2. Instationäre Profiltheorie

- Untersucht wird wie im stationären Fall ein dünnes Profil in der *xz*-Ebene.
- Im Rahmen einer linearen Theorie genügt für die Berechnung des Auftriebs die Betrachtung der Skelettlinie.

2. Instationäre Profiltheorie

2.1 Formulierung des Randwertproblems

- Aufgabenstellung:
  - Das Störpotential ϕ löst die Potentialgleichung

$$\nabla^2 \phi = 0$$

  - Randbedingungen:
    - Auf der Skelettlinie: $\boldsymbol{n} \cdot \left(\boldsymbol{v}_\infty + \nabla \phi \right) = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}_S$
    - Im Unendlichen: $\boldsymbol{w} = \nabla \phi = \boldsymbol{0}$ für $x \rightarrow -\infty$
    - Dabei ist $\boldsymbol{v}_S$ die Geschwindigkeit, mit der sich die Skelettlinie bewegt.
  - Zusätzlich muss die Druckdifferenz an der Hinterkante null sein (Kutta-Bedingung).

2.1 Formulierung des Randwertproblems

- Linearisierung der Randbedingung:
  - Bei kleinen Anstellwinkeln α gilt für die Anströmgeschwindigkeit: $\boldsymbol{v}_\infty = v_\infty \left(\boldsymbol{e}_x + \alpha\, \boldsymbol{e}_z \right)$
  - Wie im stationären Fall gilt für den Normalenvektor auf der Skelettlinie:

$$\boldsymbol{n} = -\frac{dz_S}{dx}\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_z$$

  - Unter Vernachlässigung von Produkten kleiner Größen folgt:

$$\boldsymbol{n} \cdot \left(\boldsymbol{v}_\infty + \boldsymbol{w} \right) = -v_\infty \left(\frac{dz_S}{dx} - \alpha \right) + w_z$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}_S = \dot{z}_S$$

2.1 Formulierung des Randwertproblems

- Damit gilt für den Abwind: $w_z = \dot{z}_S + v_\infty \left(\frac{dz_S}{dx} - \alpha \right)$

- Mit $z_S(t) = z_{S0} + z(t)$, $w_z(t) = w_{z0} + w_{zt}(t)$

  folgt: $w_{z0} + w_{zt}(t) = v_\infty \left(\frac{dz_{S0}}{dx} - \alpha \right) + \dot{z}(t) + v_\infty \frac{dz}{dx}(t)$

- Das Problem lässt sich also aufteilen in eine stationäres und ein instationäres Problem.

2.1 Formulierung des Randwertproblems

- Das stationäre Problem mit der Randbedingung

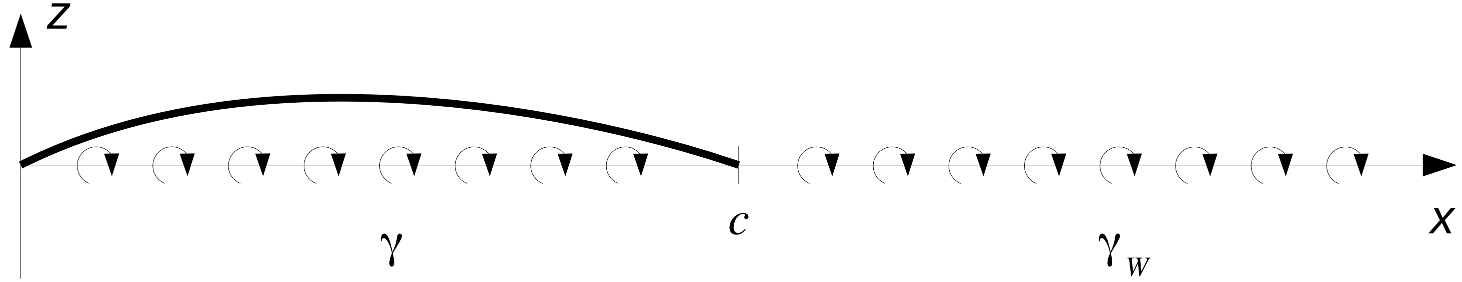
$$w_{z0} = v_\infty \left(\frac{dz_{S0}}{dx} - \alpha \right), \quad 0 \leq x \leq c$$

  wurde in Kapitel 4.1 behandelt.
- Die Randbedingung für das instationäre Problem ist:

$$\boxed{w_{zt}(t) = \dot{z}(t) + v_\infty \frac{dz}{dx}(t), \quad 0 \leq x \leq c}$$

2.2 Integralgleichung für die Wirbelbelegung

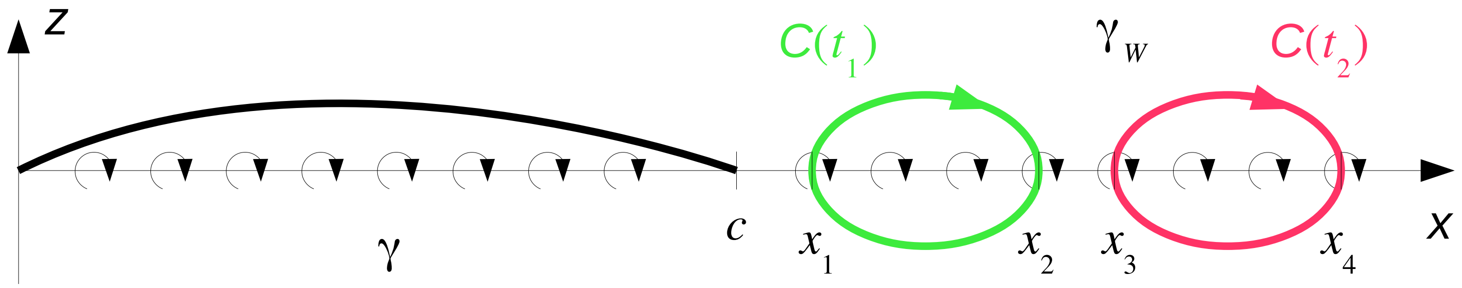
- Zur Lösung des Randwertproblems wird wie im stationären Fall eine Wirbelverteilung entlang der Profilsehne angenommen.
- Da sich die Wirbelverteilung zeitlich ändert, erfordert der Wirbelsatz von Kelvin zusätzliche Wirbel hinter dem Profil, die den Nachlauf modellieren.
- Im Rahmen der linearen Theorie werden diese Wirbel entlang der *x*-Achse angeordnet.



