3. Flügel endlicher Länge

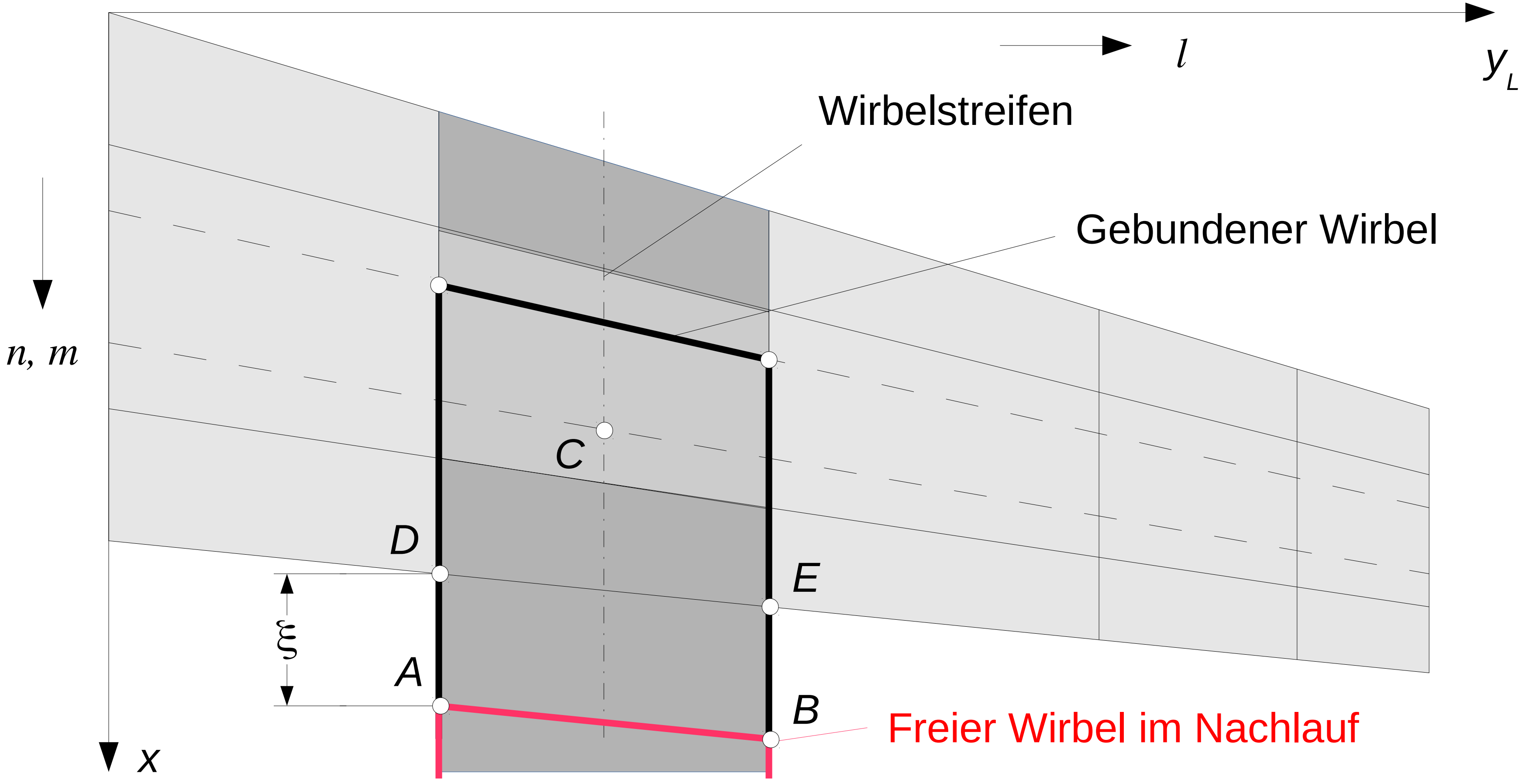
- Reduzierte Frequenz:
  - Beim Flügel endlicher Länge wird als Referenzlänge c_{ref} zur Definition der reduzierten Frequenz in der Regel die Profiltiefe an der Flügelwurzel gewählt.

3. Flügel endlicher Länge

3.1 Instationäres Wirbelgitterverfahren

- Methode:
  - Wie im stationären Fall lässt sich die Methode der diskreten Wirbel zu einem Wirbelgitterverfahren für die Berechnung von Flügeln endlicher Länge erweitern.
  - Zusätzlich zu den gebundenen Hufeisenwirbeln müssen im Nachlauf Hufeisenwirbel angeordnet werden.

