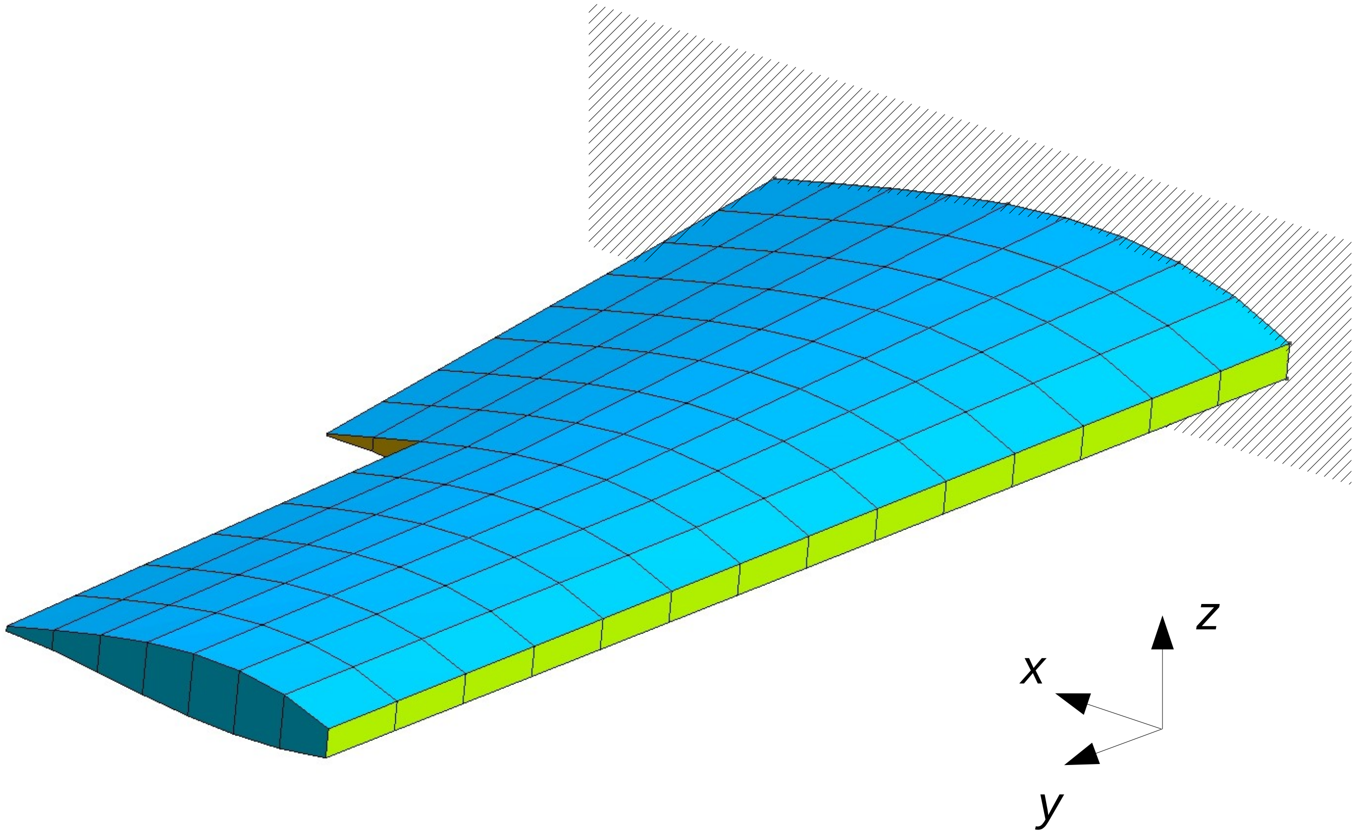
1. Der eingespannte Flügel



1. Der eingespannte Flügel

- Am an der Flügelwurzel eingespannten Flügel lassen sich folgende Phänomene untersuchen:
  - Aerodynamische Lasten am verformten Flügel
  - Querruderwirksamkeit
  - Statische Divergenz
  - Einfluss der Pfeilung
- Da keine Starrkörperverschiebungen auftreten können, ist die Untersuchung des eingespannten Flügels einfacher als die Untersuchung des gesamten Flugzeugs.

1. Der eingespannte Flügel

1.1 Grundgleichungen

- Statisches Gleichgewicht:
  - Das elastische Verhalten des Flügels wird durch ein Finite-Elemente-Modell beschrieben.
  - Die elastischen Kräfte sind im Gleichgewicht mit den äußeren Kräften:

$$\left[K_{LL}\right]\left[u_L\right]=\left[l_L^0\right]+\left[l_L^A\right]$$

  - Matrix $\left[l_L^0\right]$ beschreibt die Lasten, die nicht von der Strömung abhängen, z. B. die Gewichtskraft.
  - Matrix $\left[l_L^A\right]$ beschreibt die aerodynamischen Lasten.

1.1 Grundgleichungen

- Aerodynamische Lasten:
  - Die aerodynamischen Lasten hängen vom Anstellwinkel, den Klappenwinkeln und den elastischen Verschiebungen ab.
  - Anstellwinkel und Klappenwinkel zählen zu den *Konfigurationsparametern*, die in der Matrix $[u_K]$ zusammengefasst werden.
  - Dann gilt: $\left[l_L^A\right]=\left[l_L^A\left(\left[u_K\right],\left[u_L\right]\right)\right]$
  - Die aerodynamischen Lasten sind proportional zum Staudruck q_∞ der ungestörten Anströmung.

1.1 Grundgleichungen

- Im Rahmen der linearen Aeroelastik werden die Werte der Konfigurationsparameter und die elastischen Verschiebungen als klein vorausgesetzt.
- Dann hängen die aerodynamischen Lasten näherungsweise linear von den Konfigurationsparametern und den elastischen Verschiebungen ab:

$$\left[l_L^A \left([u_K], [u_L] \right) \right] = q_\infty \left(\left[q_L^0 \right] + \left[Q_{LK} \right] \left[u_K \right] + \left[Q_{LL} \right] \left[u_L \right] \right)$$

- Die ersten beiden Terme auf der rechten Seite beschreiben die aerodynamischen Lasten am starren Flügel:

$$\left[l_L^{RA} \right] = q_\infty \left(\left[q_L^0 \right] + \left[Q_{LK} \right] \left[u_K \right] \right)$$

1.1 Grundgleichungen

- Der erste Term enthält die Lasten infolge der Wölbung der Skelettlinie.
- Der zweite Term enthält die Lasten infolge des Anstellwinkels und der Klappenausschläge.

– Der dritte Term auf der rechten Seite beschreibt die *elastischen Inkremente*:

$$\left[l_L^{EA} \right] = q_\infty \left[Q_{LL} \right] \left[u_L \right]$$

- Die elastischen Inkremente beschreiben den Einfluss der Verformung des Flügels auf die Lasten.

1.1 Grundgleichungen

- Aerodynamische Lasten am verformten Flügel:
  - Bei gegebenen Konfigurationsparametern werden zunächst die elastischen Verschiebungen berechnet.
  - Dafür muss die Gleichgewichtsgleichung gelöst werden:

$$[K_{LL}][u_L]=[l_L^0]+q_\infty\left([q_L^0]+[Q_{LK}][u_K]+[Q_{LL}][u_L]\right)$$

  - Die Gleichung kann direkt oder iterativ gelöst werden.
  - Direkte Lösung:

$$\left([K_{LL}]-q_\infty[Q_{LL}]\right)[u_L]=[l_L^0]+q_\infty\left([q_L^0]+[Q_{LK}][u_K]\right)$$

1.1 Grundgleichungen

- Die aerodynamische Matrix $[Q_{LL}]$ ist in der Regel voll besetzt. Daher kann die direkte Lösung sehr aufwändig sein, wenn die Anzahl der Freiheitsgrade des Finite-Elemente-Modells groß ist.

– Iterative Lösung:

- Startwert: $[K_{LL}]\left[u_L^{(0)}\right]=\left[l_L^0\right]+q_\infty\left(\left[q_L^0\right]+[Q_{LK}][u_K]\right)$

- Iteration: $[K_{LL}]\left[u_L^{(n+1)}\right]=\left[l_L^0\right]+q_\infty\left(\left[q_L^0\right]+[Q_{LK}][u_K]+[Q_{LL}]\left[u_L^{(n)}\right]\right)$

- Nach dem Banachschen Fixpunktsatz konvergiert die Iteration, wenn alle Eigenwerte der Matrix

$$q_\infty[K_{LL}]^{-1}[Q_{LL}]$$

kleiner 1 sind.

1.1 Grundgleichungen

- Die iterative Lösung ist günstiger, wenn das Finite-Elemente-Modell eine große Anzahl von Freiheitsgraden hat.
- Wenn sich der Staudruck dem Staudruck q_D, bei dem Divergenz auftritt, annähert, nimmt die Anzahl der benötigten Iterationen stark zu.

– Wenn die elastischen Verschiebungen berechnet sind, lassen sich die aerodynamischen Lasten leicht aus

$$\left[l_L^A \right] = q_\infty \left(\left[q_L^0 \right] + \left[Q_{LK} \right] \left[u_K \right] + \left[Q_{LL} \right] \left[u_L \right] \right)$$

ermitteln.

– Spannungen und Schnittlasten können wie bei einer gewöhnlichen Finite-Elemente-Analyse aus den Verschiebungen berechnet werden.