2.2 Integralgleichung für die Wirbelbelegung

- Gleichungen für den Nachlauf:
  - Zunächst wird ein im Nachlauf mitschwimmender Weg betrachtet.
  - Für die Zirkulation gilt:

$$\Gamma(t_1)=\int_{x_1}^{x_2}\gamma_W(x,t_1)\,dx\,,\quad \Gamma(t_2)=\int_{x_3}^{x_4}\gamma_W(x,t_2)\,dx$$



2.2 Integralgleichung für die Wirbelbelegung

- Die Geschwindigkeit im Nachlauf ist ungefähr gleich der ungestörten Anströmgeschwindigkeit.
- Daher gilt: $x_1 \approx x_3 - v_\infty \Delta t, \quad x_2 \approx x_4 - v_\infty \Delta t, \quad \Delta t = t_2 - t_1$
- Der Wirbelsatz von Kelvin lautet:

$$\Gamma(t_2) = \Gamma(t_1) \;:\; \int_{x_3}^{x_4} \gamma_W(x, t_2)\, dx = \int_{x_3 - v_\infty \Delta t}^{x_4 - v_\infty \Delta t} \gamma_W(x, t_1)\, dx$$

- Die Substitution $\bar{x} = x + v_\infty \Delta t$ führt auf

$$\int_{x_3 - v_\infty \Delta t}^{x_4 - v_\infty \Delta t} \gamma_W(x, t_1)\, dx = \int_{x_3}^{x_4} \gamma_W(\bar{x} - v_\infty \Delta t, t_1)\, d\bar{x}$$

2.2 Integralgleichung für die Wirbelbelegung

- Damit folgt:

$$\int_{x_3}^{x_4} \gamma_W(x, t_2)\, dx = \int_{x_3}^{x_4} \gamma_W(x - v_\infty \Delta t, t_1)\, dx$$

- Dabei wurde benutzt, dass die Bezeichnung der Integrationsvariablen frei gewählt werden kann.
- Da diese Beziehung für beliebige Werte von x_3 und x_4 gelten muss, folgt:

$$\gamma_W(x, t_2) = \gamma_W(x - v_\infty \Delta t, t_1)$$

- Für $\Delta t = \dfrac{x-c}{v_\infty}$ gilt: $t_1 = t_2 - \dfrac{x-c}{v_\infty}, \quad x - v_\infty \Delta t = c$

2.2 Integralgleichung für die Wirbelbelegung

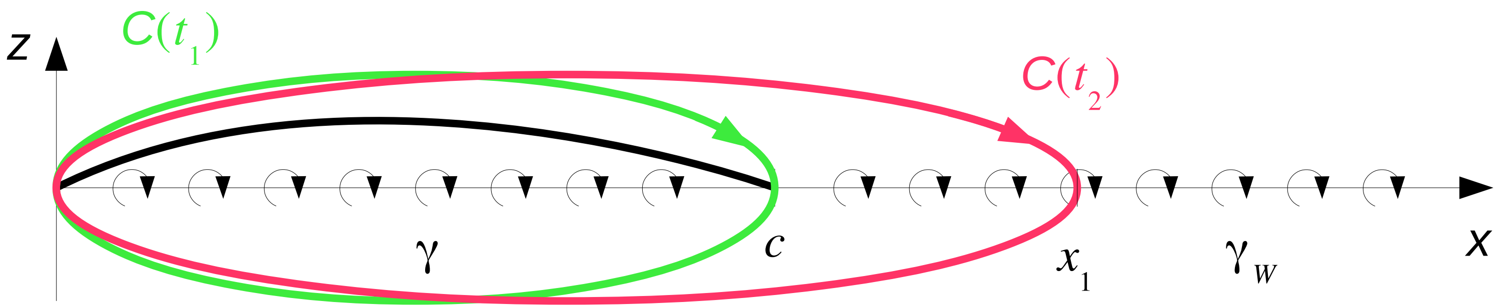
- Damit ist gezeigt:

$$\boxed{\gamma_W(x,t)=\gamma_W\left(c,t-\frac{x-c}{v_\infty}\right),\quad x\geq c}$$

- Die Wirbelstärke im Nachlauf wird durch die Wirbelstärke an der Hinterkante festgelegt.

2.2 Integralgleichung für die Wirbelbelegung

- Zur Ermittlung der Wirbelstärke an der Hinterkante wird ein mitschwimmender Weg betrachtet, der das Profil umfasst:



- Für die Zirkulation gilt:

$$\Gamma(t_1)=\int_0^c \gamma(x,t_1)\,dx\,,\quad \Gamma(t_2)=\int_0^c \gamma(x,t_2)\,dx+\int_c^{x_1} \gamma_W(x,t_2)\,dx$$

$$\text{mit}\quad x_1=c+v_\infty \Delta t\,,\quad \Delta t=t_2-t_1$$

2.2 Integralgleichung für die Wirbelbelegung

- Der Wirbelsatz von Kelvin lautet:

$$\Gamma(t_1)=\Gamma(t_2)\ :\ \int_0^c \gamma(x,t_1)\,dx=\int_0^c \gamma(x,t_2)\,dx+\int_c^{c+v_\infty\Delta t} \gamma_W(x,t_2)\,dx$$

- Mit $\Gamma_0(t)=\int_0^c \gamma(x,t)\,dx$

  folgt: $\Gamma_0(t_2)-\Gamma_0(t_1)=-\int_c^{c+v_\infty\Delta t} \gamma_W(x,t_2)\,dx$

- Γ_0 ist die Zirkulation entlang eines ortsfesten, das Profil umfassenden Weges, der durch die Profilhinterkante verläuft.

2.2 Integralgleichung für die Wirbelbelegung

- Für das Integral über den Nachlauf gilt:

$$\int_c^{c+v_\infty \Delta t} \gamma_W(x, t_2)\, dx = \int_c^{c+v_\infty \Delta t} \gamma_W\left(c, t_2 - \frac{x-c}{v_\infty}\right) dx$$

- Die Substitution $\tau = t_2 - (x-c)/v_\infty$ ergibt

$$\int_c^{c+v_\infty \Delta t} \gamma_W(x, t_2)\, dx = -v_\infty \int_{t_2}^{t_1} \gamma_W(c, \tau)\, d\tau = v_\infty \int_{t_1}^{t_2} \gamma_W(c, \tau)\, d\tau$$

- Mit $\Gamma_0(t_2) - \Gamma_0(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Gamma_0}{d\tau}\, d\tau$

folgt:
$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d\Gamma_0}{d\tau} + v_\infty \gamma_W(c, \tau)\right) d\tau = 0$$

2.2 Integralgleichung für die Wirbelbelegung

- Da die Zeitpunkte t_1 und t_2 beliebig gewählt werden können, muss gelten:

$$\boxed{\gamma_W(c,t) = -\frac{1}{v_\infty}\frac{d\Gamma_0}{dt}}$$

2.2 Integralgleichung für die Wirbelbelegung

- Integralgleichung für die Wirbelbelegung:
  - Für die *z*-Komponente der von der Wirbelbelegung induzierten Geschwindigkeit gilt:

$$w_z(x,z,t) = -\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^c \frac{\gamma(\xi,t)(x-\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2+z^2} + \int_c^\infty \frac{\gamma_W(\xi,t)(x-\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2+z^2}\right)$$

