Gradient, Divergenz und Rotation

1. Gradient

Sei $\phi(\boldsymbol{x})$ ein skalares Feld und $\boldsymbol{a}$ ein konstanter Vektor. Die Ableitung des skalaren Feldes in Richtung des Vektors $\boldsymbol{a}$ ist definiert durch

$$\frac{d\phi}{d\boldsymbol{a}}=\frac{d}{dt}\phi\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\,t\right)\Big|_{t=0}=\frac{\partial\phi}{\partial x_1}a_1+\frac{\partial\phi}{\partial x_2}a_2+\frac{\partial\phi}{\partial x_3}a_3 .$$

Mit dem Gradienten

$$\operatorname{grad}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\boldsymbol{e_1}+\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\boldsymbol{e_2}+\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\boldsymbol{e_3}$$

gilt:

$$\frac{d\phi}{d\boldsymbol{a}}=\left(\operatorname{grad}\phi\right)\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{grad}\phi$$

Der Gradient eines skalaren Feldes ist ein Vektor.

In Matrix-Schreibweise gilt:

$$\left[\operatorname{grad}\phi\right]=\begin{bmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi}{\partial x_2} & \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\end{bmatrix}^T$$

Für die Richtungsableitung folgt:

$$\frac{d\phi}{d\boldsymbol{a}}=\left[\operatorname{grad}\phi\right]^T\left[\boldsymbol{a}\right]=\left[\boldsymbol{a}\right]^T\left[\operatorname{grad}\phi\right]$$

Auf die gleiche Weise kann eine Richtungsableitung für ein Vektorfeld $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ definiert werden:

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{d\boldsymbol{a}}=\frac{d}{dt}\boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\,t\right)\Big|_{t=0}=\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial x_1}a_1+\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial x_2}a_2+\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial x_3}a_3$$

Mit dem Vektorgradienten

$$\left[\operatorname{grad}\boldsymbol{w}\right]=\begin{bmatrix}\frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \frac{\partial w_1}{\partial x_2} & \frac{\partial w_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial w_2}{\partial x_1} & \frac{\partial w_2}{\partial x_2} & \frac{\partial w_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial w_3}{\partial x_1} & \frac{\partial w_3}{\partial x_2} & \frac{\partial w_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}$$

gilt:

$$\left[\frac{d\boldsymbol{w}}{d\boldsymbol{a}}\right]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial w_1}{\partial x_1}a_1+\dfrac{\partial w_1}{\partial x_2}a_2+\dfrac{\partial w_1}{\partial x_3}a_3\\ \dfrac{\partial w_2}{\partial x_1}a_1+\dfrac{\partial w_2}{\partial x_2}a_2+\dfrac{\partial w_2}{\partial x_3}a_3\\ \dfrac{\partial w_3}{\partial x_1}a_1+\dfrac{\partial w_3}{\partial x_2}a_2+\dfrac{\partial w_3}{\partial x_3}a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[\operatorname{grad} w_1]^T[\boldsymbol{a}]\\ [\operatorname{grad} w_2]^T[\boldsymbol{a}]\\ [\operatorname{grad} w_2]^T[\boldsymbol{a}]\end{bmatrix}=[\operatorname{grad}\boldsymbol{w}][\boldsymbol{a}]$$

2. Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist die Spur des Vektorgradienten:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{w}=\frac{\partial w_1}{\partial x_1}+\frac{\partial w_2}{\partial x_2}+\frac{\partial w_3}{\partial x_3}$$

3. Rotation

Der Gradient eines Vektorfeldes kann als Summe einer symmetrischen und einer antimetrischen Matrix geschrieben werden:

$$[\operatorname{grad}\boldsymbol{w}]=\frac{1}{2}\left([\operatorname{grad}\boldsymbol{w}]+[\operatorname{grad}\boldsymbol{w}]^T\right)+\frac{1}{2}\left([\operatorname{grad}\boldsymbol{w}]-[\operatorname{grad}\boldsymbol{w}]^T\right)$$

Die antimetrische Matrix lautet

$$\frac{1}{2}\left([\operatorname{grad}\boldsymbol{w}]-[\operatorname{grad}\boldsymbol{w}]^T\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & \dfrac{\partial w_1}{\partial x_2}-\dfrac{\partial w_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial w_1}{\partial x_3}-\dfrac{\partial w_3}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial w_2}{\partial x_1}-\dfrac{\partial w_1}{\partial x_2} & 0 & \dfrac{\partial w_2}{\partial x_3}-\dfrac{\partial w_3}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial w_3}{\partial x_1}-\dfrac{\partial w_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial w_3}{\partial x_2}-\dfrac{\partial w_2}{\partial x_3} & 0\end{bmatrix}.$$

Multiplikation mit einem Vektor $\boldsymbol{a}$ ergibt:

$$\frac{1}{2}\left([\operatorname{grad}\boldsymbol{w}]-[\operatorname{grad}\boldsymbol{w}]^T\right)[\boldsymbol{a}]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\left(\dfrac{\partial w_1}{\partial x_2}-\dfrac{\partial w_2}{\partial x_1}\right)a_2+\left(\dfrac{\partial w_1}{\partial x_3}-\dfrac{\partial w_3}{\partial x_1}\right)a_3\\ \left(\dfrac{\partial w_2}{\partial x_1}-\dfrac{\partial w_1}{\partial x_2}\right)a_1+\left(\dfrac{\partial w_2}{\partial x_3}-\dfrac{\partial w_3}{\partial x_2}\right)a_3\\ \left(\dfrac{\partial w_3}{\partial x_1}-\dfrac{\partial w_1}{\partial x_3}\right)a_1+\left(\dfrac{\partial w_3}{\partial x_2}-\dfrac{\partial w_2}{\partial x_3}\right)a_2\end{bmatrix}$$

