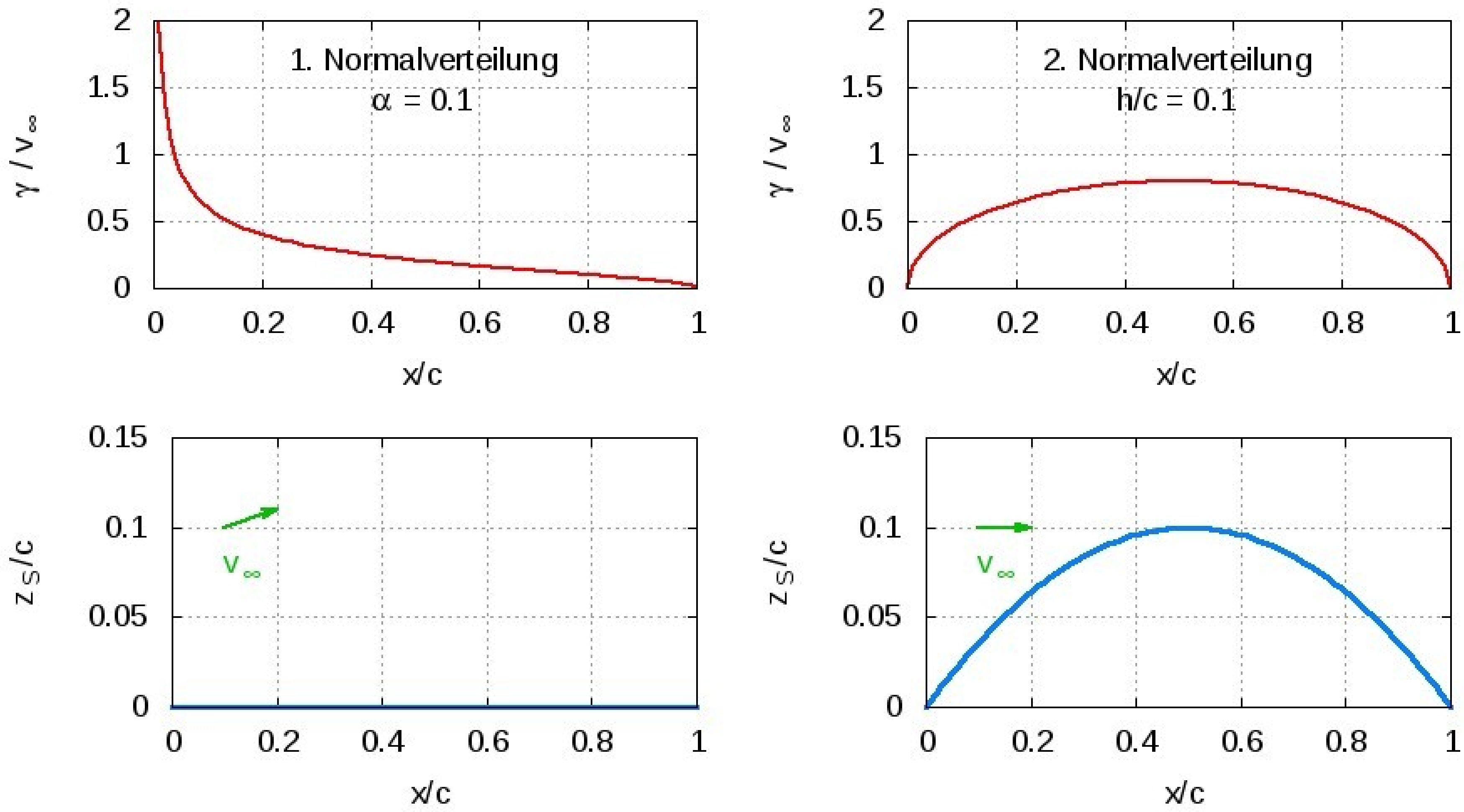
1.3 Skelett-Theorie

- Für die Wirbelverteilung gilt:

$$\gamma_2(\theta) = -2\, v_\infty G_1 \sin(\theta) = 8\, v_\infty \frac{h}{c} \sin(\theta)$$

$$\gamma_2(x) = 16\, v_\infty \frac{h}{c} \sqrt{\frac{x}{c}\left(1 - \frac{x}{c}\right)}$$

1.3 Skelett-Theorie



1.3 Skelett-Theorie

- Ermittlung der Druckverteilung:
  - Aus der linearisierten Bernoulli-Gleichung folgt für die Differenz der Druckbeiwerte auf der Ober- und Unterseite:

$$\Delta c_p = c_{pu} - c_{po} = -2\frac{w_{ux} - w_{ox}}{v_\infty} = 2\frac{w_{ox} - w_{ux}}{v_\infty}$$