1.1 Grundgleichungen

- Statische Divergenz:
  - Statische Divergenz tritt auf, wenn die Gleichgewichtsgleichung keine eindeutige Lösung hat.
  - Das ist der Fall, wenn die homogene Gleichung

$$\left([K_{LL}]-q_\infty[Q_{LL}]\right)[u_L]=[0]$$

    nicht-triviale Lösungen hat.
  - Die homogene Gleichung stellt ein lineares Eigenwertproblem dar.
  - Da die aerodynamische Matrix $[Q_{LL}]$ nicht symmetrisch ist, können auch komplexe Eigenwerte auftreten.

1.1 Grundgleichungen

- Physikalische Bedeutung haben nur die positiven reellen Eigenwerte.
- Der niedrigste positive reelle Eigenwert gibt den Staudruck q_D an, bei dem erstmals statische Divergenz auftritt.

- Querruderwirksamkeit:
  - Aus den aerodynamischen Lasten ergibt sich ein resultierendes Moment um die *x*-Achse.
  - Ein kleiner Querruderauschlag η_Q führt zu einer Änderung

$$\Delta M_x = \frac{\partial M_x}{\partial \eta_Q} \eta_Q$$

des Moments.

1.1 Grundgleichungen

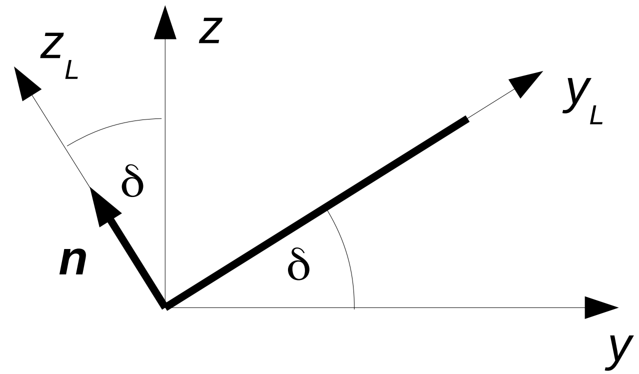
- Der Einfluss der Verformung auf die Ruderwirksamkeit kann durch Vergleich der Momentenänderung ΔM_x^E beim elastischen Flügel mit der Momentenänderung ΔM_x^R beim starren Flügel beurteilt werden.
- Der *Ruderwirkungsfaktor* ist definiert durch

$$\eta_R = \frac{\Delta M_x^E}{\Delta M_x^R} = \frac{\partial M_x^E / \partial \eta_Q}{\partial M_x^R / \partial \eta_Q} \quad .$$

- Ruderumkehr tritt auf für $\eta_R < 0$.

1.2 Aerodynamische Lasten

- Die aerodynamischen Kräfte können mit dem Wirbelgitterverfahren berechnet werden.
- Geometrie einer Auftriebsfläche:
  - Im Allgemeinen ist die Auftriebsfläche um einen Winkel δ gegenüber der *xy*-Ebene geneigt.
  - Das lokale Koordinatensystem der Auftriebsfläche besteht aus der *x*-Achse, der y_L-Achse und der z_L-Achse.



1.2 Aerodynamische Lasten

- Abwind:
  - Im lokalen Koordinatensystem gilt für den Abwind:

$$w_L = \frac{\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}}{v_\infty} = \frac{\partial \zeta_S}{\partial x} - \alpha\, \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{n}$$

  - Die Funktion $\zeta_S(x,\ y_L)$ beschreibt die Skelettfläche des verformten Flügels.
  - Am Kontrollpunkt mit den Koordinaten $\boldsymbol{x}_C$ gilt:

$$\zeta_S(\boldsymbol{x}_C) = \zeta_S^R(\boldsymbol{x}_C) + \sum_k \zeta_S^k(\boldsymbol{x}_C)\, \eta_k + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}_C$$

1.2 Aerodynamische Lasten

- Die Funktion ζ_S^R beschreibt die Skelettfläche des starren Flügels ohne Klappenausschlag.
- Die Funktionen ζ_S^k beschreiben die Änderung der Skelettfläche des starren Flügels, wenn die k-te Klappe den Ausschlag 1 hat.
- Der Vektor $\boldsymbol{u}_C$ ist der Vektor der elastischen Verschiebung am Kontrollpunkt.
- Damit gilt für den Abwind am n-ten Kontrollpunkt:

$$w_{Ln}=\frac{\partial \zeta_S^R}{\partial x}(\boldsymbol{x}_{Cn})+\sum_k \frac{\partial \zeta_S^k}{\partial x}(\boldsymbol{x}_{Cn})\eta_k-\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{n}\,\alpha+\frac{\partial(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}_{Cn})}{\partial x}$$

1.2 Aerodynamische Lasten

- Mit den folgenden Matrizen lassen sich die Gleichungen übersichtlich schreiben:

$$[w]_L = \begin{bmatrix} w_{L1} \\ \vdots \\ w_{LN} \end{bmatrix}, \quad [w_0]_L = \begin{bmatrix} \partial \zeta_S^R / \partial x(\boldsymbol{x}_{C1}) \\ \vdots \\ \partial \zeta_S^R / \partial x(\boldsymbol{x}_{CN}) \end{bmatrix}, \quad [w^E]_L = \begin{bmatrix} \partial(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}_{C1}) / \partial x \\ \vdots \\ \partial(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}_{CN}) / \partial x \end{bmatrix}$$

$$[u_K] = \begin{bmatrix} \alpha \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_K \end{bmatrix}, \quad [D_K^1]_L = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{n} & \dfrac{\partial \zeta_S^1}{\partial x}(\boldsymbol{x}_{C1}) & \cdots & \dfrac{\partial \zeta_S^K}{\partial x}(\boldsymbol{x}_{C1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{n} & \dfrac{\partial \zeta_S^1}{\partial x}(\boldsymbol{x}_{CN}) & \cdots & \dfrac{\partial \zeta_S^K}{\partial x}(\boldsymbol{x}_{CN}) \end{bmatrix}$$

1.2 Aerodynamische Lasten

- Dann gilt für den Abwind:

$$[w]_L = [w_0]_L + [D_K^1]_L [u_K] + [w^E]_L$$

- Wirbelstärken:
  - Die Matrix

$$[\Gamma] = \frac{1}{v_\infty} [\Gamma_1 \quad \cdots \quad \Gamma_N]^T$$

    der Wirbelstärken ist Lösung des linearen Gleichungssystems

$$[w]_L = [C][\Gamma]$$

  - Die Matrix $[C]$ wird durch die Gleichungen des Wirbelgitterverfahrens definiert.

1.2 Aerodynamische Lasten

- Kräfte:
  - Für die Kraft auf einen Hufeisenwirbel gilt:

$$L_n = \rho\, v_\infty \left| \boldsymbol{e_x} \times \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{ABn}} \right| \Gamma_n = 2\, q_\infty\, \Delta y_{L\,n}\, \Gamma_n / v_\infty$$

  - Die Kraft ist senkrecht zur Auftriebsfläche und greift in der Mitte zwischen den Eckpunkten *A* und *B* des Hufeisens an.
  - Mit der Matrix

$$[G] = 2 \begin{bmatrix} \Delta y_{L\,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Delta y_{L\,N} \end{bmatrix}$$

    gilt für die Kraftmatrix: $\left[l_\Gamma^A \right]_L = q_\infty [G][\Gamma]$

1.2 Aerodynamische Lasten

- Diese Matrix enthält für jedes Panel die in der Mitte zwischen den Eckpunkten des Hufeisens angreifende Kraft, die senkrecht auf der Auftriebsfläche steht.
- Einsetzen der Gleichungen für die Wirbelstärken und den Abwind ergibt:

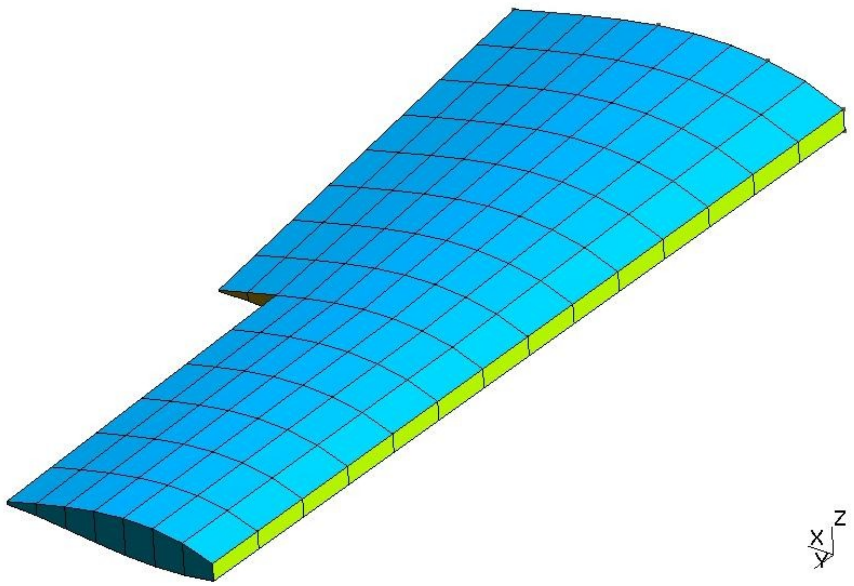
$$\left[l_{\Gamma}^{A} \right]_L = q_\infty [G][C]^{-1} \left([w_0]_L + \left[D_K^1 \right]_L [u_K] + \left[w^E \right]_L \right)$$