3.1 Instationäres Wirbelgitterverfahren



3.1 Instationäres Wirbelgitterverfahren

- Ermittlung der Wirbelstärken:
  - An den Kontrollpunkten muss gelten:

$$\sum_{n=1}^{N} C_{mn} \frac{\hat{\Gamma}_n}{v_\infty} - 2\,i\,k \sum_{l=1}^{S} C_{ml}^{W} \frac{\hat{\Gamma}_l^W}{v_\infty} = \frac{\boldsymbol{W}_m \cdot \boldsymbol{n}_m}{v_\infty}, \quad m = 1, \ldots, N$$

  - Dazu kommt die Bedingung für die Nachlaufwirbel:

$$\sum_{\mu=1}^{N_l} \hat{\Gamma}_\mu - \hat{\Gamma}_l^W = 0$$

  - Dabei ist N die Anzahl der Wirbeltrapeze, S die Anzahl der Wirbelstreifen und N_l die Anzahl der Wirbeltrapeze im l-ten Wirbelstreifen.

3.1 Instationäres Wirbelgitterverfahren

- Die Koeffizienten C_{mn} stimmen mit denen des stationären Wirbelgitterverfahrens überein, s. Kap. 4.2:

$$C_{mn}=\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{m}}\cdot\left(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{AB}}\left(A_n,B_n,C_m\right)+\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{B}}\left(B_n,C_m\right)-\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{A}}\left(A_n,C_m\right)\right)$$

- Die Koeffizienten C_{ml}^W beschreiben den Beitrag des Nachlaufs des l-ten Wirbelstreifens zum Abwind am m-ten Kontrollpunkt:

$$C_{ml}^W=\int_0^\infty \boldsymbol{n}_m\cdot\boldsymbol{v}_{ml}(\xi)\,e^{-2ik\xi/c}\,d\xi$$

- Dabei ist $\boldsymbol{v}_{ml}(\xi)$ die Geschwindigkeit, die von einem Hufeisenwirbel mit der Wirbelstärke 1, der von der Hinterkante den Abstand ξ hat, am m-ten Kontrollpunkt induziert wird.

3.1 Instationäres Wirbelgitterverfahren

- Mit den Gleichungen für den Hufeisenwirbel folgt nach längerer, aber elementarer Rechnung

$$C_{ml}^{W} = \boldsymbol{n}_m \cdot \left(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{E}} - \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{DE}} \right)$$

mit

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{Q}}(C) = \frac{1}{4\pi} \frac{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{QC}}}{\left| \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{QC}} \right|^2} I_S(Q, C), \quad Q = D, E$$

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{DE}}(C) = \frac{\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{DC}} \times \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{EC}}}{4\pi} I_{F1}(D, E, C) + \frac{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{DE}}}{4\pi} I_{F2}(D, E, C)$$

3.1 Instationäres Wirbelgitterverfahren

- Die Größen I_S , I_{F1} und I_{F2} sind definiert durch

$$I_S(Q,C)=\int_0^\infty \left(1+\frac{x_{QC}-c_{ref}\,s}{\sqrt{y_{QC}^2+z_{QC}^2+\left(x_{QC}-c_{ref}\,s\right)^2}}\right)e^{-2iks}\,ds$$

$$I_{F1}(D,E,C)=\int_0^\infty \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}e^{-2iks}\,ds$$

$$I_{F2}(D,E,C)=\int_0^\infty \frac{c_{ref}\,s\,\beta(s)}{\alpha(s)}e^{-2iks}\,ds$$

$$\begin{aligned}\alpha(s)&=\left|\boldsymbol{r}_{AC}\times\boldsymbol{r}_{BC}\right|^2\\ &=\left|\boldsymbol{r}_{DC}\times\boldsymbol{r}_{EC}\right|^2+2\,c_{ref}\,s\left(\boldsymbol{r}_{DC}\times\boldsymbol{r}_{EC}\right)\cdot\left(\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{r}_{DE}\right)+\left(c_{ref}\,s\right)^2\left|\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{r}_{DE}\right|^2\end{aligned}$$