  - Die Geschwindigkeiten auf der Ober- und Unterseite ergeben sich als Grenzübergang von oben und unten an den Wert $z = 0$:

$$w_{ox}(x) = \lim_{z \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi) z \, d\xi}{(x-\xi)^2 + z^2}, \quad w_{ux}(x) = \lim_{z \uparrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi) z \, d\xi}{(x-\xi)^2 + z^2}$$

1.3 Skelett-Theorie

- Zur Berechnung wird das Integrationsintervall in drei Bereiche unterteilt:

$$\int_0^c \frac{\gamma(\xi) z\, d\xi}{(x-\xi)^2+z^2} = \int_0^{x-\varepsilon} \frac{\gamma(\xi) z\, d\xi}{(x-\xi)^2+z^2} + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{\gamma(\xi) z\, d\xi}{(x-\xi)^2+z^2} + \int_{x+\varepsilon}^{c} \frac{\gamma(\xi) z\, d\xi}{(x-\xi)^2+z^2}$$

- Der Integrand des ersten und des dritten Integrals ist im gesamten Integrationsintervall stetig und nimmt für $z=0$ den Wert null an. Diese beiden Integrale haben daher für $z=0$ den Wert null.

- Für das zweite Integral gilt zunächst:

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{\gamma(\xi) z\, d\xi}{(x-\xi)^2+z^2} = \gamma(x) \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{z\, d\xi}{(x-\xi)^2+z^2} + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{(\gamma(\xi)-\gamma(x)) z\, d\xi}{(x-\xi)^2+z^2}$$

1.3 Skelett-Theorie

- Mit der Substitution $u = x - \xi$, $du = -d\xi$ lässt sich das erste Integral berechnen:

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{z\,d\xi}{(x-\xi)^2+z^2} = z \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{du}{u^2+z^2} = z\left[\frac{1}{z}\arctan\left(\frac{u}{z}\right)\right]_{u=-\varepsilon}^{u=\varepsilon} = 2\arctan\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)$$

- Für die Grenzwerte gilt:

$$\lim_{z\downarrow 0} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{z\,d\xi}{(x-\xi)^2+z^2} = 2\lim_{z\downarrow 0}\arctan\left(\frac{\varepsilon}{z}\right) = \pi\,, \quad \lim_{z\uparrow 0} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{z\,d\xi}{(x-\xi)^2+z^2} = -\pi$$

- Da $\gamma(x)$ differenzierbar ist, gibt es eine positive Konstante C, so dass gilt:

$$\left|\gamma(\xi)-\gamma(x)\right| \le C\left|\xi - x\right| \le C\,\varepsilon$$

1.3 Skelett-Theorie

- Damit folgt: $$\left|\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{\left(\gamma(\xi)-\gamma(x)\right) z\, d\xi}{(x-\xi)^2+z^2}\right| \le \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{\left|\gamma(\xi)-\gamma(x)\right| |z|\, d\xi}{(x-\xi)^2+z^2}$$
$$\le C\,\varepsilon \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{|z|\, d\xi}{(x-\xi)^2+z^2}$$

- Für den Grenzwert gilt: $$\lim_{z\to 0}\left|\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{\left(\gamma(\xi)-\gamma(x)\right) z\, d\xi}{(x-\xi)^2+z^2}\right| \le C\,\varepsilon\,\pi$$

- Für ε gegen null geht dieser Grenzwert gegen null.

1.3 Skelett-Theorie

- Damit ist gezeigt:

$$w_{ox}(x) = \lim_{z \downarrow 0} w_x(x,z) = \frac{1}{2}\gamma(x), \quad w_{ux}(x) = \lim_{z \uparrow 0} w_x(x,z) = -\frac{1}{2}\gamma(x)$$

$$w_{ox}(x) - w_{ux}(x) = \gamma(x)$$

- Für die Differenz der Druckbeiwerte folgt:

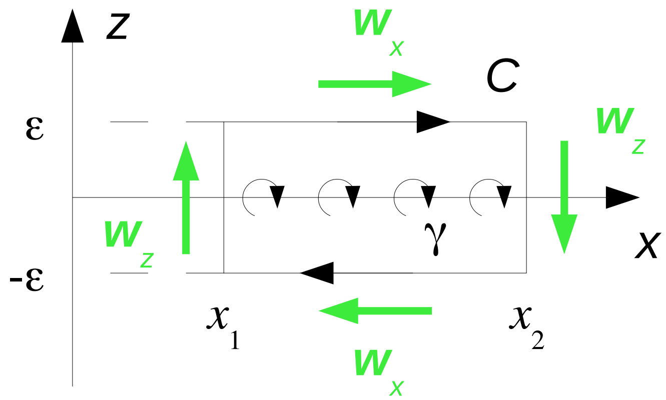
$$\boxed{\Delta c_P(x) = 2\frac{\gamma(x)}{v_\infty}}$$

- Die Druckverteilung ist proportional zur Wirbelverteilung.