1.3 Splines

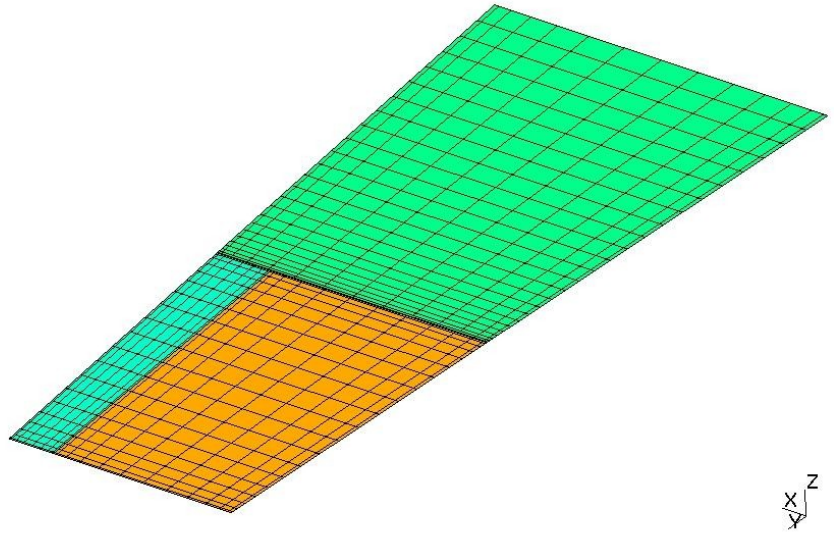
- Mithilfe so genannter Splines erfolgt
  - die Berechnung des Abwinds $\left[w^E\right]_L$ an den Kontrollpunkten der Panels aus den Verschiebungen $\left[u\right]$ der Strukturknoten
  - die Umrechnung der Lasten $\left[l_\Gamma^A\right]_L$ auf den Panels in die Lasten $\left[l^A\right]$ an den Strukturknoten
- Dabei stellt sich das Problem, dass sich die Geometrien und die Diskretisierungen des Strukturmodells und des aerodynamischen Modells stark unterscheiden.

1.3 Splines

Strukturmodell:



Aerodynamisches Modell:

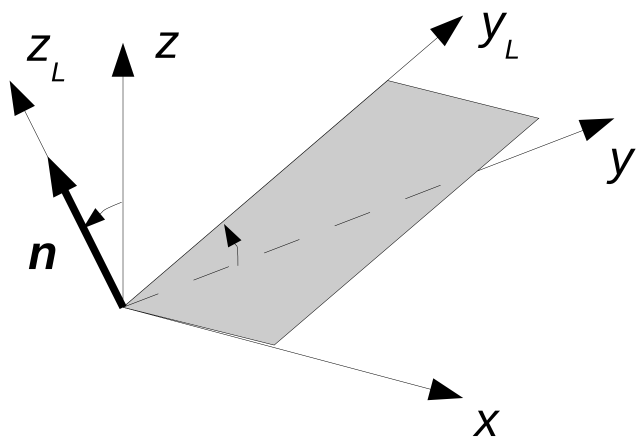


1.3 Splines

- Zur Lösung dieser Aufgabe gibt es verschiedene Methoden.
- Sie hängen ab
  - von der Art des Modells für die Struktur
  - von der Art des Modells für die Aerodynamik
  - von den Qualitätsanforderungen
- Eine Methode, die für die Kopplung der Methode der finiten Elemente mit dem Wirbelgitterfahren geeignet ist, ist der Torsions-Biege-Spline, der im Folgenden behandelt wird.

1.3 Splines

- Annahme:
  - Die Auftriebsflächen verhalten sich wie Balken, d. h. die Balkenachse erfährt eine Biegung, und zusätzlich tritt eine Torsion um die Balkenachse auf.
- Kinematik:
  - Die Kinematik wird im lokalen xy_Lz_L-Koordinatensystem der Auftriebsfläche beschrieben.



1.3 Splines

- Für die Aerodynamik wichtig ist die Verschiebung $u_n = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}$ senkrecht zur xy_L-Ebene.
- Sie setzt sich zusammen aus einer Biegung in z_L-Richtung und einer Torsion um die y_L-Achse:

$$u_n(x, y_L) = b(y_L) - x\,\theta(y_L)$$

- Die noch unbekannten Funktionen $b(y_L)$ und $\theta(y_L)$ beschreiben die Biegung in z_L-Richtung sowie die Drehung um die y_L-Achse.

1.3 Splines

- Ansatz für die Funktionen:
  - Das y_L-Intervall der Auftriebsfläche wird in M Segmente unterteilt. Die Segmente haben die Eckpunkte y_{L0}, y_{L1}, ... , y_{LM}.
  - Der Ansatz für die zu bestimmenden Funktionen lautet:

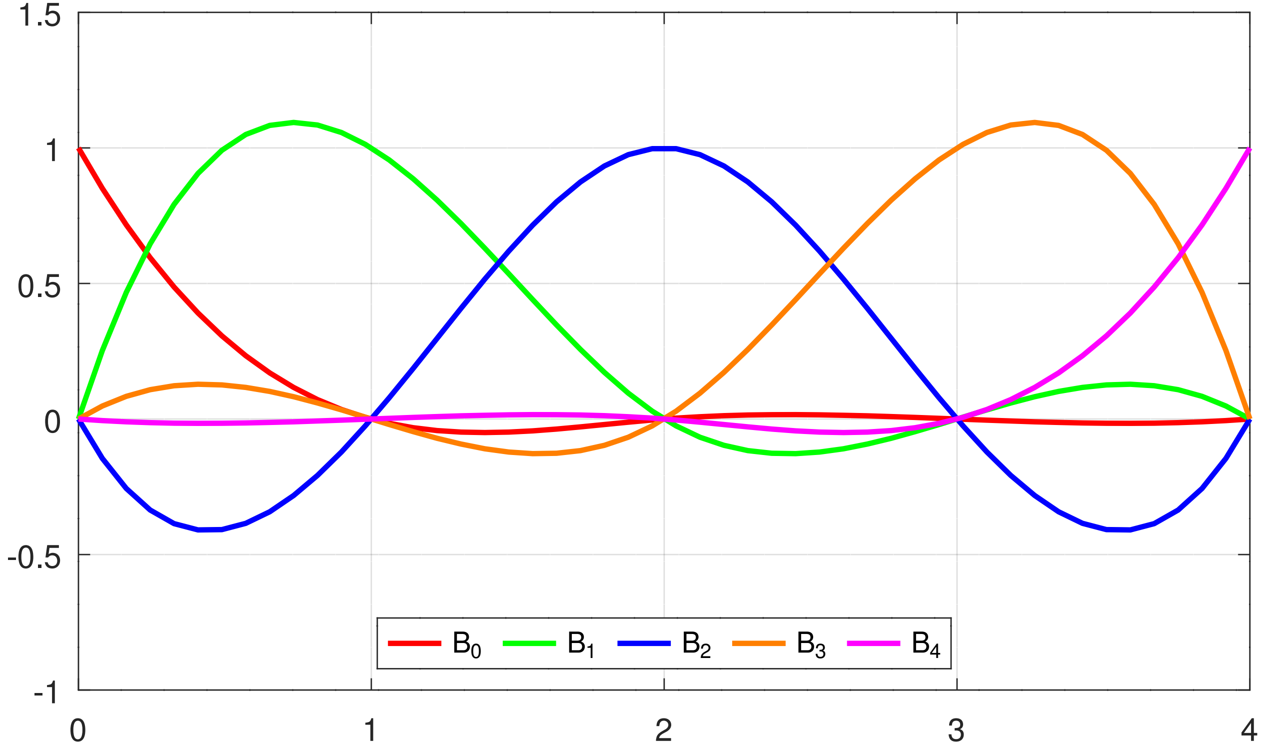
$$b(y_L)=\sum_{m=0}^{M} B_m(y_L)\,b_m,\quad \theta(y_L)=\sum_{m=0}^{M} B_m(y_L)\,\theta_m$$

  - Die Funktionen $B_m(y_L)$ bilden eine Basis der kubischen Splines über den Segmenten.
  - Für sie soll gelten:

$$B_m(y_{Lm})=1,\quad B_l(y_{Lm})=0 \quad \text{für} \quad l\neq m$$

1.3 Splines

- Funktionen B_m der Spline-Basis:



1.3 Splines

- Mit den Matrizen

$$[B(y_L)] = [B_0(y_L) \quad \cdots \quad B_M(y_L)], \quad [b] = [b_0 \quad \cdots \quad b_M]^T$$

$$[\theta] = [\theta_0 \quad \cdots \quad \theta_M]^T$$

gilt: $u_n(x, y_L) = [B(y_L)]([b] - x[\theta])$

- Bestimmung der Koeffizienten:
  - Seien $\boldsymbol{u_k} = \boldsymbol{u}(x_k, y_{Lk}, z_{Lk})$ die Verschiebungsvektoren an den K Strukturknoten mit den Koordinaten (x_k, y_{Lk}, z_{Lk}).
  - Die Koeffizientenmatrizen $[b]$ und $[\theta]$ werden so bestimmt, dass gilt:

$$\sum_k (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u_k} - u_n(x_k, y_{Lk}))^2 = \text{Min}.$$

1.3 Splines

- Mit den Matrizen

$$[u^S]_L = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u_K} \end{bmatrix}, \quad [h] = \begin{bmatrix} [b] \\ [\theta] \end{bmatrix} \text{ und } [S^S]_{Lh} = \begin{bmatrix} [B(y_{L1})] & -x_1[B(y_{L1})] \\ \vdots & \vdots \\ [B(y_{LK})] & -x_K[B(y_{LK})] \end{bmatrix}$$

lautet diese Bedingung:

$$\left([u^S]_L - [S^S]_{Lh}[h]\right)^T \left([u^S]_L - [S^S]_{Lh}[h]\right) = \text{Min}.$$