3.1 Instationäres Wirbelgitterverfahren

$$\beta(s) = \frac{\boldsymbol{r}_{AB} \cdot \boldsymbol{r}_{AC}}{|\boldsymbol{r}_{AC}|} - \frac{\boldsymbol{r}_{AB} \cdot \boldsymbol{r}_{BC}}{|\boldsymbol{r}_{BC}|}$$

$$= \frac{x_{DE}\, x_{DC} + y_{DE}\, y_{DC} + z_{DE}\, z_{DC} - x_{DE}\, c_{ref}\, s}{\sqrt{y_{DC}^2 + z_{DC}^2 + (x_{DC} - c_{ref}\, s)^2}}$$

$$- \frac{x_{DE}\, x_{EC} + y_{DE}\, y_{EC} + z_{DE}\, z_{EC} - x_{DE}\, c_{ref}\, s}{\sqrt{y_{EC}^2 + z_{EC}^2 + (x_{EC} - c_{ref}\, s)^2}}$$

- Die Integrale müssen numerisch berechnet werden.
- Eine detaillierte Beschreibung findet sich im Mefisto Theory Manual.

3.1 Instationäres Wirbelgitterverfahren

- Berechnung des Druckbeiwerts:
  - Wie bei der Methode der diskreten Wirbel gilt:

$$\Delta \hat{c}_{Pn} = \frac{2}{v_\infty} \left(\frac{\hat{\Gamma}_n}{x_{n+1} - x_n} + \frac{2 i k}{c_{ref}} \sum_k \hat{\Gamma}_k \right), \quad 1 \leq n \leq N$$

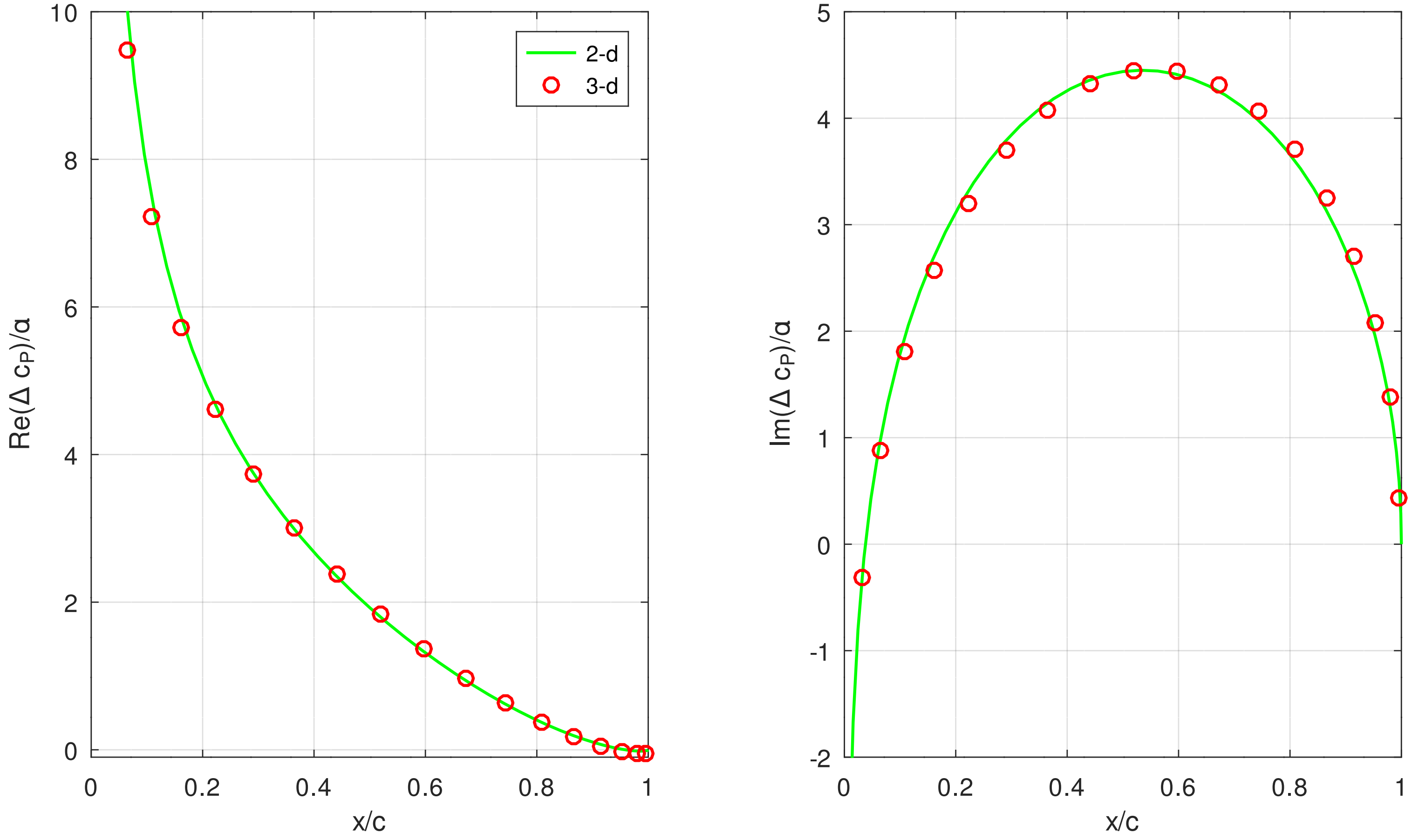
  - Die Summe erstreckt sich über alle Wirbel, die sich im entsprechenden Wirbelstreifen vor dem betrachteten Wirbel befinden.