  - Einsetzen der Randbedingung auf der Skelettlinie ergibt eine Integralgleichung für die Wirbelbelegung:

$$\dot{z} + v_\infty \frac{dz}{dx} = w_z(x,0,t) = -\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^c \frac{\gamma(\xi,t)\,d\xi}{x-\xi} + \int_c^\infty \frac{\gamma_W(\xi,t)\,d\xi}{x-\xi}\right)$$

2.2 Integralgleichung für die Wirbelbelegung

- Harmonische Schwingung:
  - Viele zeitliche Vorgänge lassen sich mithilfe der Fourier-Transformation als Integral über harmonische Vorgänge darstellen.
  - Daher bildet die Analyse harmonischer Schwingungen die Grundlage für die Analyse allgemeinerer instationärer Vorgänge.
  - In komplexer Schreibweise gilt für einen harmonischen Vorgang:

$$z(x,t)=\Re\left(Z(x)e^{i\omega t}\right),\quad \dot{z}=\Re\left(i\omega Z(x)e^{i\omega t}\right)$$
$$\gamma(x,t)=\Re\left(\hat{\gamma}(x)e^{i\omega t}\right),\quad \gamma_W(x,t)=\Re\left(\hat{\gamma}_W(x)e^{i\omega t}\right)$$

2.2 Integralgleichung für die Wirbelbelegung

- Dabei sind $Z, \hat{\gamma}$ und $\hat{\gamma}_W$ komplexe Amplituden.
- Aus den Gleichungen für den Nachlauf folgt

$$\hat{\gamma}_W(x)e^{i\omega t}=\hat{\gamma}_W(c)e^{i\omega t}e^{-i\omega(x-c)/v_\infty}=\hat{\gamma}_W(c)e^{i\omega c/v_\infty}e^{-i\omega x/v_\infty}e^{i\omega t}$$

und $\hat{\gamma}_W(c)e^{i\omega t}=-\dfrac{i\omega}{v_\infty}\hat{\Gamma}_0 e^{i\omega t}$ mit $\hat{\Gamma}_0=\displaystyle\int_0^c \hat{\gamma}(x)\,dx$.

- Die Wirbelbelegung im Nachlauf ist periodisch in x.
- Aus

$$\frac{\omega}{v_\infty}(x+\lambda)-\frac{\omega}{v_\infty}x=2\pi$$

folgt für die *Wellenlänge*: $\lambda=2\pi\dfrac{v_\infty}{\omega}$

2.2 Integralgleichung für die Wirbelbelegung

- Mit der *reduzierten Frequenz*

$$k=\frac{\omega c}{2 v_\infty}$$

gilt: $\lambda=\pi c/k$

- Die Integralgleichung für die Wirbelbelegung lautet:

$$2ik\frac{Z}{c}+\frac{dZ}{dx}=-\frac{1}{2\pi v_\infty}\left(\int_0^c \frac{\hat{\gamma}(\xi)\,d\xi}{x-\xi}-2ik\,e^{2ik}\frac{\hat{\Gamma}_0}{c}\int_c^\infty \frac{e^{-2ik\xi/c}}{x-\xi}\,d\xi\right)$$

$$\hat{\Gamma}_0=\int_0^c \hat{\gamma}(\xi)\,d\xi$$

2.2 Integralgleichung für die Wirbelbelegung

- Berechnung des Nachlaufintegrals:
  - Das Nachlaufintegral lässt sich mithilfe der Integralexponentialfunktion berechnen.
  - Zunächst gilt:

$$I_W(x)=\int_c^\infty \frac{e^{-2ik\xi/c}}{x-\xi}\,d\xi=-e^{-2ikx/c}\int_c^\infty \frac{e^{-2ik(\xi-x)/c}}{2ik(\xi-x)/c}\,\frac{2ik}{c}\,d\xi$$

  - Die Substitution

$$u=2ik(\xi-x)/c\,,\quad du=2ik\,d\xi/c\,,\quad u_0=2ik(c-x)/c$$

  ergibt:

$$I_W(x)=-e^{-2ikx/c}\int_{u_0(x)}^\infty \frac{e^{-u}\,du}{u}$$

2.2 Integralgleichung für die Wirbelbelegung

- Mit der *Integralexponentialfunktion*

$$E_1(z)=\int_z^\infty \frac{e^{-u}du}{u}$$

gilt: $$I_W(x)=-e^{-2ikx/c}E_1\left(\frac{2ik(c-x)}{c}\right)$$

- Mit $F(x)=\frac{2ik}{c}e^{2ik}I_W(x)=-\frac{2ik}{c}e^{2ik(c-x)/c}E_1\left(\frac{2ik(c-x)}{c}\right)$

lautet die Integralgleichung:

$$2ik\frac{Z}{c}+\frac{dZ}{dx}=\frac{1}{2\pi v_\infty}\left(\int_0^c \frac{\hat{\gamma}(\xi)d\xi}{\xi-x}+F(x)\hat{\Gamma}_0\right),\quad \hat{\Gamma}_0=\int_0^c \hat{\gamma}(\xi)d\xi$$

2.2 Integralgleichung für die Wirbelbelegung

- Druckverteilung:
  - Mit $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_\infty+\boldsymbol{w}$ und $\Phi=\Phi_\infty+\phi$ folgt unter Vernachlässigung von Produkten kleiner Größen wie im stationären Fall für die Druckbeiwerte auf der Ober- und der Unterseite der Skelett-linie:

$$c_{po}=-2\frac{w_{ox}}{v_\infty}-\frac{2}{v_\infty^2}\frac{\partial\phi_o}{\partial t},\quad c_{pu}=-2\frac{w_{ux}}{v_\infty}-\frac{2}{v_\infty^2}\frac{\partial\phi_u}{\partial t}$$

  - Wie im stationären Fall lässt sich zeigen:

$$w_{ox}(x,t)=\frac{1}{2}\gamma(x,t),\quad w_{ux}(x,t)=-\frac{1}{2}\gamma(x,t)$$

2.2 Integralgleichung für die Wirbelbelegung

- Mit

$$\phi_o(x,t)=\int_0^x \frac{\partial \phi_o}{\partial x}(\xi,t)\,d\xi=\int_0^x w_{ox}(\xi,t)\,d\xi=\frac{1}{2}\int_0^x \gamma(\xi,t)\,d\xi$$

gilt für den Druckbeiwert auf der Oberseite:

$$c_{po}(x,t)=-\frac{\gamma(x,t)}{v_\infty}-\frac{1}{v_\infty^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x \gamma(\xi,t)\,d\xi$$

