1. Grundlagen

- Betrachtet wird eine kleine Auslenkung aus einer Gleichgewichtslage.
- Bewegungsgleichung:
  - Verschiebungen und Lasten werden aufgeteilt in einen stationären Anteil (oberer Index S) und eine instationäre kleine Störung (ohne Index):

$$\left[u^G(t)\right]=\left[u^S\right]+\left[u(t)\right],\quad \left[l^G(t)\right]=\left[l^S\right]+\left[l(t)\right]$$

  - Der obere Index G kennzeichnet die gesamten Verschiebungen bzw. Lasten.

1. Grundlagen

- Die Lasten werden unterteilt in die aerodynamischen Lasten (oberer Index A) und die Lasten, die nicht von der Strömung abhängen (oberer Index 0):

$$[l^S]=[l^{S0}]+[l^{SA}],\quad [l(t)]=[l^0(t)]+[l^A(t)]$$

- Einsetzen in die Bewegungsgleichung der Strukturmechanik ergibt:

$$[M][\ddot{u}(t)]+[D][\dot{u}(t)]+[K]\left([u^S]+[u(t)]\right)=[l^{S0}]+[l^{SA}]+[l^0(t)]+[l^A(t)]$$

- In der statischen Gleichgewichtslage gilt:

$$[K][u^S]=[l^{S0}]+[l^{SA}]$$

1. Grundlagen

- Damit lautet die Bewegungsgleichung für die Störung:

$$[M][\ddot{u}(t)]+[D][\dot{u}(t)]+[K][u(t)]=[l^0(t)]+[l^A(t)]$$

- Die Lasten $[l^0(t)]$ sind bekannt.
- Die Verschiebungen $[u(t)]$ sind unbekannt.
- Die aerodynamischen Lasten $[l^A(t)]$ hängen von den unbekannten Verschiebungen ab.

1. Grundlagen

- Aerodynamische Lasten:
  - Die Bewegung der Struktur ändert den lokalen Anstellwinkel. Die aerodynamischen Lasten hängen daher von der momentanen Geschwindigkeit $[\dot{u}]$ ab.
  - Die die Struktur umgebende Luft wird beschleunigt. Die aerodynamischen Lasten hängen daher auch von der momentanen Beschleunigung $[\ddot{u}]$ ab.
  - Die momentane Strömung hängt auch von der vorausgehenden Bewegung der Struktur ab. Daher hängen die aerodynamischen Lasten auch von der Vergangenheit ab.
  - Die gleichen Überlegungen gelten auch für die Konfigurationsparameter $[u_K]$.

1. Grundlagen

- Bei kleinen Auslenkungen ist die Abhängigkeit linear:

$$\left[l^A(t)\right]=q_\infty\left(\left[A^1\right]\left[\dot{u}\right]+\left[A^2\right]\left[\ddot{u}\right]+\int_0^\infty\left[A(\tau)\right]\left[u(t-\tau)\right]d\tau\right)$$
$$+q_\infty\left(\left[A_K^1\right]\left[\dot{u}_K\right]+\left[A_K^2\right]\left[\ddot{u}_K\right]+\int_0^\infty\left[A_K(\tau)\right]\left[u_K(t-\tau)\right]d\tau\right)$$

- Die Matrizen $[A(\tau)]$ und $[A_K(\tau)]$ beschreiben den Beitrag der Verschiebungen bzw. der Konfigurationsparameter zum Zeitpunkt t-τ zur aerodynamischen Last zum Zeitpunkt t.

1. Grundlagen

- Harmonische Vorgänge:
  - Bei einem linearen System ist die Antwort auf eine harmonische Last ebenfalls harmonisch.
  - Daher haben die Verschiebungen einen harmonischen Zeitverlauf, wenn die Lasten und die Konfigurationsparameter einen harmonischen Zeitverlauf haben.
  - In komplexer Darstellung gilt:

$$\left[l^0(t)\right]=\Re\left(\left[L^0\right]e^{i\Omega t}\right),\quad \left[u_K(t)\right]=\Re\left(\left[U_K\right]e^{i\Omega t}\right),\quad \left[u(t)\right]=\Re\left(\left[U\right]e^{i\Omega t}\right)$$

  - $[L^0]$, $[U_K]$ und $[U]$ sind komplexe Matrizen mit den Informationen über Amplitude und Phase.
  - Ω ist die Erregerkreisfrequenz.

1. Grundlagen

- Für die zeitlichen Ableitungen gilt:

$$\left[\dot{u}(t)\right]=\Re\left(i\,\Omega[U]e^{i\Omega t}\right),\quad \left[\ddot{u}(t)\right]=\Re\left(-\Omega^2[U]e^{i\Omega t}\right)$$

- Einsetzen in die Bewegungsgleichung für die Störung ergibt

$$\Re\left(\left(-\Omega^2[M]+i\,\Omega[D]+[K]\right)[U]e^{i\Omega t}\right)$$
$$=\Re\left(\left(\left[L^0\right]+q_\infty\left[Q(\Omega)\right][U]+q_\infty\left[Q_K(\Omega)\right]\left[U_K\right]\right)e^{i\Omega t}\right)$$

mit $\left[Q(\Omega)\right]=i\,\Omega\left[A^1\right]-\Omega^2\left[A^2\right]+\int_0^\infty\left[A(\tau)\right]e^{-i\Omega\tau}d\tau$

$$\left[Q_K(\Omega)\right]=i\,\Omega\left[A_K^1\right]-\Omega^2\left[A_K^2\right]+\int_0^\infty\left[A_K(\tau)\right]e^{-i\Omega\tau}d\tau$$

1. Grundlagen

- Damit die Bewegungsgleichung für beliebige Zeitpunkte erfüllt ist, muss gelten:

$$\left(-\Omega^2[M]+i\Omega[D]+[K]-q_\infty\left[Q(\Omega)\right]\right)[U]=\left[L^0\right]+q_\infty\left[Q_K(\Omega)\right]\left[U_K\right]$$

- Diese Gleichung kann für jede Erregerkreisfrequenz Ω nach den Verschiebungen $[U(\Omega)]$ aufgelöst werden.