1.3 Skelett-Theorie

- Alternative Ermittlung der Druckverteilung:
  - Aus

$$w_x(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^c \frac{\gamma(\xi)\, z\, d\xi}{(x-\xi)^2+z^2}$$



folgt: $w_x(x,-z)=-w_x(x,z)$

  - Für die Zirkulation über den rechteckigen Weg *C* gilt:

$$\Gamma=\oint_C \boldsymbol{w}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_{x_1}^{x_2}\gamma(x)\,dx$$

1.3 Skelett-Theorie

- Das Wegintegral berechnet sich zu

$$\oint_C \boldsymbol{w}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{x_1}^{x_2} w_x(x,\varepsilon)\,dx + \int_{\varepsilon}^{-\varepsilon} w_z(x_2,z)\,dz$$

$$+\int_{x_2}^{x_1} w_x(x,-\varepsilon)\,dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} w_z(x_1,z)\,dz$$

$$= 2\int_{x_1}^{x_2} w_x(x,\varepsilon)\,dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \big(w_z(x_1,z)-w_z(x_2,z)\big)\,dz$$

- Da w_z bei $z=0$ stetig ist, gilt für den Grenzwert:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_C \boldsymbol{w}\cdot d\boldsymbol{s} = 2\int_{x_1}^{x_2} w_{ox}(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \gamma(x)\,dx$$

1.3 Skelett-Theorie

- Daraus folgt

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(2 w_{ox}(x) - \gamma(x)\right) dx = 0$$

unabhängig von den Integralgrenzen x_1 und x_2.

- Also gilt:

$$w_{ox}(x) = \frac{1}{2}\gamma(x), \quad w_{ux}(x) = -w_{ox}(x) = -\frac{1}{2}\gamma(x)$$

$$\rightarrow \quad \Delta c_P(x) = 2\frac{\gamma(x)}{v_\infty}$$

1.3 Skelett-Theorie

- Auftrieb und Moment:
  - Für den Auftrieb eines Streifens der Länge Δy gilt:

$$L = q_\infty \Delta y \int_0^c \Delta c_P(x)\,dx$$

$$= \rho v_\infty \Delta y \int_0^c \gamma(x)\,dx$$

  - Mit der Zirkulation

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(x)\,dx$$

folgt der *Satz von Kutta-Joukowsky*:

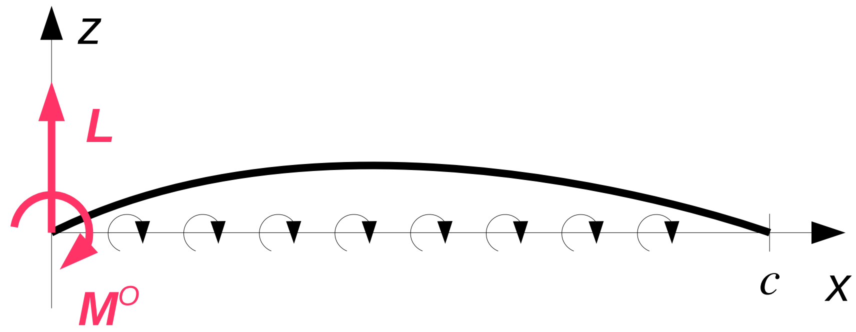
$$\boxed{L = \rho v_\infty \Delta y\, \Gamma}$$

  - Mit funktionentheoretischen Methoden lässt sich der Satz von Kutta-Joukowsky auch ohne Linearisierung der Gleichungen herleiten.

1.3 Skelett-Theorie

- Für den Auftriebsbeiwert folgt:

$$c_L = \frac{L}{q_\infty \Delta y\, c} = \frac{2\Gamma}{v_\infty c}$$



- Das Moment um die Flügelvorderkante berechnet sich zu

$$M^O = -q_\infty \Delta y \int_0^c x\, \Delta c_P(x)\, dx = -\rho\, v_\infty \Delta y \int_0^c x\, \gamma(x)\, dx$$

- Für den Momentenbeiwert folgt:

$$c_{M^O} = \frac{M^O}{q_\infty \Delta y\, c^2} = -\frac{2}{v_\infty c^2} \int_0^c x\, \gamma(x)\, dx$$