- Für den Druckbeiwert auf der Unterseite folgt entsprechend:

$$c_{pu}(x,t)=\frac{\gamma(x,t)}{v_\infty}+\frac{1}{v_\infty^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x \gamma(\xi,t)\,d\xi$$

2.2 Integralgleichung für die Wirbelbelegung

- Damit gilt für die Differenz der Druckbeiwerte:

$$\Delta c_p(x,t)=c_{pu}(x,t)-c_{po}(x,t)=2\left(\frac{\gamma(x,t)}{v_\infty}+\frac{1}{v_\infty^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x \gamma(\xi,t)\,d\xi\right)$$

- An der Hinterkante gilt:

$$\Delta c_p(c,t)=\frac{2}{v_\infty}\left(\gamma(c,t)+\frac{1}{v_\infty}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^c \gamma(\xi,t)\,d\xi\right)$$

- Mit $\gamma(c,t)=\gamma_W(c,t)=-\frac{1}{v_\infty}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^c \gamma(\xi,t)\,d\xi$

  folgt: $\Delta c_p(c,t)=0$

2.2 Integralgleichung für die Wirbelbelegung

- Für eine harmonische Schwingung folgt:

$$\Delta \hat{c}_p(x) = \frac{2}{v_\infty}\left(\hat{\gamma}(x) + \frac{i\omega}{v_\infty}\int_0^x \hat{\gamma}(\xi)\, d\xi\right)$$

- Mit der reduzierten Frequenz k gilt:

$$\boxed{\Delta \hat{c}_p(x) = \frac{2}{v_\infty}\left(\hat{\gamma}(x) + \frac{2ik}{c}\int_0^x \hat{\gamma}(\xi)\, d\xi\right)}$$

2.3 Analytische Lösung

- Wie im stationären Fall kann die Integralgleichung mithilfe eines Reihenansatzes analytisch gelöst werden.
- Reihenansatz:
  - Wie im stationären Fall wird der Winkel θ als neue Variable eingeführt:

$$x = \frac{c}{2}\left(1 + \cos(\theta)\right)$$

  - Der Abwind wird in eine Fourier-Reihe entwickelt:

$$2\,i\,k\,\frac{Z}{c} + \frac{dZ}{dx} = \frac{1}{2}\hat{W}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{W}_n \cos(n\,\theta)$$

mit

$$\hat{W}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(2\,i\,k\,\frac{Z}{c} + \frac{dZ}{dx}\right)\cos(n\,\theta)\,d\,\theta$$

2.3 Analytische Lösung

- Nach einer längeren komplizierten Rechnung (Küssner, 1936) folgt

$$\Delta \hat{c}_p(\theta) = -2\left(\hat{P}_0 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \hat{P}_n \sin(n\theta)\right)$$

mit

$$\hat{P}_0 = C(k)\left(\hat{W}_0 + \hat{W}_1\right) - \hat{W}_1, \quad \hat{P}_n = \frac{ik}{2n}\hat{W}_{n-1} + \hat{W}_n - \frac{ik}{2n}\hat{W}_{n+1}$$

- Dabei ist

$$C(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + i H_0^{(2)}(k)}$$

die Theodorsen-Funktion.

2.3 Analytische Lösung

- Auftrieb und Moment:
  - Auftrieb und Moment können wie im stationären Fall berechnet werden.
  - Für den Auftriebsbeiwert gilt:

$$\hat{c}_L = \frac{1}{c}\int_0^c \Delta\hat{c}_p\, dx = -\pi\left(\hat{P}_0 + \hat{P}_1\right)$$

  - Für den Momentenbeiwert bezüglich dem Neutralpunkt gilt:

$$\hat{c}_{M_0} = \frac{1}{c^2}\int_0^c \left(\frac{c}{4} - x\right)\Delta\hat{c}_p(x)\, dx = \frac{\pi}{4}\left(\hat{P}_1 + \hat{P}_2\right)$$

2.3 Analytische Lösung

- Zusammenfassung:
  - Koeffizienten: $\hat{W}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(2\,i\,k\,\frac{Z}{c} + \frac{dZ}{dx}\right)\cos(n\theta)\,d\theta$

$$\hat{P}_0 = C(k)\left(\hat{W}_0 + \hat{W}_1\right) - \hat{W}_1 , \quad \hat{P}_n = \frac{i\,k}{2\,n}\hat{W}_{n-1} + \hat{W}_n - \frac{i\,k}{2\,n}\hat{W}_{n+1}$$

  - Druckbeiwert: $\Delta\hat{c}_P = -2\left(\hat{P}_0 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\hat{P}_n \sin(n\theta)\right)$
  - Auftriebsbeiwert: $\hat{c}_L = -\pi\left(\hat{P}_0 + \hat{P}_1\right)$
  - Momentenbeiwert: $\hat{c}_{M_0} = \frac{\pi}{4}\left(\hat{P}_1 + \hat{P}_2\right)$

2.3 Analytische Lösung

- Beispiel: Schlagschwingung
  - Bei einer Schlagschwingung schwingt das Profil translatorisch in vertikaler Richtung: $Z = h = const$.
  - Für die Koeffizienten folgt:

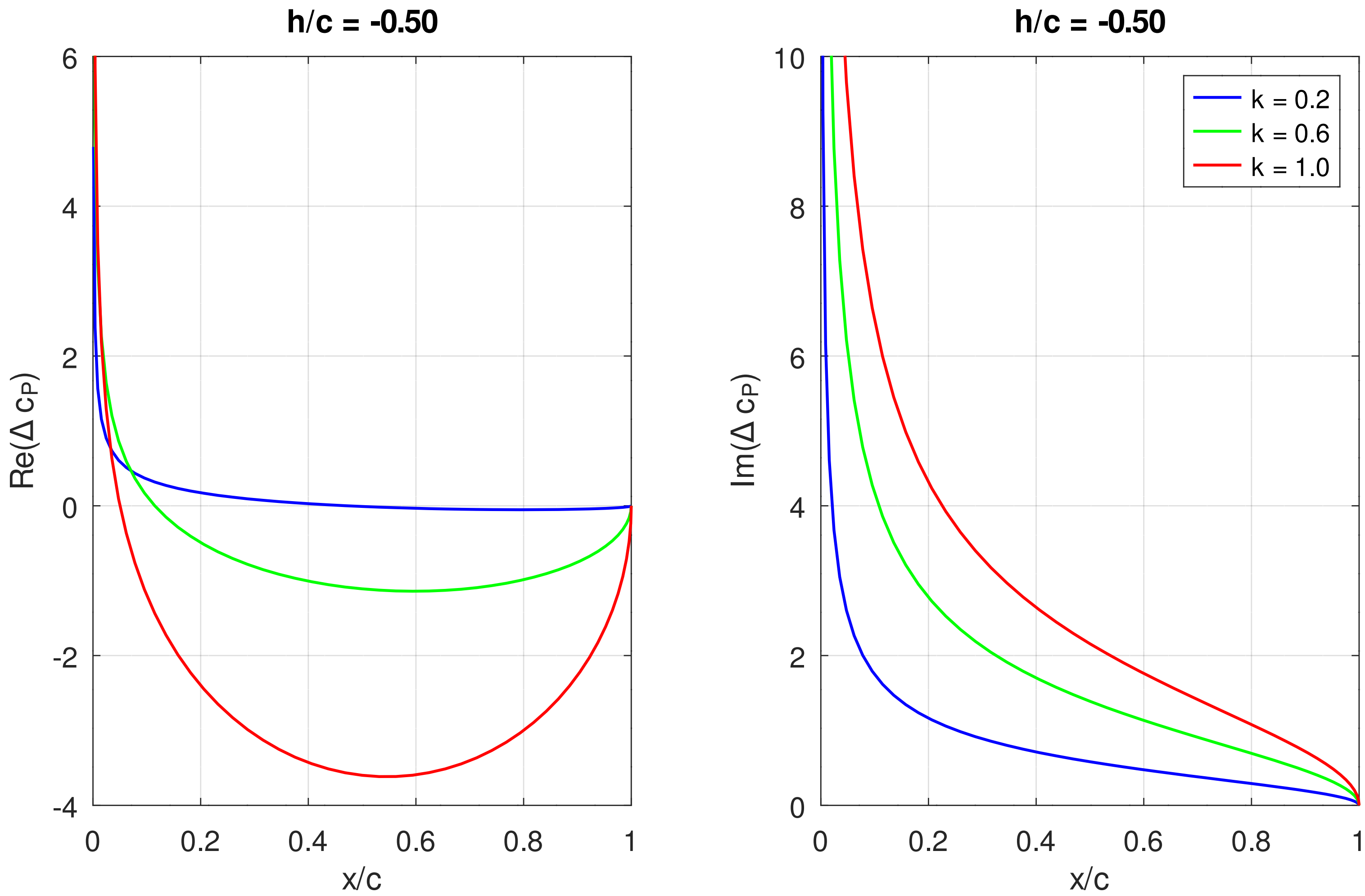
$$\hat{W}_0 = 4 i k \frac{h}{c}, \quad \hat{W}_n = 0, \quad n > 0$$

$$\hat{P}_0 = 4 i k \frac{h}{c} C(k), \quad \hat{P}_1 = -2 k^2 \frac{h}{c}, \quad \hat{P}_n = 0, \quad n > 1$$

  - Damit gilt für den Druckbeiwert:

$$\Delta \hat{c}_P = -8 \frac{h}{c} \left(i k C(k) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - k^2 \sin(\theta) \right)$$

2.3 Analytische Lösung



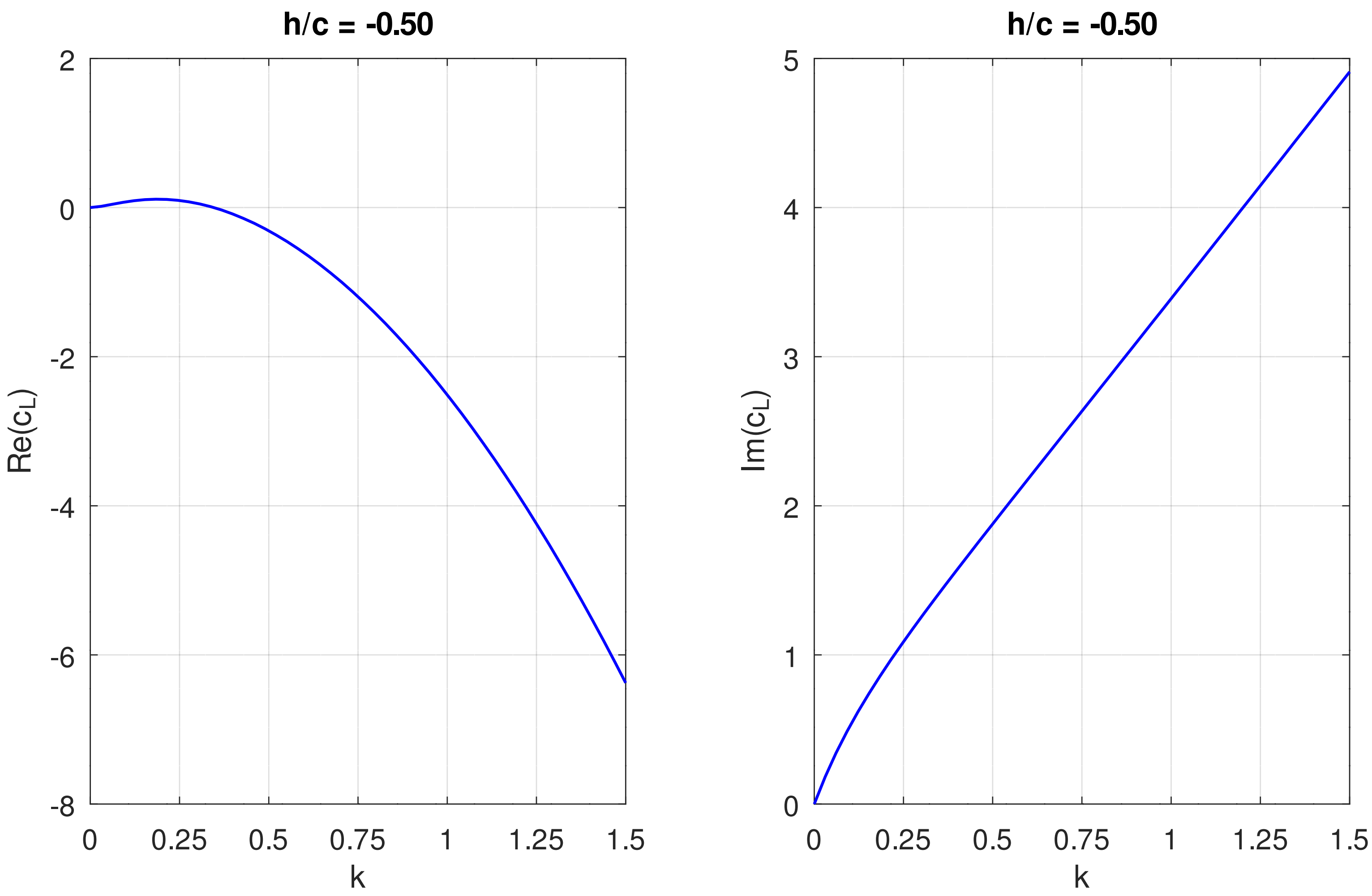
2.3 Analytische Lösung

- Für den Auftriebs- und den Momentenbeiwert folgt:

$$\hat{c}_L = 2\pi\left(k^2 - 2\,i\,k\,C(k)\right)\frac{h}{c}, \quad \hat{c}_{M_0} = -\frac{\pi}{2}k^2\frac{h}{c}$$

- Die Terme, die proportional zu k^2 sind, werden durch die Beschleunigung der umgebenden Luft verursacht.
- Der Term, der die Theodorsen-Funktion enthält, beschreibt den Beitrag der Zirkulation zum Auftrieb.
- Der zirkulatorische Auftrieb liefert keinen Beitrag zum Moment um den Neutralpunkt des Profils.