1. Grundlagen

- Instationäre aerodynamische Matrizen:
  - Die instationären aerodynamischen Matrizen $[Q]$ und $[Q_K]$ können z. B. mit dem instationären Wirbelgitterverfahren berechnet werden.
  - Für den Abwind am Kontrollpunkt gilt:

$$[W]_L=\left(\left[D^1\right]_{Lh}+2\,i\,k\left[D^2\right]_{Lh}\right)[S]_h[U]+\left(\left[D_K^1\right]_L+2\,i\,k\left[D_K^2\right]_L\right)[U_K]$$

    - k ist die reduzierte Frequenz: $k=\Omega\,c_{ref}/(2\,v_\infty)$
    - Matrix $[W]_L$ enthält die komplexen Amplituden des auf die Anströmgeschwindigkeit bezogenen Abwinds $\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{n}/v_\infty$ in den Kontrollpunkten im lokalen Koordinatensystem der Auftriebsflächen.

1. Grundlagen

- Matrix $[S]_h$ berechnet die Spline-Koeffizienten aus den Strukturverschiebungen (vgl. Kap. 5.1.3).
- Matrix $[D^1]_{Lh}$ berechnet den Abwind an den Kontrollpunkten aus den Spline-Koeffizienten (vgl. Kap. 5.1.3).
- Matrix $[D^2]_{Lh}$ berechnet die auf die Referenzlänge c_{ref} bezogenen Verschiebungen senkrecht zur Auftriebsfläche aus den Spline-Koeffizienten:

$$[D^2]_{Lh} = \frac{1}{c_{ref}} \begin{bmatrix} [B(y_{L1})] & -x_1[B(y_{L1})] \\ \vdots & \vdots \\ [B(y_{LN})] & -x_N[B(y_{LN})] \end{bmatrix}$$

- Matrix $[D^1{}_K]_L$ berechnet den Abwind an den Kontrollpunkten aus den Konfigurationsparametern $[U_K]$.

1. Grundlagen

- Matrix $[D^2{}_K]_L$ berechnet die auf die Referenzlänge c_{ref} bezogenen Verschiebungen senkrecht zur Auftriebsfläche aus den Konfigurationsparametern $[U_K]$.

– Die Matrix $[\Gamma]$ mit den auf die Anströmgeschwindigkeit bezogenen komplexen Wirbelstärken ist Lösung des Gleichungssystems

$$[W]_L = \left[C(k)\right][\Gamma].$$

- Matrix $[C(k)]$ ist komplex und hängt von der reduzierten Frequenz ab.
- Sie wird durch die Gleichungen des instationären Wirbelgitterverfahrens definiert.

1. Grundlagen

- Die aerodynamischen Kräfte $[L^A{}_\Gamma]_L$ hängen linear von den Wirbelstärken ab:

$$\left[L_\Gamma^A\right]_L = q_\infty \left[G(k)\right][\Gamma]$$

  - Matrix $[G(k)]$ kann mithilfe der in Kapitel 6.3 für den Druckbeiwert angegebenen Gleichungen berechnet werden.

- Die Übertragung der aerodynamischen Kräfte auf die Struktur erfolgt wie im stationären Fall (vgl. Kapitel 5.1.3):

$$\left[L^A\right] = [S]_h^T \left[S^\Gamma\right]_{Lh}^T \left[L_\Gamma^A\right]_L$$

  - Matrix $[S^\Gamma]_{Lh}$ berechnet die Verschiebungen an den Wirbelpunkten aus den Spline-Koeffizienten.

1. Grundlagen

- Einsetzen aller Gleichungen ergibt:

$$\left[L^A\right]=q_\infty[S]_h^T\left[S^\Gamma\right]_{Lh}^T\left[G(k)\right]\left[C(k)\right]^{-1}\left(\left(\left[D^1\right]_{Lh}+2ik\left[D^2\right]_{Lh}\right)[S]_h[U]\right.$$
$$\left.+\left(\left[D_K^1\right]_L+2ik\left[D_K^2\right]_L\right)\left[U_K\right]\right)$$
$$=q_\infty\left(\left[Q(k)\right][U]+\left[Q_K(k)\right]\left[U_K\right]\right)$$

- Damit gilt:

$$\boxed{\begin{aligned}\left[Q(k)\right]&=[S]_h^T\left[S^\Gamma\right]_{Lh}^T\left[G(k)\right]\left[C(k)\right]^{-1}\left(\left[D^1\right]_{Lh}+2ik\left[D^2\right]_{Lh}\right)[S]_h\\ \left[Q_K(k)\right]&=[S]_h^T\left[S^\Gamma\right]_{Lh}^T\left[G(k)\right]\left[C(k)\right]^{-1}\left(\left[D_K^1\right]_L+2ik\left[D_K^2\right]_L\right)\end{aligned}}$$