1.3 Skelett-Theorie

- Berechnung der Beiwerte:
  - Mit $x=\frac{c}{2}\left(1+\cos(\theta)\right),\quad dx=-\frac{c}{2}\sin(\theta)\,d\theta$ folgt:

$$c_L=\frac{1}{v_\infty}\int_0^\pi \gamma(\theta)\sin(\theta)\,d\theta,\quad c_{M^o}=-\frac{1}{2v_\infty}\int_0^\pi \left(1+\cos(\theta)\right)\gamma(\theta)\sin(\theta)\,d\theta$$

  - Mit der Wirbelverteilung

$$\gamma(\theta)=-2v_\infty\left(\left(\frac{G_0}{2}-\alpha\right)\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}+\sum_{n=1}^{\infty}G_n\sin(n\theta)\right)$$

folgt

$$\int_0^\pi \gamma(\theta)\sin(\theta)\,d\theta=-2v_\infty\left(\left(\frac{G_0}{2}-\alpha\right)\int_0^\pi d\theta+G_1\int_0^\pi \sin^2(\theta)\,d\theta\right)$$

1.3 Skelett-Theorie

und

$$\int_0^{\pi}\left(1+\cos(\theta)\right)\gamma(\theta)\sin(\theta)\,d\theta=-2v_\infty\left(\frac{G_0}{2}-\alpha\right)\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2(\theta)\right)d\theta$$
$$-2v_\infty\left(G_1\int_0^{\pi}\sin^2(\theta)\,d\theta+G_2\int_0^{\pi}\sin(2\theta)\cos(\theta)\sin(\theta)\,d\theta\right)$$

- Die Integrale für alle übrigen Koeffizienten sind null.
- Die Integrale berechnen sich zu

$$\int_0^{\pi}d\theta=\pi,\quad \int_0^{\pi}\sin(2\theta)\cos(\theta)\sin(\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^2(2\theta)\,d\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2(\theta)\right)d\theta=\int_0^{\pi}\sin^2(\theta)\,d\theta=\frac{\pi}{2}$$

1.3 Skelett-Theorie

- Damit gilt für die Beiwerte:

$$c_L = -2\left(\left(\frac{G_0}{2}-\alpha\right)\pi + \frac{\pi}{2}G_1\right) = 2\pi\left(\alpha - \frac{1}{2}(G_0+G_1)\right)$$

$$c_{M^o} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{G_0}{2}-\alpha\right) + \frac{\pi}{2}G_1 + \frac{\pi}{4}G_2 = \frac{\pi}{4}(G_0+G_1) - \frac{\pi}{2}\alpha + \frac{\pi}{4}(G_1+G_2)$$

$$= -\frac{c_L}{4} + \frac{\pi}{4}(G_1+G_2)$$

- Mit dem *Nullauftriebswinkel* $\alpha_0 = \frac{1}{2}(G_0+G_1)$

  gilt für den Auftriebsbeiwert: $c_L = 2\pi(\alpha-\alpha_0)$

1.3 Skelett-Theorie

- Wird das Moment bezüglich der Stelle $x = c/4$ berechnet, hängt der Momentenbeiwert nicht vom Auftriebsbeiwert ab:

$$c_{M_0} = \frac{\pi}{4}\left(G_1 + G_2\right)$$

- Dieser Beiwert wird als *Nullmomentenbeiwert* bezeichnet. Er beschreibt das Moment, das auftritt, wenn der Auftrieb null ist.
- Der *Neutralpunkt* des Profils, d. h. der Punkt, bezüglich dem

$$\frac{dc_M}{dc_L} = 0$$

  gilt, liegt an der Stelle $x = c/4$.

1.3 Skelett-Theorie

- Zusammenfassung:

Auftriebsbeiwert: $c_L = 2\pi(\alpha - \alpha_0)$

Nullauftriebswinkel: $\alpha_0 = \frac{1}{2}(G_0 + G_1)$

Nullmomentenbeiwert: $c_{M_0} = \frac{\pi}{4}(G_1 + G_2)$

Koeffizienten: $G_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{dz_S}{dx}(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta$