- Für die Lösung dieses *Ausgleichsproblems* gilt:

$$[S^S]_{Lh}^T [S^S]_{Lh} [h] = [S^S]_{Lh}^T [u^S]_L$$

1.3 Splines

- Für eine stabile Lösung darf M nicht größer als die Anzahl der Strukturknoten mit unterschiedlichen y_L-Koordinaten gewählt werden.
- Die Lösung lässt sich numerisch stabil aus der QR-Zerlegung

$$\left[S^S\right]_{Lh}=\left[Q_S\right]\left[R_S\right]$$

  berechnen. Dabei ist $[Q_S]$ eine orthonormale Matrix und $[R_S]$ eine positiv definite obere Dreiecksmatrix.
- Aus $\left[R_S\right]^T\left[Q_S\right]^T\left[Q_S\right]\left[R_S\right]\left[h\right]=\left[R_S\right]^T\left[Q_S\right]^T\left[u^S\right]_L$

  folgt: $\left[h\right]=\left[R_S\right]^{-1}\left[Q_S\right]^T\left[u^S\right]_L$

1.3 Splines

- Ist $[a^S]$ eine Boolesche Matrix, die die für den Spline benötigten Strukturverschiebungen aus der Matrix $[u]$ aller Strukturverschiebungen extrahiert, und

$$[P]_L = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{n}]^T & \cdots & [\boldsymbol{0}]^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\boldsymbol{0}]^T & \cdots & [\boldsymbol{n}]^T \end{bmatrix} \text{ mit } [\boldsymbol{n}] = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{0}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

die Projektionsmatrix senkrecht zur Auftriebsfläche, dann gilt:

$$[u^S]_L = [P]_L [a^S][u]$$

$$[h] = [R_S]^{-1} [Q_S]^T [P]_L [a^S][u] = [S]_h [u]$$

1.3 Splines

- Die Spline-Matrix

$$[S]_h = [R_S]^{-1} [Q_S]^T [P]_L [a^S]$$

verknüpft die Spline-Koeffizienten $[h]$ mit den Strukturverschiebungen $[u]$.

- Abwind an den Kontrollpunkten:
  - Für den Beitrag der elastischen Verschiebungen zum Abwind am n-ten Kontrollpunkt gilt:

$$w_n^E = \frac{\partial(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{C}\boldsymbol{n}})}{\partial x} = \frac{\partial u_n}{\partial x}(x_{Cn}, y_{Ln}) = -[B(y_{LCn})][\theta]$$

1.3 Splines

- Mit der Matrix

$$\left[D^1\right]_{Lh}=\begin{bmatrix} [0] & -\left[B\left(y_{C1}\right)\right] \\ \vdots & \vdots \\ [0] & -\left[B\left(y_{CN}\right)\right] \end{bmatrix}$$

folgt: $$\left[w^E\right]_L=\left[D^1\right]_{Lh}[h]=\left[D^1\right]_{Lh}[S]_h[u]$$

- Übertragung der aerodynamischen Kräfte:
  - Das Wirbelgitterverfahren liefert die Kräfte an den Mittelpunkten der Hufeisenwirbel.
  - Diese Kräfte müssen auf die Knotenpunkte des Finite-Elemente-Modells der Struktur übertragen werden.

1.3 Splines

- Für die virtuelle Leistung der aerodynamischen Kräfte muss gelten:

$$\tilde{P}^A = \left[\tilde{v}_\Gamma\right]_L^T \left[l_\Gamma^A\right]_L = \left[\tilde{v}\right]^T \left[l^A\right]$$

- Mit der Matrix

$$\left[S^\Gamma\right]_{Lh} = \begin{bmatrix} \left[B\left(y_{L\Gamma 1}\right)\right] & -x_{\Gamma 1}\left[B\left(y_{L\Gamma 1}\right)\right] \\ \vdots & \vdots \\ \left[B\left(y_{L\Gamma N}\right)\right] & -x_{\Gamma N}\left[B\left(y_{L\Gamma N}\right)\right] \end{bmatrix}$$

gilt für die virtuellen Geschwindigkeiten $[\tilde{v}_\Gamma]_L$ an den Mittelpunkten der Hufeisenwirbel:

$$\left[\tilde{v}_\Gamma\right]_L = \left[S^\Gamma\right]_{Lh}\left[\dot{\tilde{h}}\right] = \left[S^\Gamma\right]_{Lh}\left[S\right]_h\left[\tilde{v}\right]$$

1.3 Splines

- Einsetzen in den Ausdruck für die virtuelle Leistung ergibt:

$$[\tilde{v}]^T [S]_h^T [S^\Gamma]_{Lh}^T [l_\Gamma^A]_L = [\tilde{v}]^T [l^A]$$

- Damit diese Beziehung für beliebige virtuelle Geschwindigkeiten $[\tilde{v}]$ gilt, muss gelten:

$$[l^A] = [S]_h^T [S^\Gamma]_{Lh}^T [l_\Gamma^A]_L$$

- Aerodynamische Matrizen:
  - Mit dem Abwind $[w]_L = [w_0]_L + [D_K^1]_L [u_K] + [D^1]_{Lh} [S]_h [u]$

    gilt für die aerodynamischen Kräfte auf der Auftriebsfläche:

$$[l_\Gamma^A]_L = q_\infty [G][C]^{-1} \left([w_0]_L + [D_K^1]_L [u_K] + [D^1]_{Lh} [S]_h [u] \right)$$

1.3 Splines

- Für die Kräfte auf die Struktur folgt:

$$\left[l^A\right]=q_\infty\left[S\right]_h^T\left[S^\Gamma\right]_{Lh}^T\left[G\right]\left[C\right]^{-1}\left(\left[w_0\right]_L+\left[D_K^1\right]_L\left[u_K\right]+\left[D^1\right]_{Lh}\left[S\right]_h\left[u\right]\right)$$

- Mit den aerodynamischen Matrizen

$$\left[q^0\right]=\left[S\right]_h^T\left[S^\Gamma\right]_{Lh}^T\left[G\right]\left[C\right]^{-1}\left[w_0\right]_L$$

$$\left[Q_K\right]=\left[S\right]_h^T\left[S^\Gamma\right]_{Lh}^T\left[G\right]\left[C\right]^{-1}\left[D_K^1\right]_L$$

$$\left[Q\right]=\left[S\right]_h^T\left[S^\Gamma\right]_{Lh}^T\left[G\right]\left[C\right]^{-1}\left[D^1\right]_{Lh}\left[S\right]_h$$

gilt:

$$\left[l^A\right]=q_\infty\left(\left[q^0\right]+\left[Q_K\right]\left[u_K\right]+\left[Q\right]\left[u\right]\right)$$

1.4 Beispiel

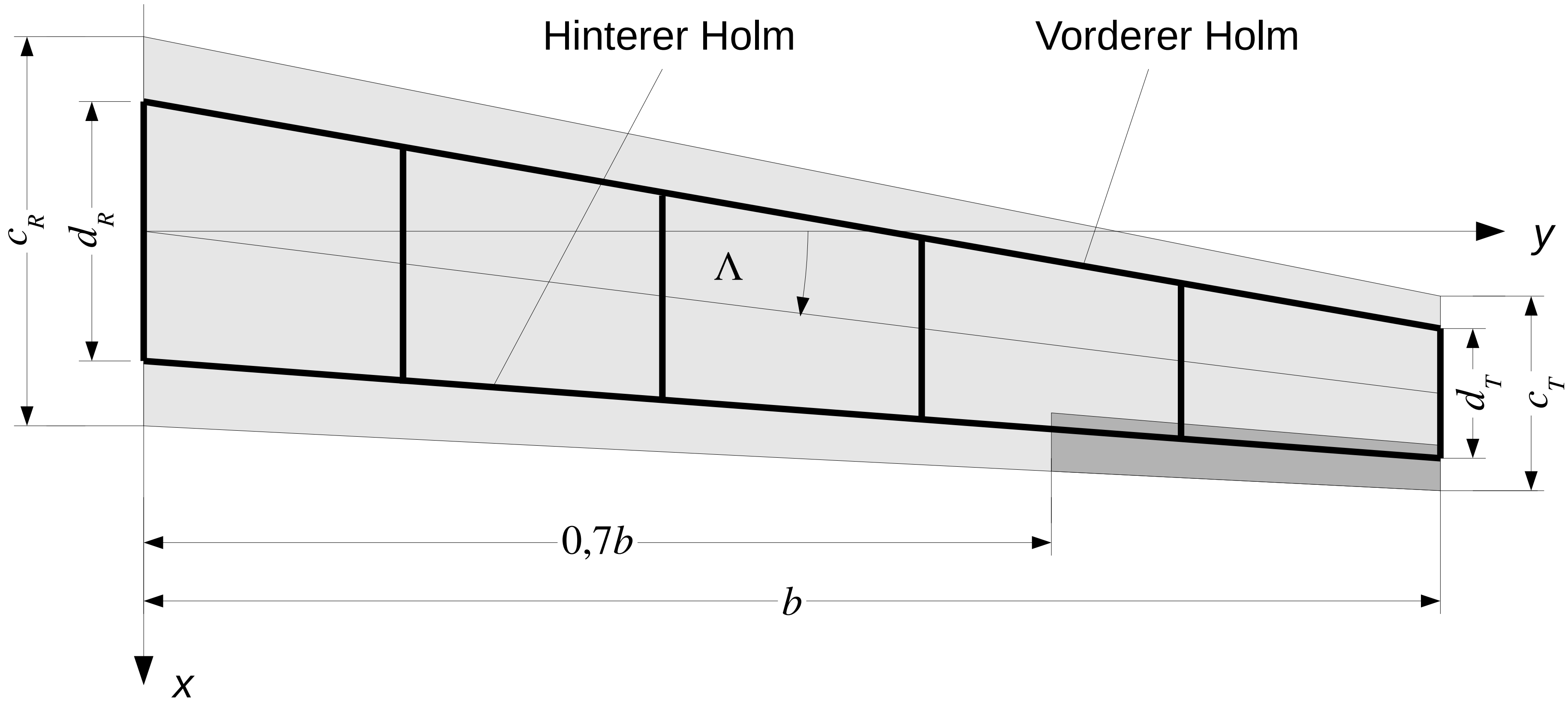
- Das Beispiel zeigt
  - die Arbeitsweise der Splines
  - den Einfluss der Pfeilung auf die statische Divergenz
  - den Einfluss der Verformung des Tragflügels auf die Druckverteilung
  - den Einfluss der Verformung auf Auftriebsbeiwert und Querruderwirksamkeit
  - den Einfluss der Pfeilung auf Auftriebsbeiwert und Querruderwirksamkeit