3.1 Instationäres Wirbelgitterverfahren

- Beispiel: Drehschwingung eines Rechteckflügels
  - Der Flügel führt eine Drehschwingung um die Viertelpunktlinie durch.
  - Daten:
    - Spannweite: 15 m
    - Flügeltiefe: 1 m
    - Reduzierte Frequenz: 0,6
    - Wirbel in x-Richtung: 20
    - Wirbel in y-Richtung: 45
  - Der Druckbeiwert in der Mitte des Flügels sollte gut mit dem des unendlichen Flügels übereinstimmen.

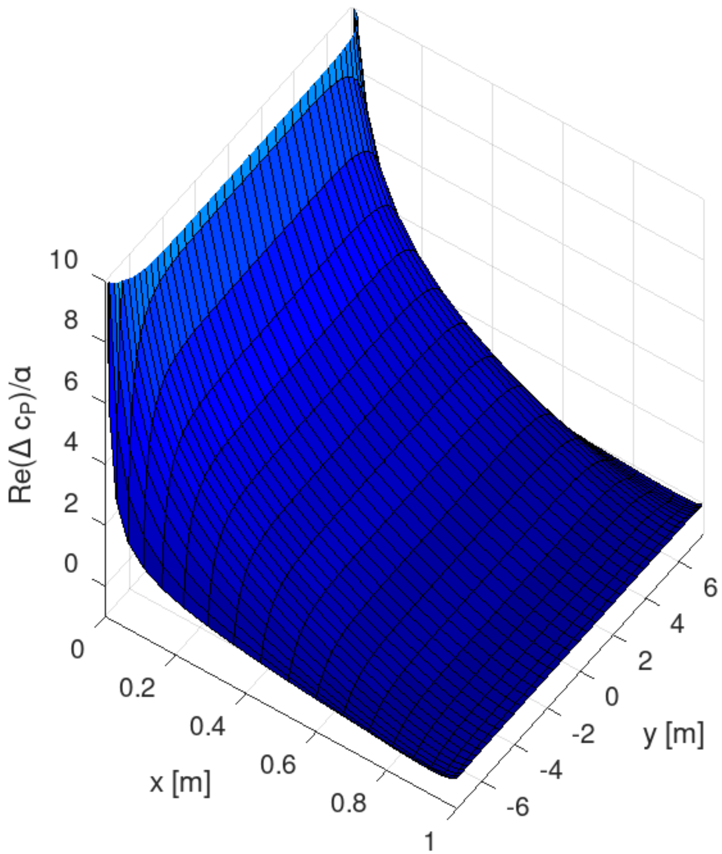
3.1 Instationäres Wirbelgitterverfahren

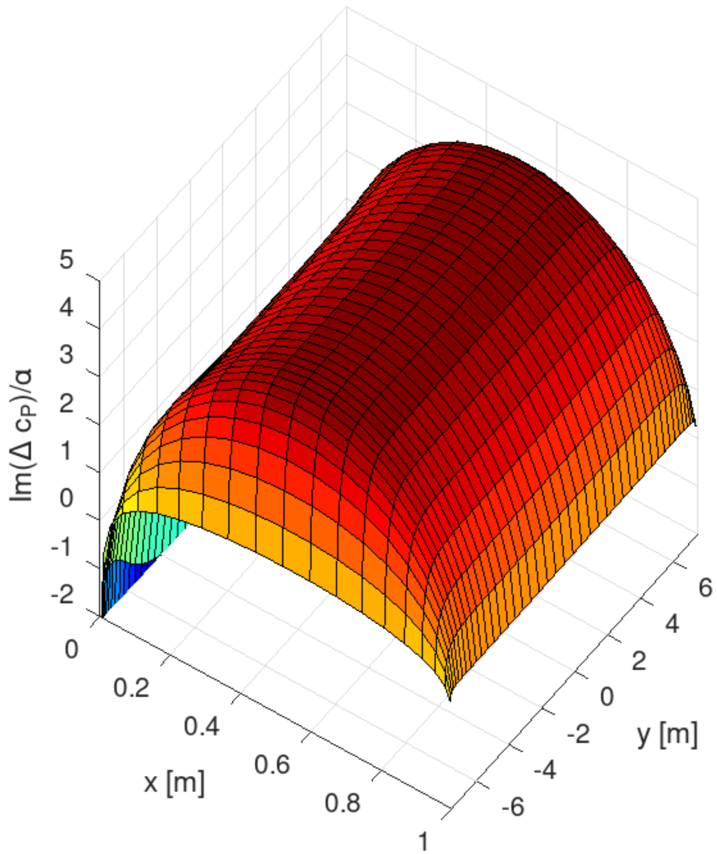
- Druckverteilung in der Mitte:



3.1 Instationäres Wirbelgitterverfahren

- Druckverteilung über den Flügel:





3.2 Dipolgitterverfahren

- Beim instationären Wirbelgitterverfahren muss über den gesamten Nachlauf integriert werden.
- Das Dipolgitterverfahren beruht auf einer Integralglei-chung für die Druckdifferenz. Da die Druckdifferenz außerhalb der tragenden Fläche null ist, erstreckt sich die Integration nur über die tragende Fläche.
- Im Englischen wird diese Methode als Doublet-Lattice Me-thod bezeichnet. Sie gilt als Standard-Methode der klassi-schen instationären Aeroelastik.

3.2 Dipolgitterverfahren

- Die Doublet-Lattice Method wurde von Albano und Rodden (1969) für kompressible Strömungen entwickelt.
- Im Folgenden wird das Grundprinzip der Methode anhand einer inkompressiblen Strömung um eine tragende Fläche in der *xy*-Ebene erläutert.