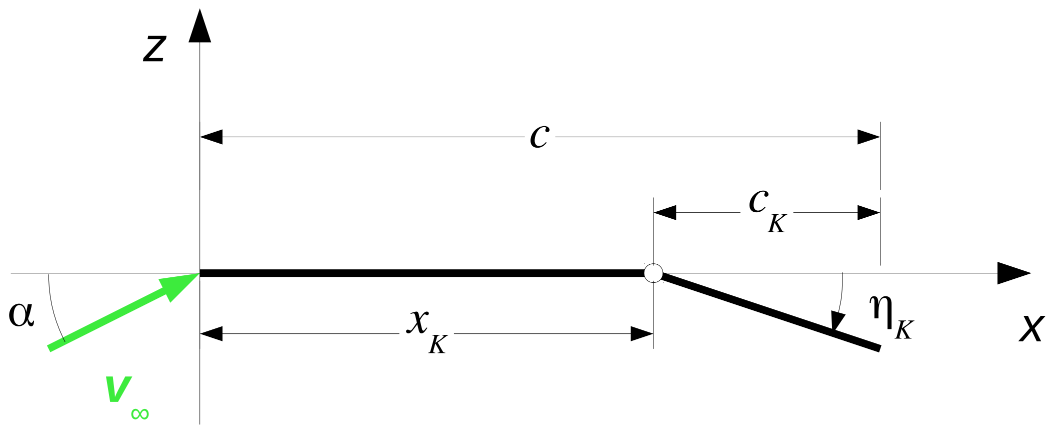
Neutralpunkt liegt im Viertelpunkt: $x_N = c/4$

1.3 Skelett-Theorie

- Beispiel: Flügel mit Klappe
  - Betrachtet wird ein symmetrisches Profil mit einer ausgeschlagenen Klappe.
  - Die Skelettlinie ist eine geknickte Linie.
  - Die Geometrie wird durch das *Klappentiefenverhältnis*

$$\kappa = c_K / c$$

und den Klappenwinkel η_K beschrieben.



1.3 Skelett-Theorie

- Für die Steigung der Skelettlinie gilt:

$$\frac{dz_S}{dx} = \begin{cases} -\eta_K, & 0 \le \theta < \theta_K \\ 0, & \theta_K < \theta < \pi \end{cases}$$

- Dabei ist θ_K der der Klappenposition entsprechende Winkel.
- Aus $\quad x_K = c - c_K = \frac{c}{2}\left(1 + \cos\left(\theta_K\right)\right)$

folgt: $\quad \cos\left(\theta_K\right) = 1 - 2\kappa$

$$\theta_K = \arccos\left(1 - 2\kappa\right)$$

$$\sin\left(\theta_K\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\theta_K\right)} = 2\sqrt{\kappa\left(1 - \kappa\right)}$$

$$\sin\left(2\theta_K\right) = 2\sin\left(\theta_K\right)\cos\left(\theta_K\right) = 4\left(1 - 2\kappa\right)\sqrt{\kappa\left(1 - \kappa\right)}$$

1.3 Skelett-Theorie

- Die Fourier-Koeffizienten berechnen sich zu

$$G_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{dz_S}{dx}\, d\theta = -\frac{2}{\pi}\eta_K \int_0^{\theta_K} d\theta = -\frac{2}{\pi}\eta_K \theta_K$$

$$G_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{dz_S}{dx}\cos(\theta)\, d\theta = -\frac{2}{\pi}\eta_K \int_0^{\theta_K} \cos(\theta)\, d\theta = -\frac{2}{\pi}\eta_K \sin(\theta_K)$$

$$G_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{dz_S}{dx}\cos(2\theta)\, d\theta = -\frac{2}{\pi}\eta_K \int_0^{\theta_K} \cos(2\theta)\, d\theta = -\frac{1}{\pi}\eta_K \sin(2\theta_K)$$

$$\rightarrow \begin{cases} G_0 + G_1 = -\dfrac{2}{\pi}\left(\theta_K + \sin(\theta_K)\right)\eta_K \\ G_1 + G_2 = -\dfrac{1}{\pi}\left(2\sin(\theta_K) + \sin(2\theta_K)\right)\eta_K \end{cases}$$

1.3 Skelett-Theorie

- Für die Beiwerte folgt:

$$c_L = 2\pi\left(\alpha - \frac{G_0 + G_1}{2}\right) = 2\pi\alpha + 2\left(\theta_K + \sin(\theta_K)\right)\eta_K$$
$$= 2\pi\alpha + 2\left(\arccos(1 - 2\kappa) + 2\sqrt{\kappa(1-\kappa)}\right)\eta_K$$

$$c_{M_0} = \frac{\pi}{4}\left(G_1 + G_2\right) = -\frac{1}{4}\left(2\sin(\theta_K) + \sin(2\theta_K)\right)\eta_K$$
$$= -2\sqrt{\kappa(1-\kappa)}\left(1-\kappa\right)\eta_K$$

1.4 Methode der diskreten Wirbel

- Die Methode der diskreten Wirbel ist eine numerische Methode zur Berechnung dünner Profile.
- Sie bildet die Grundlage der Wirbelgitterverfahren zur Berechnung von Tragflügeln endlicher Länge.
- Die Methode der diskreten Wirbel basiert auf dem Dreiviertelpunkt-Theorem von Pistolesi.

