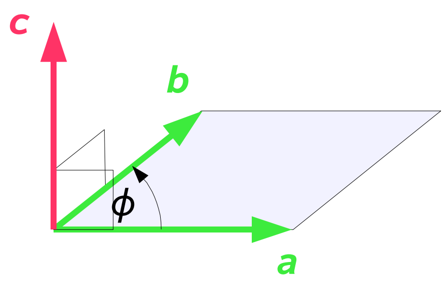
Das Vektorprodukt

Definition



Das Vektor- oder Kreuzprodukt

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

ist ein Vektor, der senkrecht auf der von den Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Ebene steht und so gerichtet ist, dass die Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ ein Rechtssystem bilden.

Wenn der Daumen der rechten Hand in Richtung von Vektor $\boldsymbol{a}$ zeigt und der Zeigefinger in Richtung von Vektor $\boldsymbol{b}$, dann zeigt Vektor $\boldsymbol{c}$ in Richtung des Mittelfingers.

Der Betrag des Vektors $\boldsymbol{c}$ ist gleich der Fläche des von den Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Parallelogramms, d.h.

$$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\phi \quad .$$

Wenn die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ parallel sind, dann ist das Vektorprodukt Null.

Eigenschaften

Das Vektorprodukt ist antikommutativ, d.h. bei Vertauschen der Reihenfolge der Faktoren ändert das Vektorprodukt sein Vorzeichen:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$$

Sind α und β skalare Größen, dann gilt das Assoziativgesetz

$$(\alpha\,\boldsymbol{a})\times(\beta\,\boldsymbol{b})=\alpha\,\beta\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \quad .$$

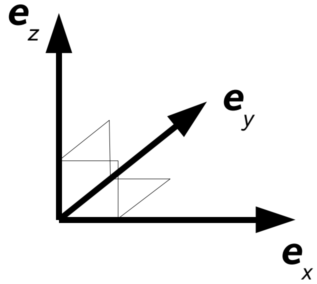
Bezüglich der Addition gilt das Distributivgesetz

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} \quad .$$

Vektorprodukte der Einheitsvektoren

$$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z$$
$$\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x$$
$$\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_x=-\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_y=-\boldsymbol{e}_x,\quad \boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_z=-\boldsymbol{e}_y$$



Mit $\boldsymbol{a}=a_x\,\boldsymbol{e_x}+a_y\,\boldsymbol{e_y}+a_z\,\boldsymbol{e_z}$ und $\boldsymbol{b}=b_x\,\boldsymbol{e_x}+b_y\,\boldsymbol{e_y}+b_z\,\boldsymbol{e_z}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= \left(a_x\,\boldsymbol{e_x}+a_y\,\boldsymbol{e_y}+a_z\,\boldsymbol{e_z}\right)\times\left(b_x\,\boldsymbol{e_x}+b_y\,\boldsymbol{e_y}+b_z\,\boldsymbol{e_z}\right)\\
&= a_x b_y\,\boldsymbol{e_x}\times\boldsymbol{e_y}+a_x b_z\,\boldsymbol{e_x}\times\boldsymbol{e_z}+\\
&\quad\; a_y b_x\,\boldsymbol{e_y}\times\boldsymbol{e_x}+a_y b_z\,\boldsymbol{e_y}\times\boldsymbol{e_z}+\\
&\quad\; a_z b_x\,\boldsymbol{e_z}\times\boldsymbol{e_x}+a_z b_y\,\boldsymbol{e_z}\times\boldsymbol{e_y}\\
&= a_x b_y\,\boldsymbol{e_z}-a_x b_z\,\boldsymbol{e_y}-a_y b_x\,\boldsymbol{e_z}+a_y b_z\,\boldsymbol{e_x}+a_z b_x\,\boldsymbol{e_y}-a_z b_y\,\boldsymbol{e_x}\\
&= \left(a_y b_z-a_z b_y\right)\boldsymbol{e_x}+\left(a_z b_x-a_x b_z\right)\boldsymbol{e_y}+\left(a_x b_y-a_y b_x\right)\boldsymbol{e_z}
\end{aligned}$$

Mehrfache Vektorprodukte

Doppeltes Vektorprodukt: $\boldsymbol{a}\times\left(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\right)=\boldsymbol{b}\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\right)-\boldsymbol{c}\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\right)$

Lagrangesche Identitität: $\left(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\right)\cdot\left(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}\right)=\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\right)\left(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\right)-\left(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\right)\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\right)$

Dabei ist $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ das Skalarprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$.

Das gemischte Produkt

Für das gemischte Produkt gilt:

$$\boldsymbol{a}\cdot\left(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\right)=\boldsymbol{b}\cdot\left(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\right)=\boldsymbol{c}\cdot\left(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\right)=\det\left(\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{b}\,,\boldsymbol{c}\right)$$

Ableitung des Vektorprodukts

Sind $\boldsymbol{a}(t)$ und $\boldsymbol{b}(t)$ zwei zeitabhängige Vektoren, so gilt für die zeitliche Ableitung ihres Vektorprodukts die Produktregel:

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t)\right)=\dot{\boldsymbol{a}}(t)\times\boldsymbol{b}(t)+\boldsymbol{a}(t)\times\dot{\boldsymbol{b}}(t)$$