2.3 Analytische Lösung



2.3 Analytische Lösung

- Mit der Flügelfläche S folgt für den Auftrieb und das Moment:

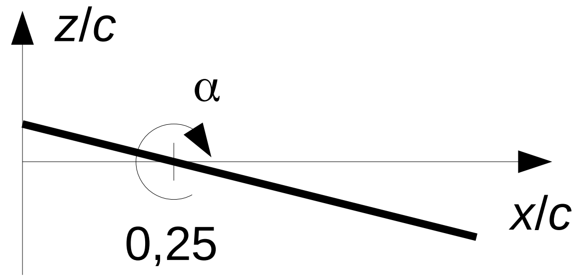
$$\hat{L} = q_\infty S \hat{c}_L = 2\pi q_\infty S k^2 \left(1 - \frac{2i}{k} C(k)\right) \frac{h}{c}$$

$$\hat{M} = q_\infty S c \hat{c}_{M_0} = -\pi q_\infty S c \frac{k^2}{2} \frac{h}{c}$$

- Diese Formeln stimmen mit den in Kapitel 1.3 angegebenen überein.

2.3 Analytische Lösung

- Beispiel: Drehschwingung
  - Das Profil führt eine Drehschwingung um den Neutralpunkt aus:



$$Z(x) = -\hat{\alpha}\left(x - \frac{c}{4}\right), \quad \frac{dZ}{dx} = -\hat{\alpha}$$

  - Für den Abwind gilt:

$$2ik\frac{Z}{c} + \frac{dZ}{dx} = -\hat{\alpha}\left(1 + 2ik\left(\frac{x}{c} - \frac{1}{4}\right)\right)$$

$$\frac{x}{c} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(\theta)\right) \;\rightarrow\; 2ik\frac{Z}{c} + \frac{dZ}{dx} = -\hat{\alpha}\left(1 + ik\left(\frac{1}{2} + \cos(\theta)\right)\right)$$

2.3 Analytische Lösung

- Für die Koeffizienten folgt:

$$\hat{W}_0 = -(2 + i\,k)\,\hat{\alpha}\,,\quad \hat{W}_1 = -i\,k\,\hat{\alpha}\,,\quad \hat{W}_n = 0\,,\quad n > 1$$

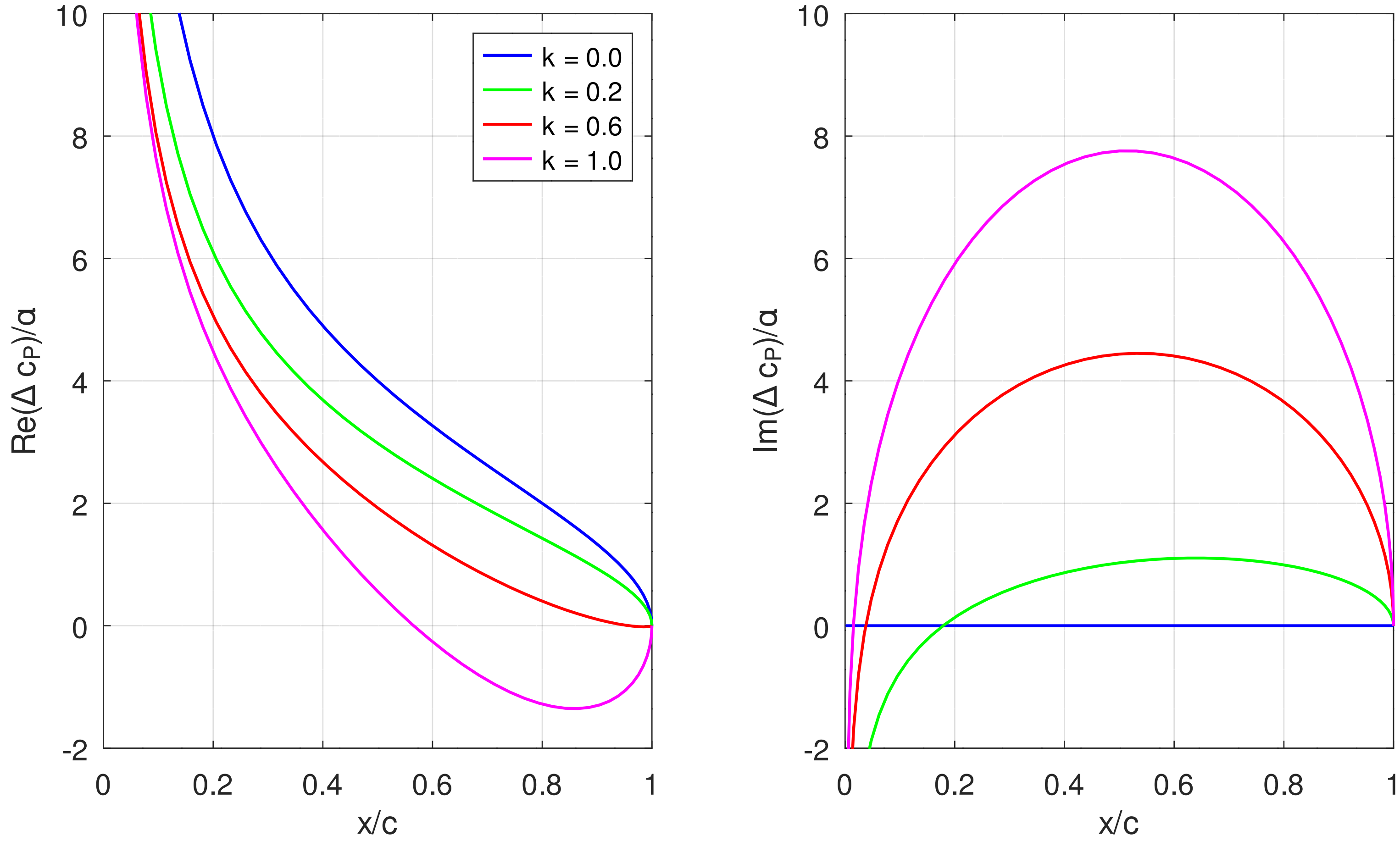
$$\hat{P}_0 = -2(1 + i\,k)\,C(k)\,\hat{\alpha} + i\,k\,\hat{\alpha}\,,\quad \hat{P}_n = 0\,,\quad n > 2$$

$$\hat{P}_1 = -\frac{i\,k}{2}(2 + i\,k)\,\hat{\alpha} - i\,k\,\hat{\alpha} = \left(\frac{k^2}{2} - 2\,i\,k\right)\hat{\alpha}\,,\quad \hat{P}_2 = -\frac{i\,k}{4}\,i\,k\,\hat{\alpha} = \frac{k^2}{4}\,\hat{\alpha}$$