1.4 Methode der diskreten Wirbel

- Dreiviertelpunkt-Theorem von Pistolesi:
  - Betrachtet wird eine parabelförmige Skelettlinie

$$z_S(x)=4h\frac{x}{c}\left(1-\frac{x}{c}\right)$$

(2. Normalverteilung), die unter dem Anstellwinkel α angeströmt wird.

  - Mit $G_0=0,\ \ G_1=-4\frac{h}{c}$

folgt: $\alpha_0=-2\frac{h}{c},\ \ c_L=2\pi\left(\alpha+2\frac{h}{c}\right)$

1.4 Methode der diskreten Wirbel

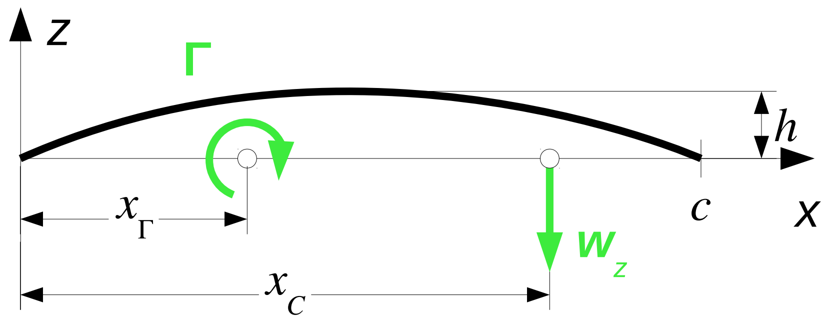
- Aus $c_L = \frac{2\Gamma}{v_\infty c}$

  folgt für die Zirkulation: $\Gamma = \frac{1}{2} c_L v_\infty c = \pi v_\infty c \left(\alpha + 2\frac{h}{c} \right)$

- Ein Wirbel dieser Stärke erzeugt den gleichen Auftrieb wie das gegebene Profil.
- Zu bestimmen ist die Position x_Γ, an der sich der Wirbel befinden muss, sowie die Position x_C des Kontrollpunktes, an dem die Randbedingung erfüllt ist.

1.4 Methode der diskreten Wirbel

- Aus der Randbedingung



$$w_z(x_C) = v_\infty \left(\frac{dz_S}{dx}(x_C) - \alpha \right)$$

und $\quad w_z(x_C) = \dfrac{-\Gamma}{2\pi(x_C - x_\Gamma)}$

folgt: $\quad \dfrac{-v_\infty c(\alpha + 2h/c)}{2(x_C - x_\Gamma)} = v_\infty \left(4\dfrac{h}{c}\left(1 - 2\dfrac{x_C}{c}\right) - \alpha \right)$

- Diese Gleichung soll für beliebige Werte von α und h/c erfüllt sein.

1.4 Methode der diskreten Wirbel

- Dafür muss gelten:

$$\alpha \quad : \quad \frac{c}{2\left(x_C - x_\Gamma\right)} = 1 \quad \rightarrow \quad x_C - x_\Gamma = \frac{c}{2}$$

$$h/c \quad : \quad -\frac{c}{x_C - x_\Gamma} = 4 - 8\frac{x_C}{c} \quad \rightarrow \quad x_C - x_\Gamma = \frac{c}{4\left(2\,x_C/c - 1\right)}$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{4\left(2\,x_C/c - 1\right)} \quad \rightarrow \quad 2\frac{x_C}{c} - 1 = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{x_C}{c} = \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow \quad \frac{x_\Gamma}{c} = \frac{x_C}{c} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

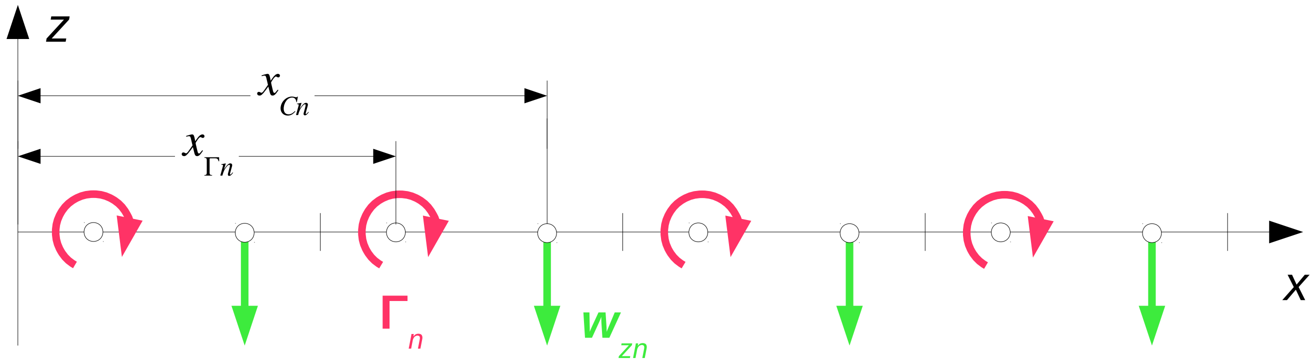
1.4 Methode der diskreten Wirbel

- Der Auftrieb lässt sich berechnen, indem die Zirkulation eines Wirbels, der sich im Viertelpunkt befindet, aus der Randbedingung im Dreiviertelpunkt ermittelt wird.
- Das Verfahren ist korrekt für Parabelskelette und stellt für Skelettlinien, die nur wenig von einer Parabel abweichen, eine brauchbare Näherung dar.
- Das Moment kann nicht ermittelt werden.

1.4 Methode der diskreten Wirbel

- Methode der diskreten Wirbel:
  - Die Wirbelverteilung wird durch diskrete Wirbel auf der Profilsehne approximiert.
  - Damit können Näherungen für den Auftrieb und das Moment von beliebigen Skelettlinien bestimmt werden.
  - Die Profilsehne wird in Intervalle unterteilt.
  - Die Wirbel befinden sich an den Viertelpunkten der Intervalle.
  - Die Randbedingung muss in den Dreiviertelpunkten der Intervalle erfüllt sein.

1.4 Methode der diskreten Wirbel



- Für die Vertikalkomponente der Geschwindigkeitsstörung gilt:

$$w_{zm} = w_z(x_{Cm}) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{\Gamma_n}{x_{Cm} - x_{\Gamma n}} = v_\infty\left(\frac{dz_S}{dx}(x_{Cm}) - \alpha\right)$$

$$m = 1, \ldots, N$$

1.4 Methode der diskreten Wirbel

- Damit stehen N lineare Gleichungen zur Bestimmung der N unbekannten Wirbelstärken Γ_n zur Verfügung.
- Auftriebsbeiwert und Momentenbeiwert bezüglich dem Neutralpunkt berechnen sich zu

$$c_L = \frac{2}{v_\infty c} \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n, \quad c_{M_0} = \frac{2}{v_\infty c^2} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{c}{4} - x_{\Gamma n} \right) \Gamma_n$$

- Die Wirbelverteilung und der Druckbeiwert werden approximiert durch

$$\gamma(x_{\Gamma n}) \approx \frac{\Gamma_n}{x_{n+1} - x_n}, \quad \Delta c_P(x_{\Gamma n}) \approx \frac{2}{x_{n+1} - x_n} \frac{\Gamma_n}{v_\infty}$$

1.4 Methode der diskreten Wirbel

- Beispiel:
  - Aufgabenstellung:
    - Gegeben ist die Skelettlinie

$$z_S(x) = \delta\, c \left(2\frac{x^3}{c^3} - 3\frac{x^2}{c^2} + \frac{x}{c} \right) \quad \text{mit} \quad \delta = 0{,}2 .$$

    - Zu berechnen sind die Druckverteilung $\Delta c_P(x)$ und die aerodynamischen Beiwerte für den Anstellwinkel $\alpha = \delta/4$.
    - Anhand der analytischen Lösung soll der Einfluss der Diskretisierung untersucht werden.

1.4 Methode der diskreten Wirbel

- Ableitung der Skelettlinie:

$$\frac{dz_S}{dx}(x) = \delta\left(6\frac{x^2}{c^2} - 6\frac{x}{c} + 1\right)$$

- Diskretisierung:
  - Die Intervallgrenzen liegen bei

$$\frac{x_n}{c} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\pi\frac{n-1}{N}\right)\right), \quad n = 1, \ldots, N+1$$

  - Damit wird erreicht, dass die Intervalle in der Nähe der Nase und der Hinterkante kleiner sind als in der Mitte des Profils.

1.4 Methode der diskreten Wirbel

- Analytische Lösung (vgl. Übungsblatt 4.1):
  - Druckverteilung: $$\Delta c_P(x) = -12\,\delta\left(2\frac{x}{c}-1\right)\sqrt{\frac{x}{c}\left(1-\frac{x}{c}\right)}$$
  - Beiwerte: $$c_L = 0\,,\quad c_{M_0} = \frac{3}{16}\pi\,\delta$$
- GNU Octave-Skript:
  - Die Funktion **`mfs_vortex2d`** von Mefisto führt die Berechnung durch.