- Differenzialgleichung für den Druck:
  - Aus der Kelvin-Gleichung folgt:

$$\frac{p_\infty - p}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(v^2 - v_\infty^2\right)$$

3.2 Dipolgitterverfahren

- Für eine kleine Störung einer stationären Parallelströmung folgt daraus durch Linearisierung:

$$\frac{p_\infty - p}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + v_\infty \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

- Anwenden des Laplace-Operators auf beide Seiten der Gleichung ergibt

$$-\frac{1}{\rho} \nabla^2 p = \nabla^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + v_\infty \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \phi = 0$$

d. h. der Druck erfüllt die Potentialgleichung

$$\boxed{\nabla^2 p = 0}$$

3.2 Dipolgitterverfahren

- Lösung der Potentialgleichung:
  - Die gesuchte Lösung muss auf der tragenden Fläche eine Unstetigkeit $\Delta p = p_u - p_o$ haben. Die Ableitung in Richtung der Flächennormalen muss stetig sein.
  - In der Potentialtheorie wird gezeigt, dass das *Doppelschichtpotential*

$$p(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \Delta p(x_1, y_1, t) \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{1}{r_1} \right) dx_1 dy_1$$

mit $r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$

diese Bedingungen erfüllt. Die Integration erstreckt sich über die tragende Fläche.