- Der Druckbeiwert berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\Delta\hat{c}_P &= -2\,\hat{P}_0 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - 4\,\hat{P}_1 \sin(\theta) - 4\,\hat{P}_2 \sin(2\,\theta)\\ &= \left[\left(4(1 + i\,k)\,C(k) - 2\,i\,k\right)\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - \left(2\,k^2 - 8\,i\,k\right)\sin(\theta) - k^2 \sin(2\,\theta)\right]\hat{\alpha}\end{aligned}$$

2.3 Analytische Lösung



2.3 Analytische Lösung

- Für den Auftriebs- und Momentenbeiwert folgt:

$$\hat{c}_L = \pi \left(2 \left(1 + i\,k \right) C(k) + i\,k - \frac{k^2}{2} \right) \hat{\alpha}\,, \quad \hat{c}_{M_0} = \frac{\pi}{16} \left(3\,k^2 - 8\,i\,k \right) \hat{\alpha}$$

- Damit gilt für Auftrieb und Moment:

$$\hat{L} = q_\infty S\, \hat{c}_L = \pi\, q_\infty S\, k^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{k} \left(1 + 2\,C(k) \right) + \frac{2\,C(k)}{k^2} \right) \hat{\alpha}$$

$$\hat{M} = q_\infty S\, c\, \hat{c}_{M_0} = \pi\, q_\infty S\, c\, k^2 \left(\frac{3}{16} - \frac{i}{2\,k} \right) \hat{\alpha}$$

- Auch diese Formeln stimmen mit den in Kapitel 1.3 angegebenen überein.

2.4 Methode der diskreten Wirbel

- Methode:
  - Wie im stationären Fall lässt sich ein numerisches Verfahren entwickeln, indem die Wirbelverteilung durch diskrete Wirbel in den Viertelpunkten der Profilintervalle approximiert wird.
  - Die Kontrollpunkte befinden sich in den Dreiviertelpunkten der Profilintervalle.
  - Zusätzlich muss das Nachlaufintegral berücksichtigt werden, das mithilfe der Integralexponentialfunktion berechnet werden kann.

2.4 Methode der diskreten Wirbel

- Damit ergeben sich die folgenden Gleichungen für die Wirbelstärken:

$$v_\infty\left(2\,i\,k\,\frac{Z\left(x_{Cm}\right)}{c}+\frac{dZ}{dx}\left(x_{Cm}\right)\right)=\frac{1}{2\,\pi}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\hat{\Gamma}_n}{x_{\Gamma\,n}-x_{Cm}}+F\left(x_{Cm}\right)\hat{\Gamma}_0\right),$$

$$m=1,\ldots,N$$

$$\hat{\Gamma}_0=\sum_{n=1}^{N}\hat{\Gamma}_n$$

mit $F\left(x\right)=-\frac{2\,i\,k}{c}\,e^{2\,i\,k\left(c-x_{Cm}\right)/c}\,E_1\left(\frac{2\,i\,k\left(c-x_{Cm}\right)}{c}\right)$

- Zur Berechnung der Integralexponentialfunktion steht in GNU Octave die Funktion **`expint`** zur Verfügung.

2.4 Methode der diskreten Wirbel

- Das bei der Berechnung des Druckbeiwerts auftretende Integral wird durch die Rechteckregel approximiert:

$$\Delta \hat{c}_P\left(x_{\Gamma n}\right) \approx \frac{2}{v_\infty}\left(\frac{\hat{\Gamma}_n}{x_{n+1}-x_n} + \frac{2ik}{c}\sum_{m=1}^{n-1}\hat{\Gamma}_m\right)$$

- Für $n=1$ ist die Summe null.
- Auftriebsbeiwert und Momentenbeiwert bezüglich dem Neutralpunkt berechnen sich zu

$$\hat{c}_L = \frac{1}{c}\int_0^c \Delta\hat{c}_p\, dx \approx \frac{1}{c}\sum_{n=1}^{N}\Delta\hat{c}_{Pn}\Delta x_n$$

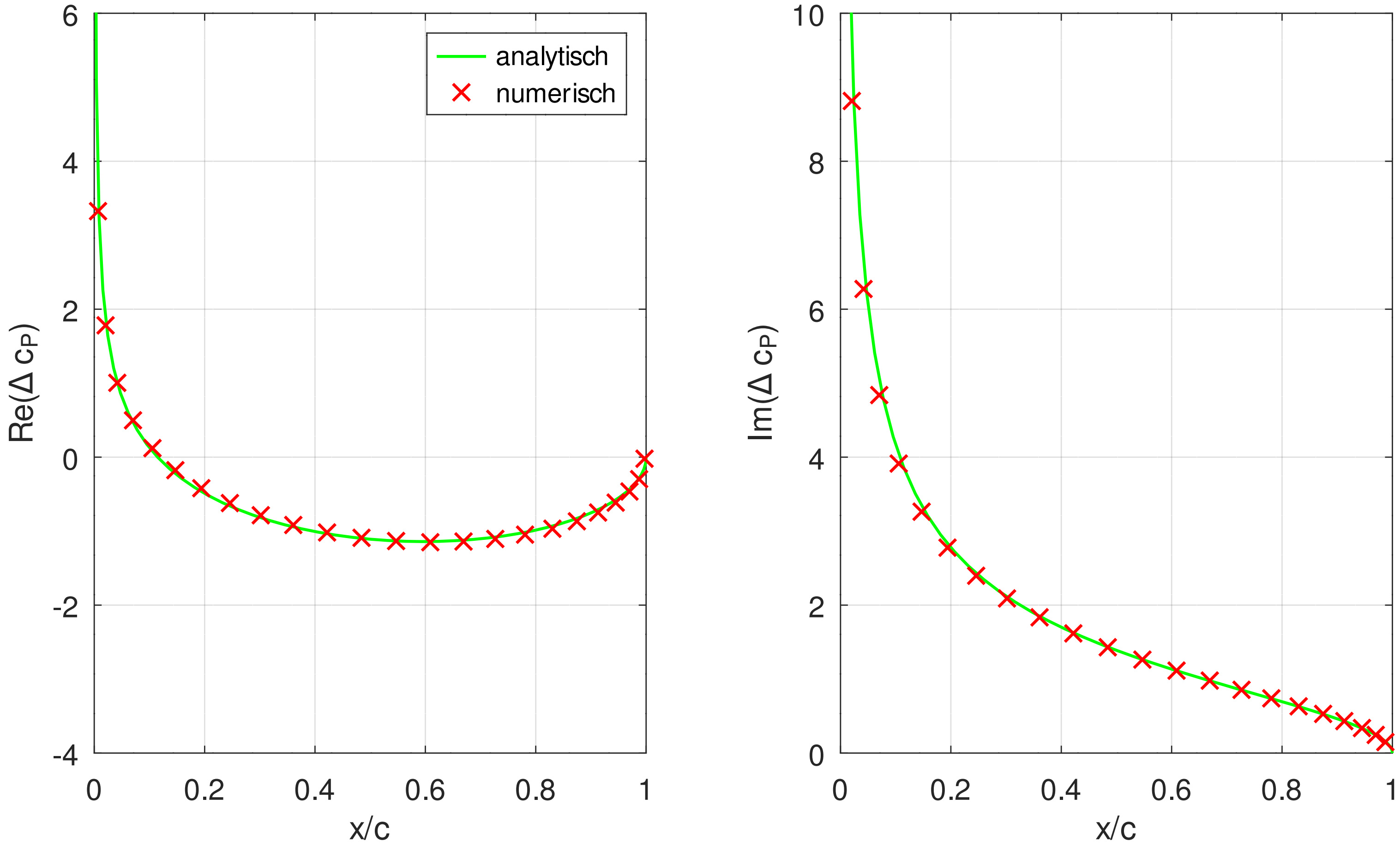
$$\hat{c}_{M_0} = \frac{1}{c^2}\int_0^c \left(\frac{c}{4}-x\right)\Delta\hat{c}_P\, dx \approx \frac{1}{c^2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{c}{4}-x_{\Gamma n}\right)\Delta\hat{c}_{Pn}\Delta x_n$$