1.4 Beispiel

- Modellierung
  - Die Struktur des Flügels wird durch ein Balkenmodell abgebildet.
  - Das Balkenmodell besteht aus dem vorderen Holm, dem hinteren Holm und Rippen zwischen den Holmen.
- Daten:
  - Profil: NACA 540xx
  - Anstellwinkel: $2°$
  - Pfeilungswinkel: $-10°$, $0°$ und $10°$
  - Dichte der Luft: $1{,}21\ \mathrm{kg/m^3}$

1.4 Beispiel

- Geometrie:



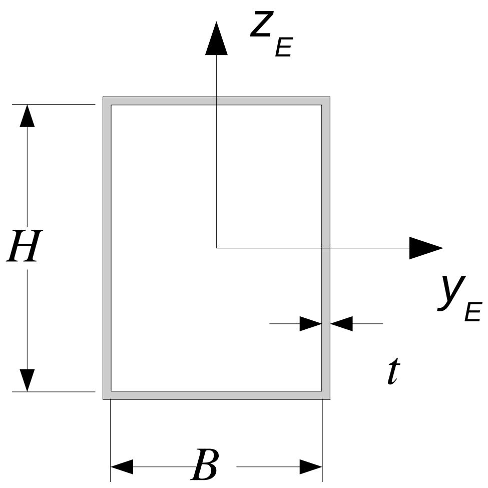
1.4 Beispiel

- Abmessungen:
  - $b = 10$ m
  - $c_R = 3$ m, $c_T = 1{,}5$ m
  - $d_R = 2$ m, $d_T = 1$ m
  - Klappentiefenverhältnis des Querruders $\kappa = 0{,}2$
- Materialdaten:
  - $E = 70000$ MPa
  - $\nu = 0{,}34$
  - $\rho = 2700$ kg/m^3
- Diskretisierung:
  - Elementlänge ca. $0{,}5$ m
  - Innenflügel: 20 Panels in *x*-Richtung, 25 Panels in *y*-Richtung (gleichmä-ßig)
  - Außenflügel: 24 Panels in *x*-Richtung, 20 Panels in *y*-Richtung
  - Querruder: 6 Panels in *x*-Richtung

1.4 Beispiel

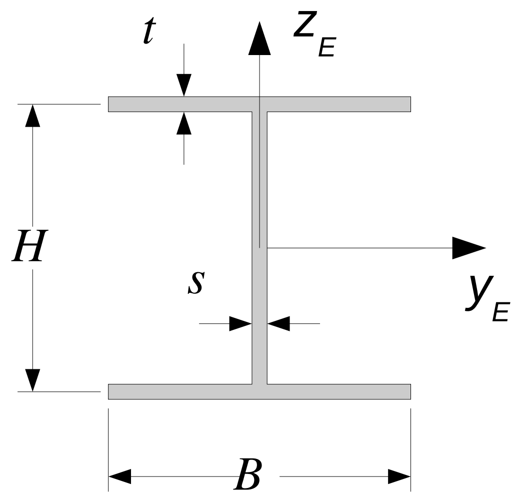
- Balkenquerschnitte:

Holme:



B = 200 mm, H = 200 mm
t = 1 mm

Rippen:

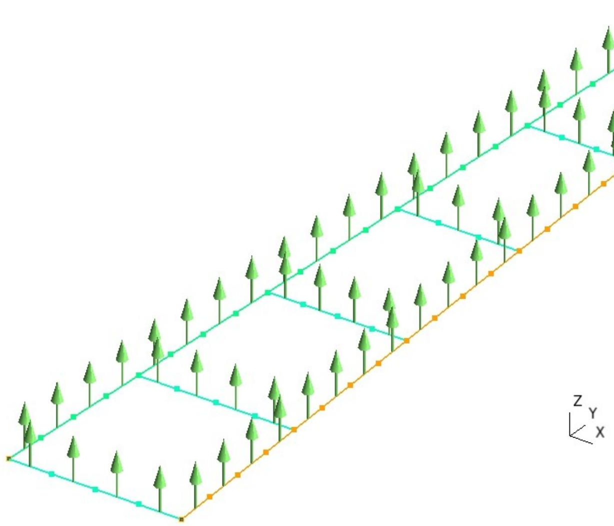


B = 100 mm, H = 200 mm
t = 2 mm, s = 2 mm

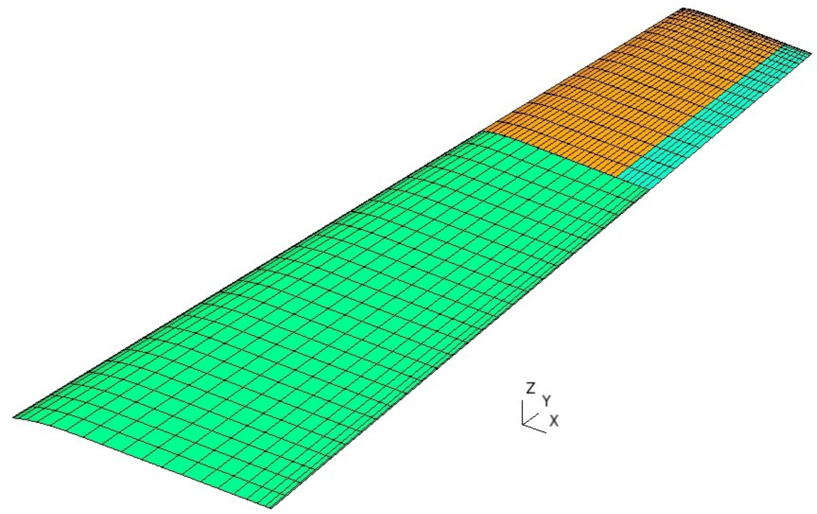
1.4 Beispiel

- Diskretisierung:

Strukturmodell



Aerodynamisches Modell



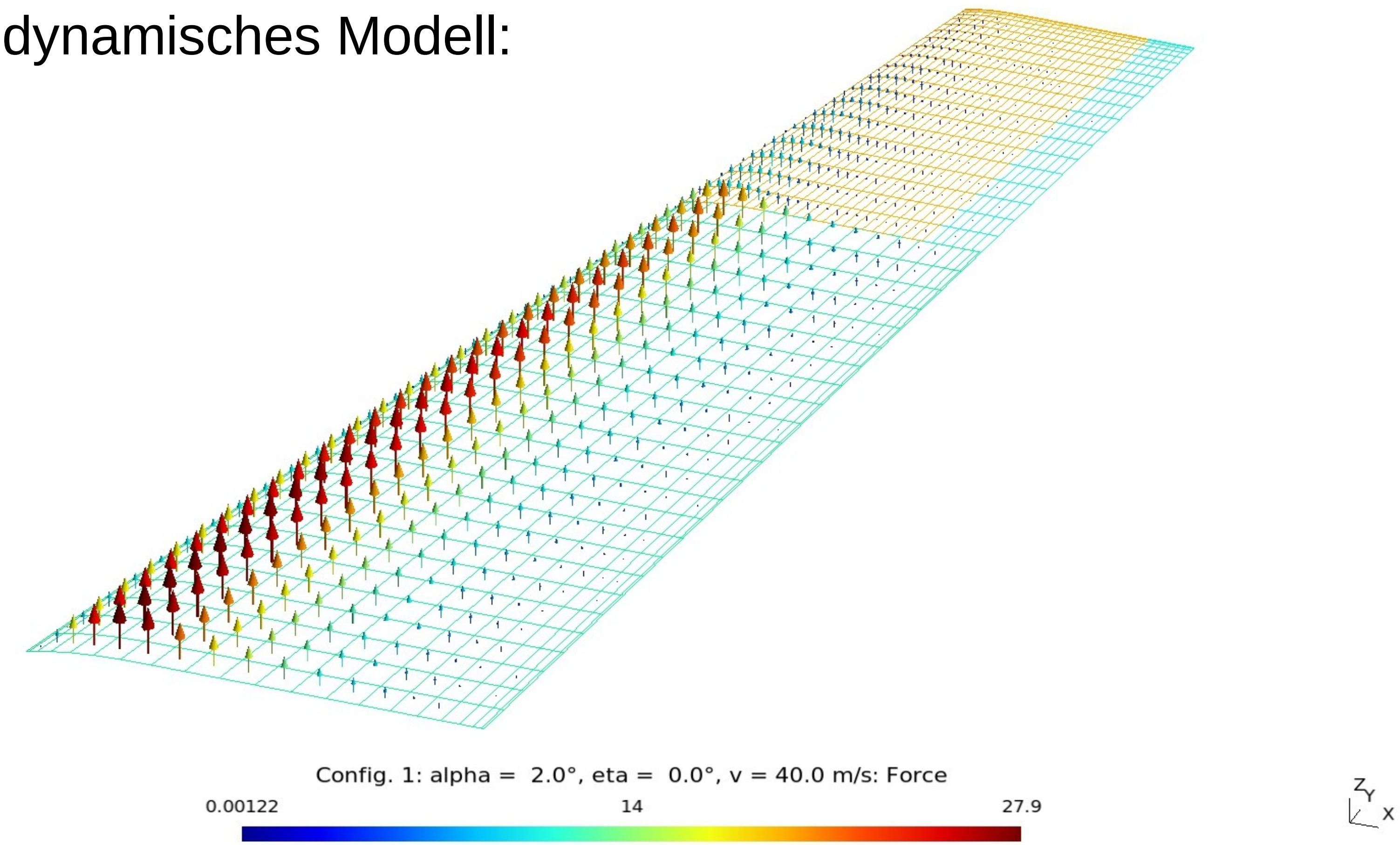
Pfeile zeigen die z_E-Achse.

1.4 Beispiel

- Splines:
  - Betrachtet wird der Flügel mit einem Pfeilungswinkel von 10° bei einer Anströmgeschwindigkeit von $40\ \mathrm{m/s}$.
  - Die aus der Umströmung des starren Flügels resultierenden aerodynamischen Kräfte werden auf das Strukturmodell übertragen.
  - Anschließend werden die Verschiebungen des Strukturmodells infolge dieser Kräfte berechnet und auf das aerodynamische Modell übertragen.

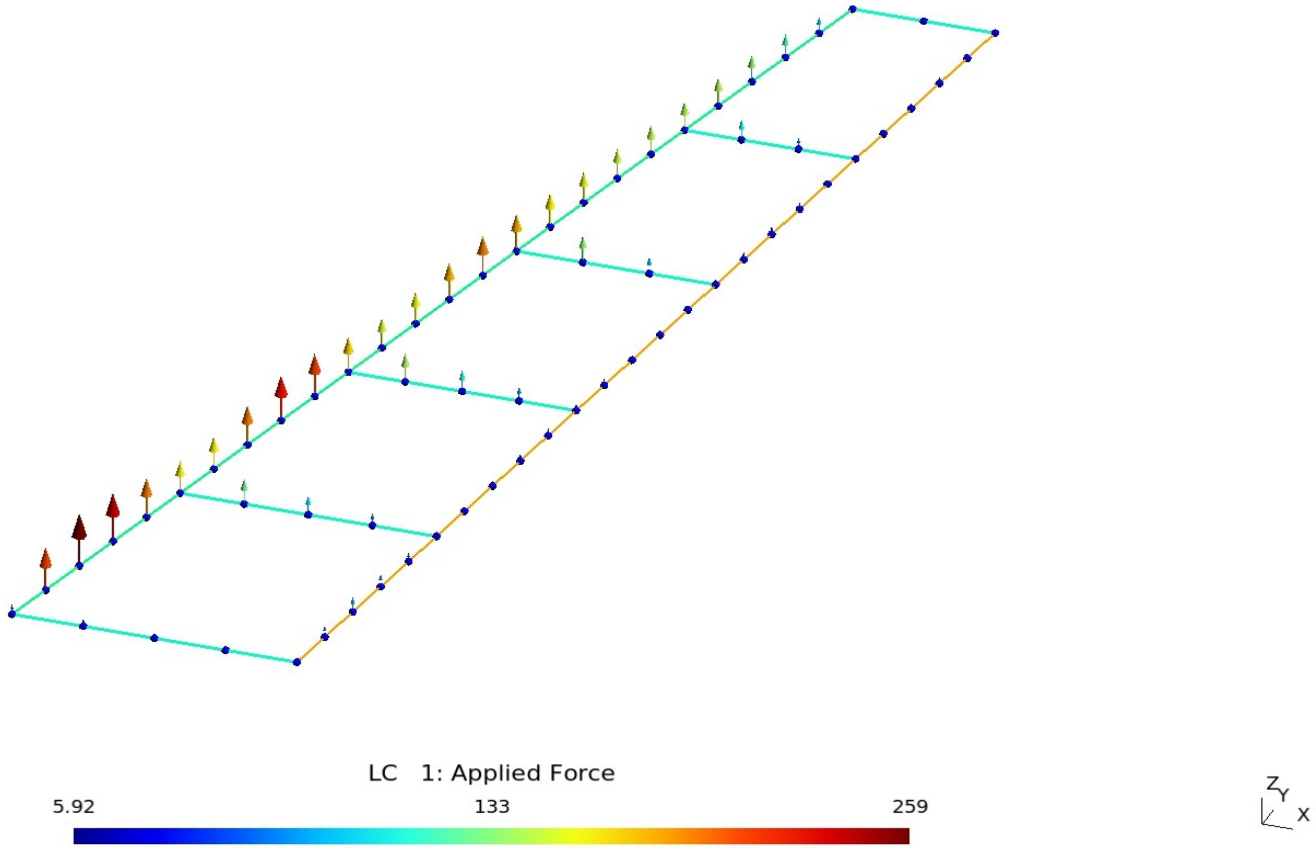
1.4 Beispiel

- Vergleich der Kräfte:
  - Aerodynamisches Modell:



1.4 Beispiel

- Strukturmodell:



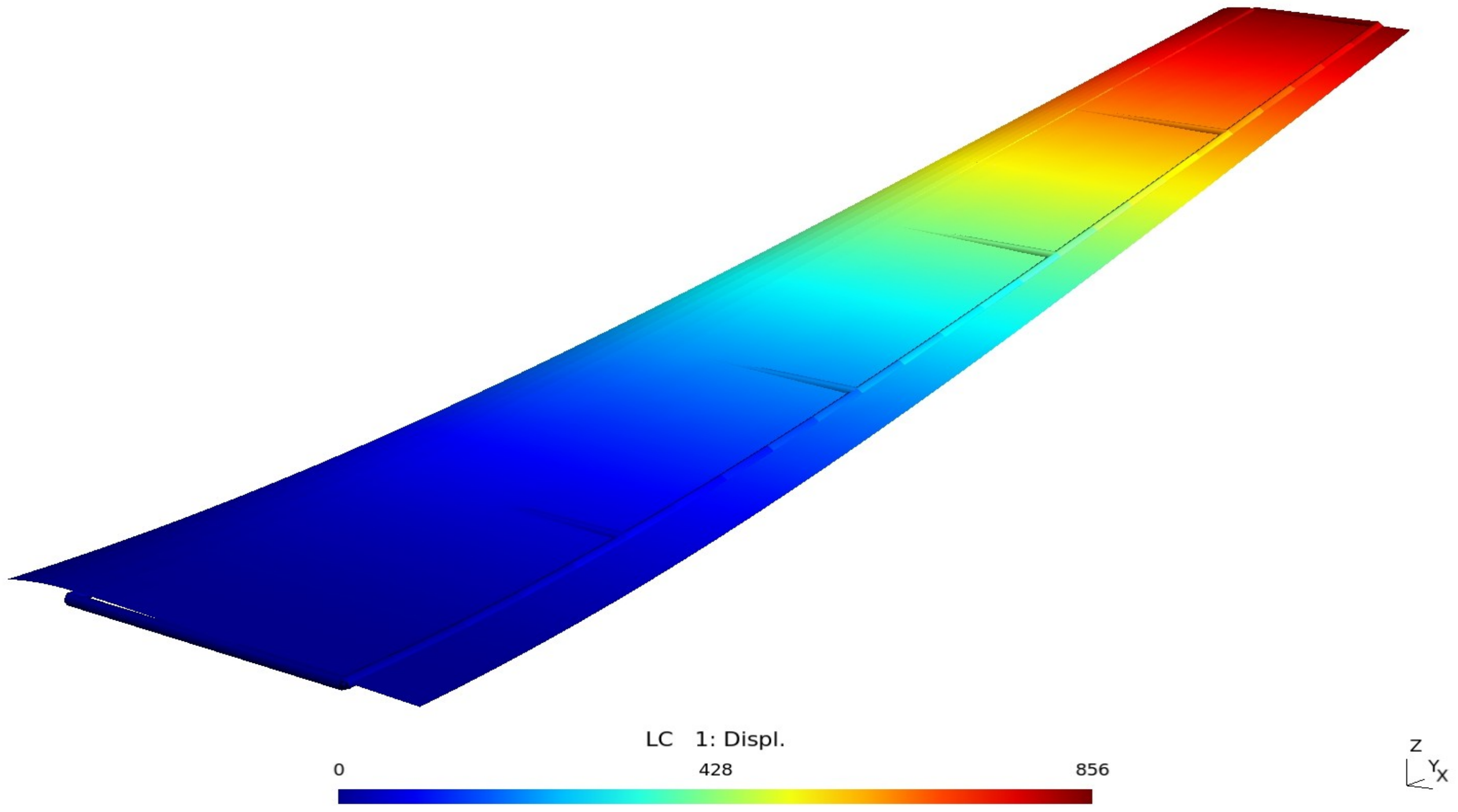
1.4 Beispiel

- Resultierende:

```
Load resultants of aerodynamic component:

  Config. 1: alpha =  2.0°, eta =  0.0°, v = 40.0 m/s
     F = [ 0.000e+00,  0.000e+00,  6.073e+00] kN
     M = [ 2.661e+01, -1.986e+00,  0.000e+00] kNm

  Config. 2: alpha =  2.0°, eta =  5.0°, v = 40.0 m/s
     F = [ 0.000e+00,  0.000e+00,  7.059e+00] kN
     M = [ 3.393e+01, -3.264e+00,  0.000e+00] kNm

Load resultants of solid component:

  Loadcase  1:
     F = [ 0.000e+00,  0.000e+00,  6.073e+00] kN
     M = [ 2.661e+01, -1.986e+00,  0.000e+00] kNm
  Loadcase  2:
     F = [ 0.000e+00,  0.000e+00,  7.059e+00] kN
     M = [ 3.393e+01, -3.264e+00,  0.000e+00] kNm
```

1.4 Beispiel

- Vergleich der Verschiebungen:



1.4 Beispiel

- Bewertung:
  - Die aus dem aerodynamischen Druck resultierenden Kräfte werden durch die Splines korrekt auf die Struktur übertragen.
  - Die Verschiebungen der Struktur werden durch die Splines korrekt auf das aerodynamische Netz übertragen.