1.4 Methode der diskreten Wirbel

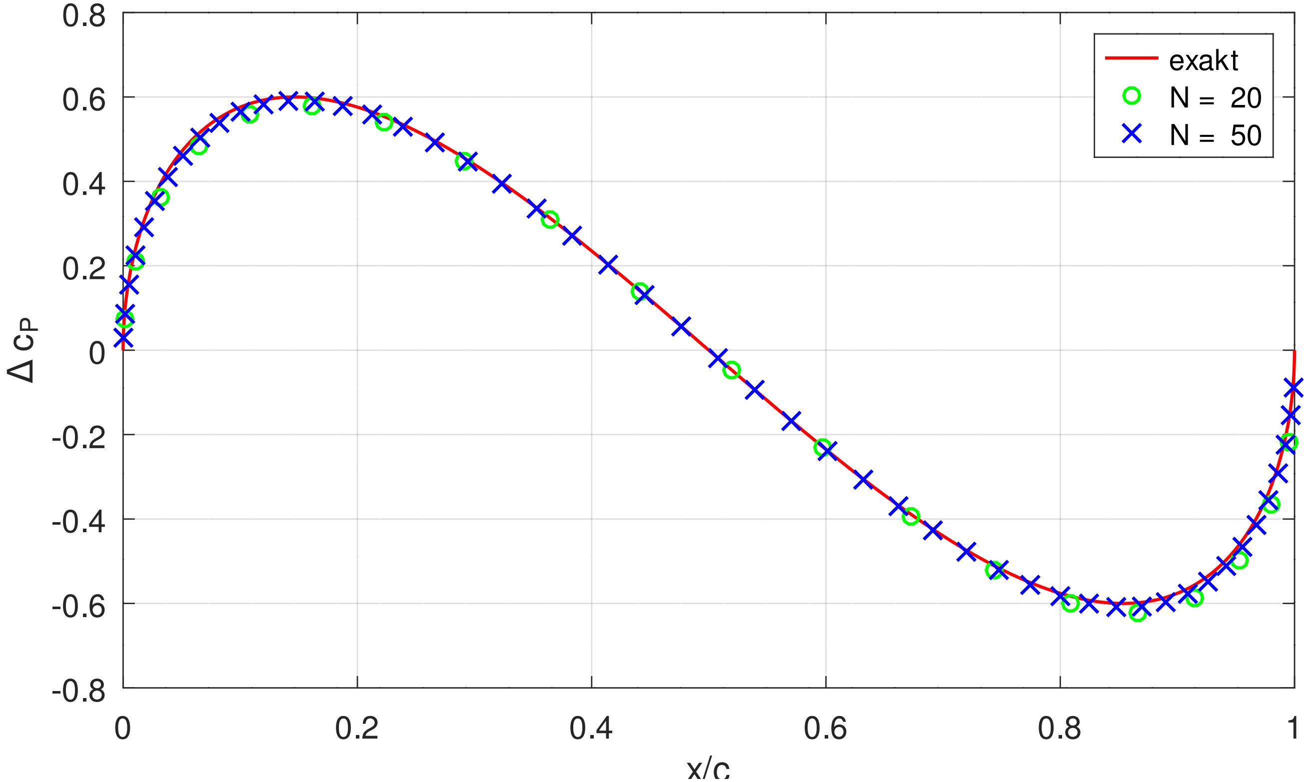
```
# Beispiel: Profil mit S-Schlag
# ---------------------------------------------------------------

  file = mfilename();
  fid  = fopen([file, ".res"], "wt");   % Ausgabedatei

  N  = [20,  50, 150, 250];

  delta = 0.2;
  alpha = 0.25 * delta * 180 / pi;      % Anstellwinkel in Grad

# Skelettlinie

  camber = mkpp([0, 1], delta * [2, -3, 1, 0]);

# Numerische Ergebnisse

  for n = 1 : length(N)
      theta = linspace(0, pi, N(n) + 1);
      x     = 0.5 * (1 - cos(theta));
```

1.4 Methode der diskreten Wirbel

```
      [cp{n}, xg{n}, cL(n), cM(n)] = ...
         mfs_vortex2d(x, camber, alpha);
  end

# Analytische Ergebnisse

  CL = 0;
  CM = 3 * pi * delta / 16;
  CP = - 12 * delta * (2 * x - 1) .* sqrt(x .* (1 - x));

# Ausgabe

  …

  fclose(fid);
```

1.4 Methode der diskreten Wirbel

- Ergebnisse:
  - Druckverteilung:



1.4 Methode der diskreten Wirbel

- Aerodynamische Beiwerte:

N :	20	50	150	250	exakt
cL:	0.00193	0.00031	0.00003	0.00001	0.00000
cM:	0.11733	0.11773	0.11780	0.11781	0.11781

- Bereits mit 20 Intervallen ergibt sich eine brauchbare Nähe-rung.