Die rechte Seite lässt sich auch als Kreuzprodukt schreiben:

$$\frac{1}{2}\left([\operatorname{grad}\boldsymbol{w}]-[\operatorname{grad}\boldsymbol{w}]^T\right)[\boldsymbol{a}]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial w_3}{\partial x_2}-\dfrac{\partial w_2}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial w_1}{\partial x_3}-\dfrac{\partial w_3}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial w_2}{\partial x_1}-\dfrac{\partial w_1}{\partial x_2}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$$

Der antimetrische Anteil des Vektorgradienten beschreibt die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich der Vektor $\boldsymbol{a}$ dreht.

Mit der Rotation

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{w}=\left(\frac{\partial w_3}{\partial x_2}-\frac{\partial w_2}{\partial x_3}\right)\boldsymbol{e_1}+\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_3}-\frac{\partial w_3}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{e_2}+\left(\frac{\partial w_2}{\partial x_1}-\frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{e_3}$$

gilt:

$$\left([\operatorname{grad}\boldsymbol{w}]-[\operatorname{grad}\boldsymbol{w}]^T\right)[\boldsymbol{a}]=[\operatorname{rot}\boldsymbol{w}]\times[\boldsymbol{a}]$$

4. Nabla-Operator

Gradient, Divergenz und Rotation lassen sich übersichtlich mit dem Nabla[1]-Operator

$$\boldsymbol{\nabla}=\boldsymbol{e_1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\boldsymbol{e_2}\frac{\partial}{\partial x_2}+\boldsymbol{e_3}\frac{\partial}{\partial x_3}$$

schreiben. Mit dem Nabla-Operator darf formal wie mit einem Vektor gerechnet werden. Seine Matrix-Darstellung ist

$$[\boldsymbol{\nabla}]=\begin{bmatrix}\partial/\partial x_1\\ \partial/\partial x_2\\ \partial/\partial x_3\end{bmatrix}.$$

Die Anwendung des Nabla-Operators auf ein Skalarfeld ergibt den Gradienten:

$$\boldsymbol{\nabla}\phi=\boldsymbol{e_1}\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+\boldsymbol{e_2}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}+\boldsymbol{e_3}\frac{\partial\phi}{\partial x_3}=\operatorname{grad}\phi$$

Das Skalarprodukt des Nabla-Operators mit einem Vektorfeld ergibt die Divergenz:

1 von hebräisch נבל (nével), griech. νάβλα (nábla) = Harfe, Leier (∇)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} = \mathrm{div}\, \boldsymbol{w}$$

Das Vektorprodukt des Nabla-Operators mit einem Vektorfeld ergibt die Rotation:

$$\nabla \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{e_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_1} + \boldsymbol{e_2} \times \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_2} + \boldsymbol{e_3} \times \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_3} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{w}$$

Mit

$$\boldsymbol{a} \cdot \nabla = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

folgt für die Richtungsableitung eines Vektorsfeldes:

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{d\boldsymbol{a}} = a_1 \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_3} = (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{w}$$

5. Rechenregeln für den Nabla-Operator

Im folgenden sind ϕ und ψ skalare Felder, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ Vektorfelder und λ und μ Konstanten.

<u>Linearität</u>

$$\nabla \left(\lambda \phi(\boldsymbol{x}) + \mu \psi(\boldsymbol{x})\right) = \lambda \nabla \phi + \mu \nabla \psi$$

$$\nabla \cdot \left(\lambda \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) + \mu \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})\right) = \lambda \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \mu \nabla \cdot \boldsymbol{w}$$

$$\nabla \times \left(\lambda \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) + \mu \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})\right) = \lambda \nabla \times \boldsymbol{v} + \mu \nabla \times \boldsymbol{w}$$

<u>Doppelte Anwendung</u>

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{w}) = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{w} = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \phi) = \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, \phi = \boldsymbol{0}$$

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} = \Delta \phi \quad \text{(Laplace-Operator)}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{w} = \Delta w_1 \boldsymbol{e_1} + \Delta w_2 \boldsymbol{e_2} + \Delta w_3 \boldsymbol{e_3} \quad \text{(vektorieller Laplace-Operator)}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{w}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{w}) - \nabla^2 \boldsymbol{w}$$

<u>Anwendung auf Produkte</u>

$$\nabla \left(\phi(\boldsymbol{x})\, \psi(\boldsymbol{x})\right) = (\nabla \phi)\, \psi + \phi \nabla \psi$$

$$\nabla \cdot \left(\phi(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})\right) = (\nabla \phi) \cdot \boldsymbol{w} + \phi\, \nabla \cdot \boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left(\phi(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})\right)=\left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right)\times\boldsymbol{w}+\phi\,\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})\right)=\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{w}\right)$$

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})\right)=\boldsymbol{v}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{w}\right)+\boldsymbol{w}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}\right)+\left(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{v}+\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})\right)=\boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{w}\right)-\boldsymbol{w}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right)+\left(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{v}-\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{w}$$