1.4 Beispiel

- Statische Divergenz:
  - Der kleinste positive reelle Eigenwert von

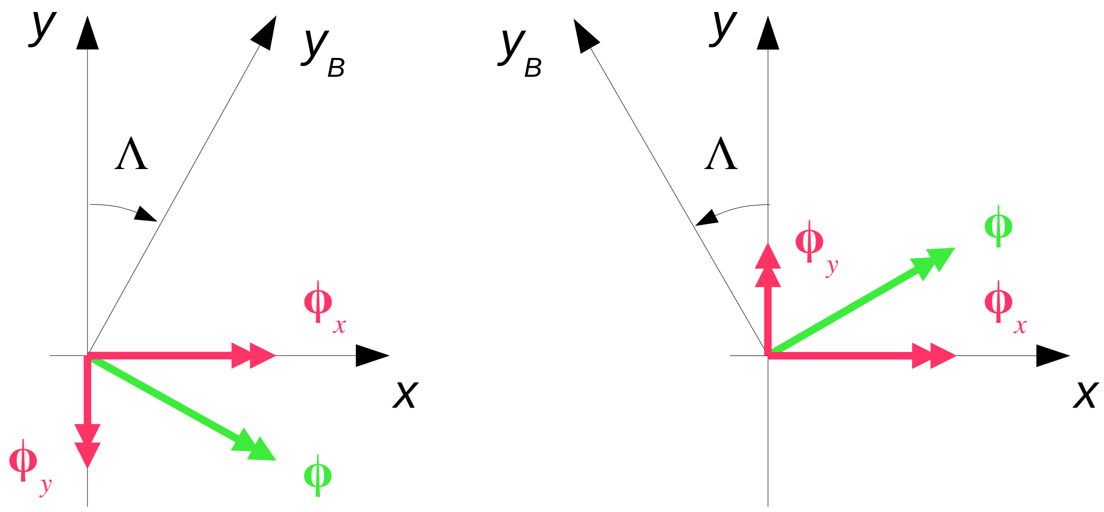
$$\left[K_{LL}\right]\left[u_L\right]=q_\infty\left[Q_{LL}\right]\left[u_L\right]$$

    gibt den Staudruck an, bei dem statische Divergenz auftritt.
  - In Abhängigkeit vom Pfeilungswinkel Λ ergeben sich folgende Werte:

Λ	-10°	0°	10°	
q_D	1,977	3,181	10,08	kPa
v_D	57,17	72,51	129,1	m/s

1.4 Beispiel

- Beim ungepfeilten Flügel steht die Balkenachse senkrecht zur Anströmrichtung. Der Biegewinkel hat keinen Einfluss auf den Anstellwinkel.
- Beim gepfeilten Flügel steht die Balkenachse schräg zur Anströmrichtung. Der Biegewinkel ändert den Anstellwinkel.



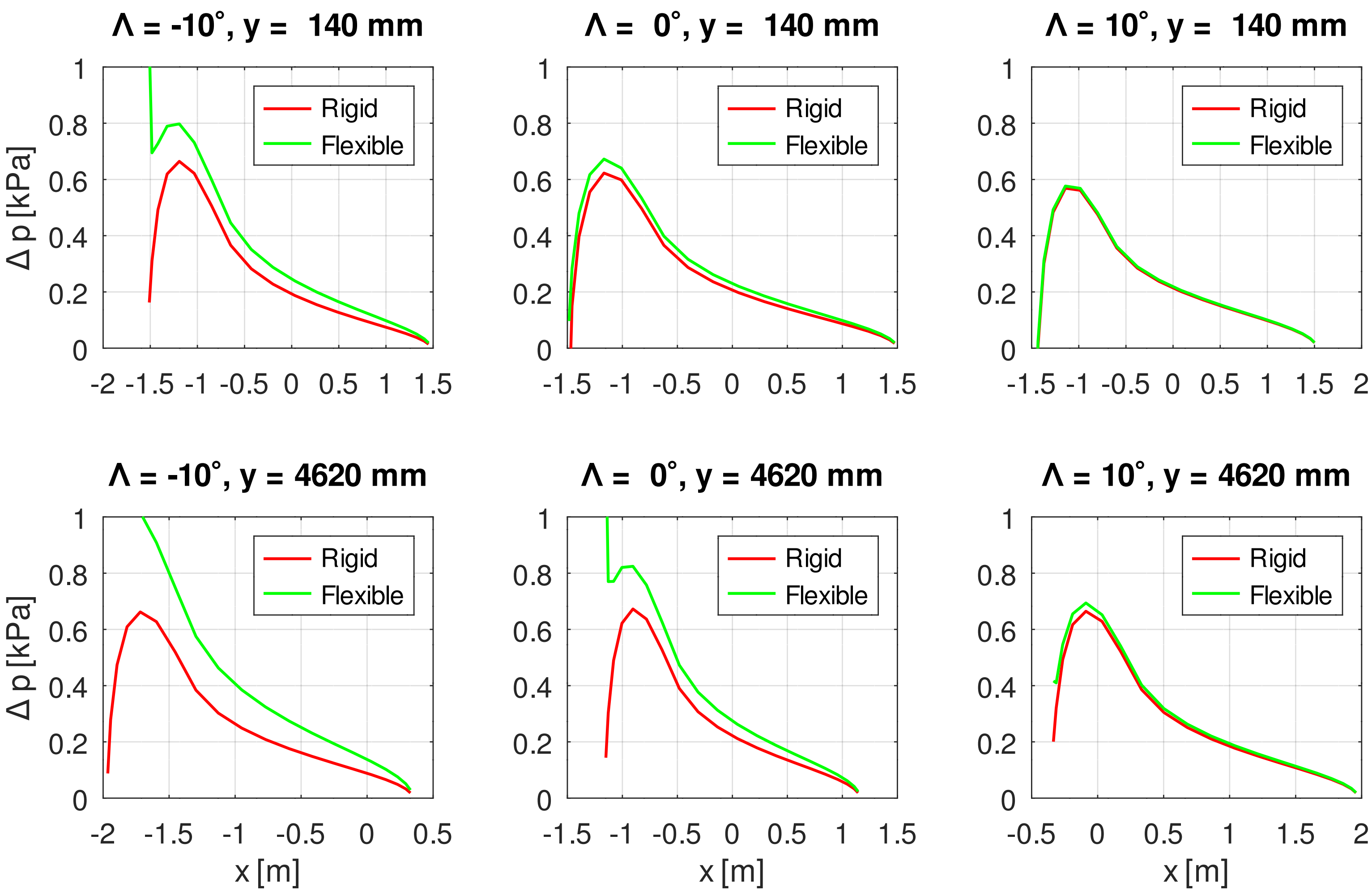
1.4 Beispiel

- Beim rückwärts gepfeilten Flügel (positiver Pfeilungswinkel) verkleinert der Beitrag des Biegewinkels den Anstellwinkel und wirkt deshalb stabilisierend.
- Beim vorwärts gepfeilten Flügel (negativer Pfeilungswinkel) vergrößert der Beitrag des Biegewinkels den Anstellwinkel und wirkt deshalb destabilisierend.

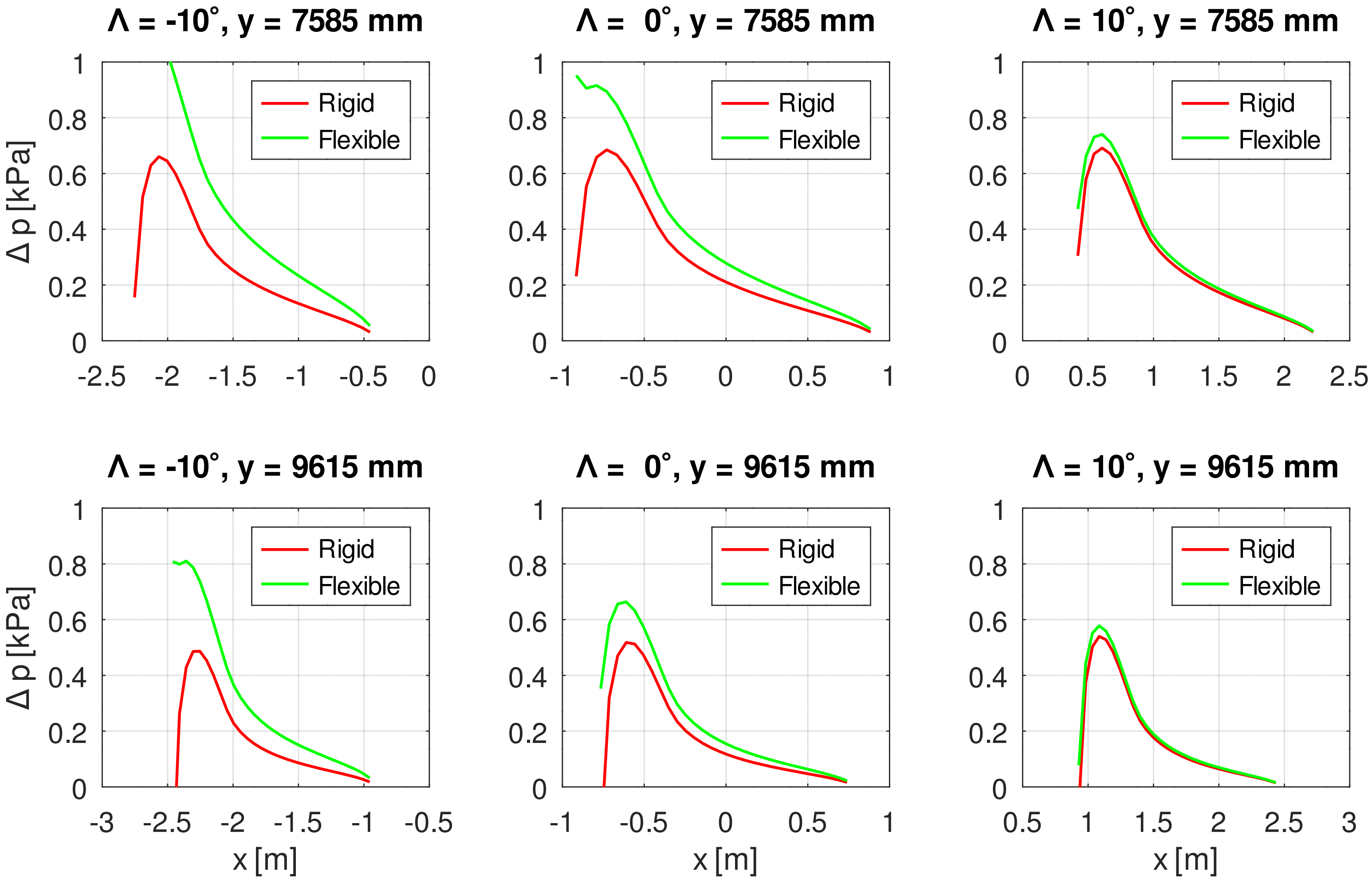
1.4 Beispiel

- Aeroelastische Analysen:
  - Folgende Analysen werden durchgeführt:
    - Berechnung der Druckverteilung ohne Querruderausschlag bei einer Geschwindigkeit von $v = 40 \text{ m/s}$ für alle drei Pfeilungswinkel und Vergleich mit dem starren Flügel
    - Berechnung von Auftriebsbeiwert und Ruderwirkungsfaktor in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit für alle drei Pfeilungswinkel
  - Druckverteilungen:
    - Die folgenden beiden Seiten zeigen die Druckverteilungen in repräsentativen Flügelschnitten für die drei Pfeilungswinkel.
    - Dargestellt ist jeweils der Druck für den starren und den elastischen Flügel.

1.4 Beispiel


Λ = -10°, y = 140 mm
Λ = 0°, y = 140 mm
Λ = 10°, y = 140 mm
Λ = -10°, y = 4620 mm
Λ = 0°, y = 4620 mm
Λ = 10°, y = 4620 mm
Rigid
Flexible
Δ p [kPa]
x [m]

1.4 Beispiel



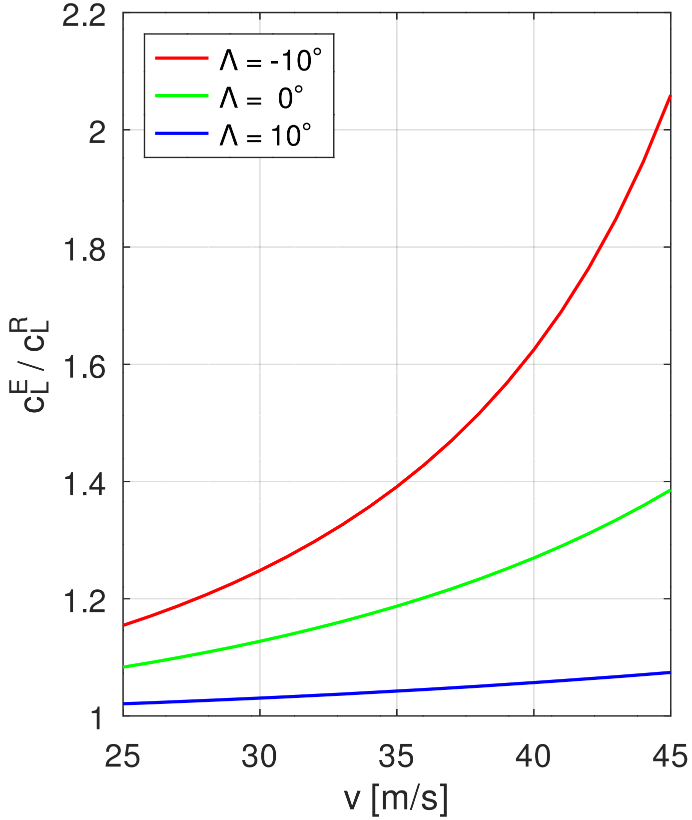
Λ = -10°, y = 7585 mm
Λ = 0°, y = 7585 mm
Λ = 10°, y = 7585 mm
Λ = -10°, y = 9615 mm
Λ = 0°, y = 9615 mm
Λ = 10°, y = 9615 mm
Rigid
Flexible
Δ p [kPa]
x [m]

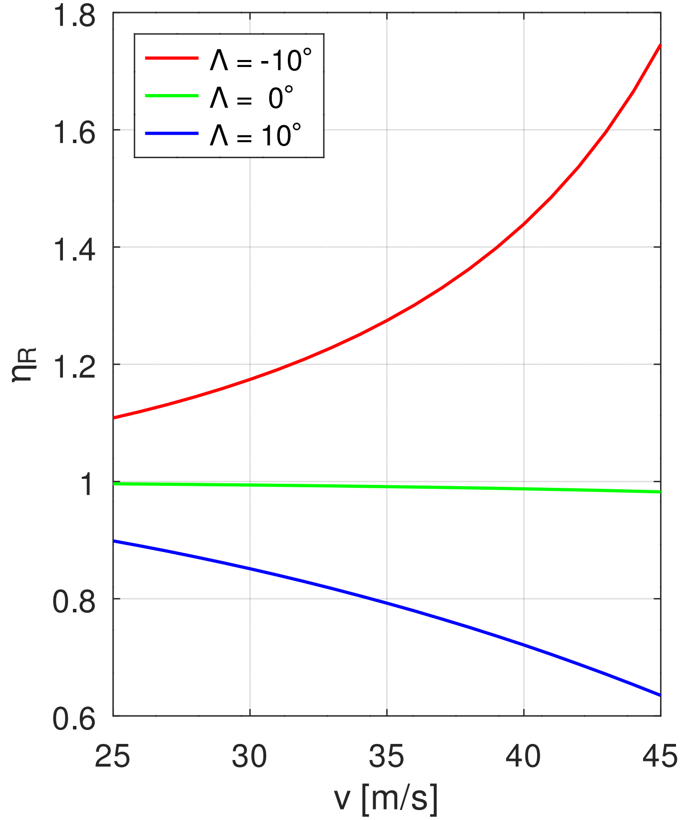
1.4 Beispiel

- Infolge der Torsion nimmt der Druck vor allem im äußeren Bereich des Flügels zu.
- Dieser Effekt ist beim vorwärts gepfeilten Flügel besonders ausgeprägt.

1.4 Beispiel

- Auftriebsbeiwert und Ruderwirkungsfaktor:





1.4 Beispiel

- Auftriebsbeiwert:
  - Der Auftriebsbeiwert nimmt in allen drei Fällen mit zunehmender Anströmgeschwindigkeit zu.
  - Ursache dafür ist die Torsion, die zu einer Vergrößerung des Anstellwinkels führt.
  - Beim vorwärts gepfeilten Flügel wird dieser Effekt durch die Biegung verstärkt, während er beim rückwärts gepfeilten Flügel abgeschwächt wird.

1.4 Beispiel

- Ruderwirksamkeit:
  - Beim geraden und beim rückwärts gepfeilten Flügel nimmt die Ruderwirksamkeit mit zunehmender Geschwindigkeit ab.
  - Ursache dafür ist die durch den Ruderausschlag bewirkte den Anstellwinkel verkleinernde Torsion des Außenflügels.
  - Beim rückwärts gepfeilten Flügel führt die vergrößerte Biegung zu einer zusätzlichen Abnahme des Anstellwinkels.
  - Beim vorwärts gepfeilten Flügel nimmt die Ruderwirksamkeit mit zunehmender Geschwindigkeit zu.
  - Hier überwiegt der den Anstellwinkel vergrößernde Effekt der Biegung, die durch die ausgeschlagene Klappe vergrößert wird, den Effekt der Torsion.