3.2 Dipolgitterverfahren

- Für eine harmonische Schwingung gilt:

$$p(x, y, z, t) = \Re\left(\hat{p}(x, y, z)\, e^{i\omega t}\right)$$
$$\Delta p(x_1, y_1, t) = \Re\left(\Delta \hat{p}(x_1, y_1)\, e^{i\omega t}\right)$$
$$\hat{p}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \Delta \hat{p}(x_1, y_1) \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{1}{r_1}\right) dx_1\, dy_1$$

- Integralgleichung für die Druckdifferenz:
  - Die Randbedingung für eine harmonische Schwingung lautet:

$$\frac{1}{v_\infty} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} = \frac{W_z}{v_\infty} = 2\, i\, k \frac{Z}{c} + \frac{\partial Z}{\partial x}$$

3.2 Dipolgitterverfahren

- Aus der linearisierten Kelvin-Gleichung

$$\hat{p}=\rho\left(i\,\omega\,\hat{\phi}+v_\infty\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\right)=\rho\,v_\infty\left(2\,i\,k\frac{\hat{\phi}}{c}+\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\right)$$

folgt mit der Methode der Variation der Konstanten:

$$\hat{\phi}(x,y,z)=\int_{-\infty}^{x}\frac{\hat{p}(\lambda,y,z)}{\rho\,v_\infty}e^{2\,i\,k(\lambda-x)/c}\,d\lambda$$

- Einsetzen der Lösung für die Druckamplitude ergibt

$$\hat{\phi}(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{x}\left(e^{2\,i\,k(\lambda-x)/c}\int_S\frac{\Delta\hat{p}(x_1,y_1)}{\rho\,v_\infty}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{1}{r(\lambda)}\right)dx_1\,dy_1\right)d\lambda$$

mit $r(\lambda)=\sqrt{(\lambda-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$.

3.2 Dipolgitterverfahren

- Ableiten nach z und Berücksichtigung der Randbedingung führt nach einiger Rechnung auf die Integralgleichung

$$\frac{W_z}{v_\infty} = \int_S \frac{\Delta \hat{p}(x_1, y_1)}{\rho v_\infty^2} K(x - x_1, y - y_1)\, dx_1\, dy_1$$

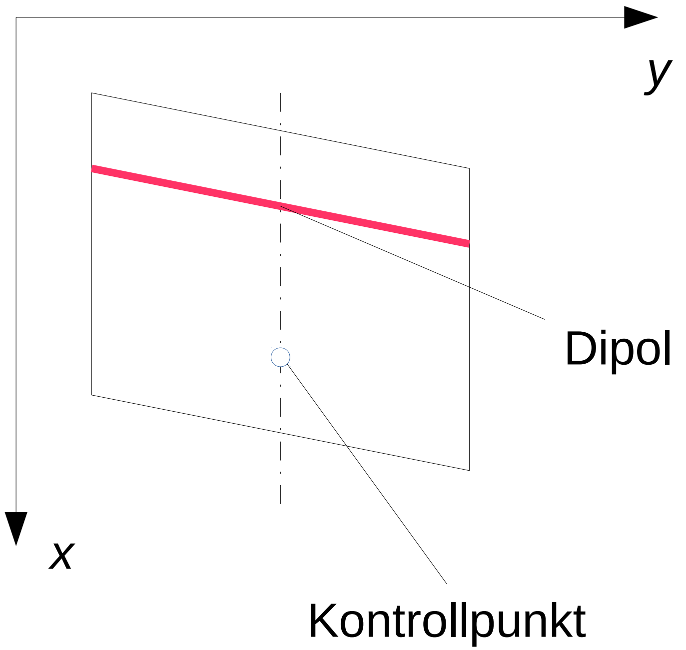
mit dem Kern

$$K(x - x_1, y - y_1) = \frac{e^{-2ik(x-x_1)/c}}{4\pi} \int_{-\infty}^{x-x_1} \frac{e^{2ik\xi/c}\, d\xi}{\left(\xi^2 + (y - y_1)^2\right)^{3/2}}$$

- Die Lösung dieser Integralgleichung wird eindeutig festgelegt durch die zusätzliche Forderung, dass der Druckunterschied an der Hinterkante null sein muss (Kutta-Bedingung).

3.2 Dipolgitterverfahren

- Berechnungsverfahren:
  - Die tragende Fläche wird wie beim Wirbelgitterverfahren in Trapeze zerlegt, deren parallele Kanten parallel zur *x*-Achse sind.
  - Entlang der Viertelpunktlinie eines jeden Trapezes wird eine konstante Dipolverteilung unbekannter Stärke aufgebracht.



3.2 Dipolgitterverfahren

- Die Dipolstärken werden so bestimmt, dass die Randbedingung in den Kontrollpunkten erfüllt ist, die sich in den Dreiviertelpunkten in der Mitte jedes Trapezes befinden.
- Numerische Experimente zeigen, dass auf diese Weise auch die Kutta-Bedingung erfüllt ist.