2.4 Methode der diskreten Wirbel

- Beispiel:
  - Für die Schlagschwingung und die Drehschwingung wird die Druckverteilung für eine reduzierte Frequenz von $k=0{,}6$ mit der Methode der diskreten Wirbel berechnet und mit der analytischen Lösung verglichen.
  - Die Amplitude der Schlagschwingung beträgt $-0{,}5c$.
  - Die folgenden Diagramme zeigen, dass sich bereits mit 25 diskreten Wirbeln eine gute Übereinstimmung ergibt.

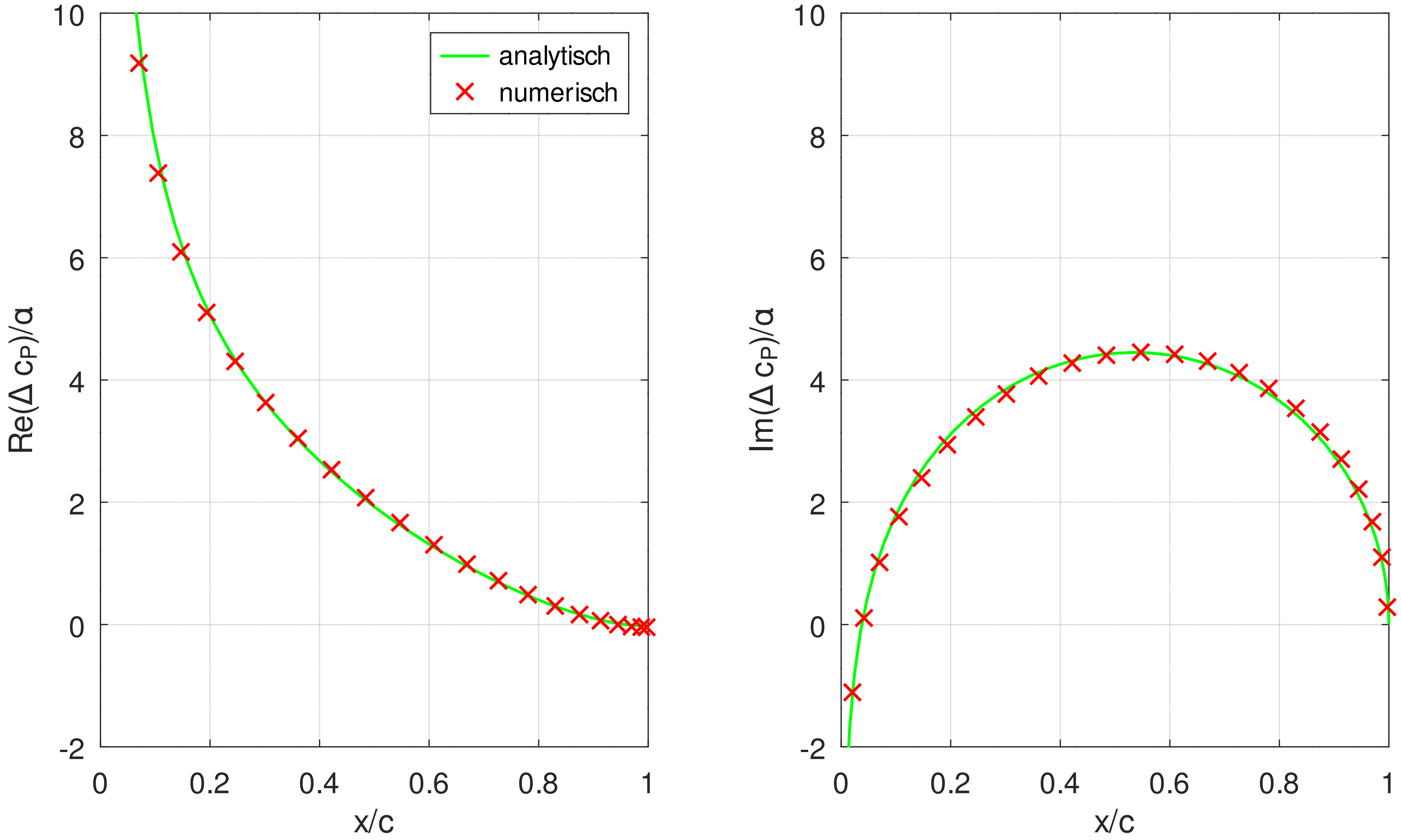
2.4 Methode der diskreten Wirbel

- Druckbeiwert für die Schlagschwingung:



2.4 Methode der diskreten Wirbel

- Druckbeiwert für die Drehschwingung:



2.4 Methode der diskreten Wirbel

- Beispiel:
  - Für die Drehschwingung werden Auftriebsbeiwert und Momentenbeiwert in Abhängigkeit von der reduzierten Frequenz berechnet.
  - Das Ergebnis auf der folgenden Seite zeigt eine gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung.

2.4 Methode der diskreten Wirbel

- Ergebnis: