1.1 Spannungszustand

Lösungen

Aufgabe 1:

a) <u>Spannungsvektor:</u>

$$[\boldsymbol{t}]=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}50 & -20 & 20\\ -20 & -40 & 10\\ 20 & 10 & 80\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -3\\ 6\end{bmatrix}MPa=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}280\\ 140\\ 490\end{bmatrix}MPa=\begin{bmatrix}40\\ 20\\ 70\end{bmatrix}MPa$$

b) <u>Normalspannung und Schubspannung:</u>

$$\sigma_n=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2 & -3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}40\\ 20\\ 70\end{bmatrix}MPa=\frac{1}{7}\cdot 440\,MPa=\underline{62{,}86\,MPa}$$

$$|\boldsymbol{t}|=\sqrt{40^2+20^2+70^2}\,MPa=\sqrt{6900}\,MPa=83{,}07\,MPa$$

$$\tau_{tn}=\sqrt{6900-\frac{440^2}{49}}\,MPa=\underline{54{,}30\,MPa}$$

c) <u>Winkel zwischen Spannungsvektor und Normalenvektor:</u>

$$\cos(\phi)=\frac{\sigma_n}{|\boldsymbol{t}|}=\frac{62{,}86}{83{,}07}=0{,}7567\,,\quad \phi=\underline{40{,}82°}$$

Aufgabe 2:

Spannungsvektoren:

$$[\boldsymbol{t}_1]=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}50 & 20 & 80\\ 20 & 110 & 20\\ 80 & 20 & 50\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2\\ -1\end{bmatrix}MPa=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}60\\ 240\\ 150\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\ 80\\ 50\end{bmatrix}MPa$$

$$\left[\boldsymbol{t}_2\right]=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}50 & 20 & 80\\ 20 & 110 & 20\\ 80 & 20 & 50\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}MPa=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}150\\150\\150\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}86{,}60\\86{,}60\\86{,}60\end{bmatrix}MPa$$

Beträge:

$$\left|\boldsymbol{t}_1\right|=\sqrt{20^2+80^2+50^2}\,MPa=\sqrt{9300}\,MPa=96{,}44\,MPa$$

$$\left|\boldsymbol{t}_2\right|=150\,MPa$$

Normalspannungen:

$$\sigma_{n1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\80\\50\end{bmatrix}MPa=\frac{1}{3}\cdot 150\,MPa=\underline{50\,MPa}$$

$$\sigma_{n2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}150\\150\\150\end{bmatrix}MPa=\frac{1}{3}\cdot 450\,MPa=\underline{150\,MPa}$$

Schubspannungen:

$$\tau_{tn1}=\sqrt{9300-50^2}\,MPa=\underline{82{,}46\,MPa}$$

$$\tau_{tn2}=\sqrt{150^2-150^2}\,MPa=\underline{0\,MPa}$$

Aufgabe 3:

Invarianten:

$$I_1=\left(80+50+80\right)MPa=210\,MPa$$

$$I_2=\left(80\cdot 50+50\cdot 80+80\cdot 80-170^2\right)MPa^2=-14500\,MPa^2$$

$$I_3=50\cdot\left(80^2-170^2\right)MPa^3=-1125000\,MPa^3$$

Charakteristische Gleichung:

$$\sigma_k^3-210\,MPa\,\sigma_k^2-14500\,MPa^2\,\sigma_k+1125000\,MPa^3=0$$

Hauptspannungen: $\sigma_1=250\,MPa,\quad \sigma_2=50\,MPa,\quad \sigma_3=-90\,MPa$

In diesem Fall lassen sich die Hauptspannungen auch leichter durch Entwicklung der Determinante nach der zweiten Spalte ermitteln:

$$0=\begin{vmatrix} 80\,MPa-\sigma_k & 0 & 170\,MPa \\ 0\,MPa & 50\,MPa-\sigma_k & 0\,MPa \\ 170\,MPa & 0\,MPa & 80\,MPa-\sigma_k \end{vmatrix}$$
$$=\left(50\,MPa-\sigma_k\right)\left[\left(80\,MPa-\sigma_k\right)^2-170^2\,MPa^2\right]$$
$$=\left(50\,MPa-\sigma_k\right)\left(\sigma_k^2-160\,MPa\,\sigma_k-22500\,MPa^2\right)$$

Daraus folgt

$$\sigma_2=50\,MPa$$

und

$$\sigma_{1/3}=80\,MPa\pm\sqrt{80^2\,MPa^2+22500\,MPa^2}=80\,MPa\pm170\,MPa \quad .$$

Probe:

$$I_1=\left(250+50-90\right)MPa=210\,MPa$$

$$I_2=\left(250\cdot50-50\cdot90-250\cdot90\right)MPa^2=-14500\,MPa^2$$

$$I_3=-250\cdot50\cdot90\,MPa^3=-1125000\,MPa^3$$

Erste Hauptachse: $\sigma_1=250\,MPa$

Einsetzen von σ_1 in die ersten beiden Gleichungen des Eigenwertproblems ergibt:

$$\begin{array}{ccccccc} \left(80-250\right)e_{1x} & & & + & 170\,e_{1z} & = & 0 \\ & & \left(50-250\right)e_{1y} & & & = & 0 \end{array}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt: $e_{1y}=0$

Auflösen der ersten Gleichung nach e_{1x} ergibt:

$$e_{1x}=-\frac{170}{-170}e_{1z}=e_{1z}$$

Die Normierung des Eigenvektors auf die Länge eins ergibt:

$$1=e_{1x}^2+e_{1y}^2+e_{1z}^2=2\,e_{1z}^2 \;\rightarrow\; e_{1z}=\frac{1}{\sqrt{2}} \;\rightarrow\; [\boldsymbol{e}_1]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

Zweite Hauptachse: $\sigma_2=50\,MPa$

Da bei Einsetzen von σ_2 in die zweite Gleichung des Eigenwertproblems diese komplett null wird, wird zur Berechnung des zweiten Eigenvektors die erste und die dritte Gleichung verwendet:

$$\begin{array}{ccccc} (80-50)\,e_{2x} & + & 170\,e_{2z} & = & 0 \\ 170\,e_{2x} & + & (80-50)\,e_{2z} & = & 0 \end{array}$$

Da die Determinante diese Gleichungssystems nicht null ist, hat es die Lösung

$$e_{2x}=e_{2z}=0.$$

Die Komponenten e_{2y} ist zunächst beliebig. Damit der Eigenvektor die Länge eins hat, muss gelten: $e_{2y}=1$

Damit lautet der zweite Eigenvektor:

$$[\boldsymbol{e_2}]=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

Dritte Hauptachse: $\sigma_3=-90\,MPa$

$$[\boldsymbol{e_3}]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

Probe:

$$[\boldsymbol{\sigma}][\boldsymbol{e_3}]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}80&0&170\\0&50&0\\170&0&80\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}MPa=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}90\\0\\-90\end{bmatrix}MPa=-90\,MPa\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$
$$=\sigma_3[\boldsymbol{e_3}]$$

Aufgabe 4:

Invarianten:

$$I_1=(116+104+105)\,MPa=325\,MPa$$

$$I_2=(116\cdot 104+104\cdot 105+116\cdot 105-8^2-60^2-30^2)\,MPa^2=30600\,MPa^2$$

$$I_3=\left[116\left(104\cdot 105-30^2\right)-8\left(8\cdot 105-60\cdot 30\right)+60\left(8\cdot 30-60\cdot 104\right)\right]MPa^3$$
$$=810000\,MPa^3$$

Charakteristische Gleichung:

$$\sigma_k^3-325\,MPa\,\sigma_k^2+30600\,MPa^2\,\sigma_k-810000\,MPa^3=0$$

Hauptspannungen: $\sigma_1 = 180\,MPa$, $\sigma_2 = 100\,MPa$, $\sigma_3 = 45\,MPa$

Probe:

$$I_1 = (180 + 100 + 45)\,MPa = 325\,MPa$$

$$I_2 = (180 \cdot 100 + 100 \cdot 45 + 180 \cdot 45)\,MPa^2 = 30600\,MPa^2$$

$$I_3 = 180 \cdot 100 \cdot 45\,MPa^3 = 810000\,MPa^3$$

Erste Hauptachse: $\sigma_1 = 180\,MPa$

Die Hauptspannung σ_1 wird in die ersten beiden Gleichungen des Eigenwertproblems eingesetzt:

$$\begin{aligned} (116-180)\,e_{1x} &+ 8\,e_{1y} &+ 60\,e_{1z} &= 0 \\ 8\,e_{1x} &+ (104-180)\,e_{1y} &+ 30\,e_{1z} &= 0 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem kann nach e_{1x} und e_{1y} aufgelöst werden:

$$\begin{bmatrix} -64 & 8 \\ 8 & -76 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ -30 \end{bmatrix} e_{1z}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \end{bmatrix} = \frac{1}{4800} \begin{bmatrix} -76 & -8 \\ -8 & -64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -60 \\ -30 \end{bmatrix} e_{1z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} e_{1z}$$

Die Komponente e_{1z} wird so bestimmt, dass der Eigenvektor die Länge eins hat:

$$1 = e_{1x}^2 + e_{1y}^2 + e_{1z}^2 = \frac{9}{4} e_{1z}^2 \rightarrow e_{1z} = \frac{2}{3} \rightarrow [\boldsymbol{e}_1] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Zweite Hauptachse: $\sigma_2 = 100\,MPa$

Wird σ_2 in die Gleichungen des Eigenwertproblems eingesetzt, so kann nicht nach e_{2x} und e_{2y} aufgelöst werden, da die Determinante der zugehörigen Matrix für jede Wahl der Gleichungen null ist. Daher wird nach e_{2x} und e_{2z} aufgelöst, wozu z.B. die erste und die dritte Gleichung verwendet werden können:

$$\begin{bmatrix} 116-100 & 60 \\ 60 & 105-100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{2x} \\ e_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 60 \\ 60 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{2x} \\ e_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -30 \end{bmatrix} e_{2y}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} e_{2x} \\ e_{2z} \end{bmatrix} = \frac{1}{-3520} \begin{bmatrix} 5 & -60 \\ -60 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ -30 \end{bmatrix} e_{2y} = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 0 \end{bmatrix} e_{2y}$$

$$1 = e_{2x}^2 + e_{2y}^2 + e_{2z}^2 = \frac{5}{4} e_{2y}^2 \quad \rightarrow \quad e_{2y} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \rightarrow \quad [\boldsymbol{e_2}] = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dritte Hauptachse: $\sigma_3 = 45\,MPa$

$$[\boldsymbol{e_3}] = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Probe:

$$\frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 116 & 8 & 60 \\ 8 & 104 & 30 \\ 60 & 30 & 105 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} MPa = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -180 \\ -90 \\ 225 \end{bmatrix} = 45\,MPa \cdot \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5:

Im Hauptachsensystem gilt für den Spannungsvektor auf der gegebenen Schnittebene:

$$[\boldsymbol{t}]_H = [\boldsymbol{\sigma}]_H [\boldsymbol{n}]_H = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{bmatrix}$$

Der Betrag des Spannungsvektors berechnet sich zu

$$|\boldsymbol{t}| = \sqrt{\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2} \quad .$$

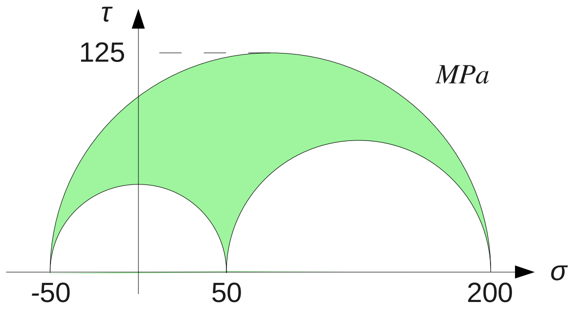
Projektion auf den Normalenvektor ergibt die Normalspannung:

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

Für die Schubspannung gilt: $\tau_{tn} = \sqrt{\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \sigma_n^2}$

Aufgabe 6:

a) <u>Mohrsche Spannungskreise:</u>



b) <u>Schnittspannungen:</u>

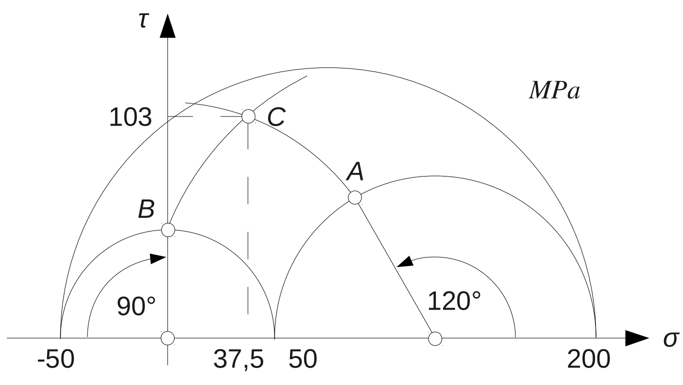
Normalspannung:

$$\sigma_n = 200\,MPa \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 50\,MPa \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 50\,MPa \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \underline{37{,}5\,MPa}$$

Schubspannung:

$$\tau_{tn} = \sqrt{\frac{200^2}{4} + \frac{50^2}{4} + 50^2 \cdot \frac{2}{4} - 37{,}5^2}\,MPa = \sqrt{10468{,}75}\,MPa = \underline{102{,}3\,MPa}$$

Richtungswinkel: $\cos(\alpha_1) = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_1 = 60°$, $\cos(\alpha_3) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha_3 = 45°$



Aufgabe 7:

a) <u>Hauptspannungen:</u>

Invarianten:

$$I_1 = (162 + 168 + 155)\, MPa = 485\, MPa$$

$$I_2 = (162 \cdot 168 + 168 \cdot 155 + 155 \cdot 162 - 4^2 - 20^2 - 10^2)\, MPa^2 = 77850\, MPa^2$$

$$I_3 = [162(168 \cdot 155 - 10^2) + 4(-4 \cdot 155 - 20 \cdot 10) + 20(-4 \cdot 10 - 20 \cdot 168)]\, MPa^3$$
$$= 4131000\, MPa^3$$

Charakteristische Gleichung:

$$\sigma_k^3 - 485\, MPa\, \sigma_k^2 + 77850\, MPa^2\, \sigma_k - 4131000\, MPa^3 = 0$$

Hauptspannungen: $\sigma_1 = 180\, MPa$, $\sigma_2 = 170\, MPa$, $\sigma_3 = 135\, MPa$

Probe:

$$I_1 = (180 + 170 + 135)\, MPa = 485\, MPa$$

$$I_2 = (180 \cdot 170 + 170 \cdot 135 + 135 \cdot 180)\, MPa^2 = 77850\, MPa^2$$

$$I_3 = 180 \cdot 170 \cdot 135\, MPa^3 = 4131000\, MPa^3$$

Mohrsche Spannungskreise:

b) <u>Größtmögliche Schubspannung:</u>

$$\tau_{max} = \frac{180 - 135}{2}\, MPa = \underline{22{,}5\, MPa}$$

Aufgabe 8:

Zuerst wird das Gleichungssystem nach den Komponenten des Normalenvektors aufgelöst:

$$
\begin{array}{ccccccc|c|c}
n_1^2 & + & n_2^2 & + & n_3^2 & = & 1 & \cdot(-\sigma_3) & \cdot(-\sigma_3^2) \\
\sigma_1 n_1^2 & + & \sigma_2 n_2^2 & + & \sigma_3 n_3^2 & = & \sigma & 1 & \\
\sigma_1^2 n_1^2 & + & \sigma_2^2 n_2^2 & + & \sigma_3^2 n_3^2 & = & \sigma^2+\tau^2 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc|c}
(\sigma_1-\sigma_3) n_1^2 & + & (\sigma_2-\sigma_3) n_2^2 & = & \sigma-\sigma_3 & \cdot(-(\sigma_2+\sigma_3)) \\
(\sigma_1^2-\sigma_3^2) n_1^2 & + & (\sigma_2^2-\sigma_3^2) n_2^2 & = & \tau^2+\sigma^2-\sigma_3^2 & 1
\end{array}
$$

$$\left[(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_1+\sigma_3)-(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_2+\sigma_3)\right] n_1^2=\tau^2+(\sigma-\sigma_3)(\sigma+\sigma_3)-(\sigma-\sigma_3)(\sigma_2+\sigma_3)$$

Zusammenfassen ergibt:

$$(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_1-\sigma_2) n_1^2=\tau^2+(\sigma-\sigma_3)(\sigma-\sigma_2)$$

Entsprechend folgt für die beiden übrigen Komponenten:

$$(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1) n_2^2=\tau^2+(\sigma-\sigma_3)(\sigma-\sigma_1)$$

$$(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2) n_3^2=\tau^2+(\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)$$

Umformen der linken Seite der ersten der letzten drei Gleichungen ergibt:

$$
\begin{aligned}
\left[\sigma_1^2-(\sigma_2+\sigma_3)\sigma_1+\sigma_2\sigma_3\right] n_1^2 &= \left[\left(\sigma_1-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2+\sigma_2\sigma_3\right] n_1^2 \\
&= \left[\left(\sigma_1-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2\right] n_1^2
\end{aligned}
$$

Umformen der rechten Seite führt auf:

$$
\begin{aligned}
\tau^2+\sigma^2-(\sigma_2+\sigma_3)\sigma+\sigma_2\sigma_3 &= \tau^2+\left(\sigma-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2+\sigma_2\sigma_3 \\
&= \tau^2+\left(\sigma-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

Damit ist gezeigt:

$$\tau^2+\left(\sigma-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2=\left(\sigma_1-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 n_1^2+\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2(1-n_1^2)$$

Diese Gleichung beschreibt Kreise um den Mittelpunkt $M_{23}=\left((\sigma_2+\sigma_3)/2,0\right)$ mit den Radien

$$R_{23}^2(n_1^2)=\left(\sigma_1-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 n_1^2+\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2\left(1-n_1^2\right)$$

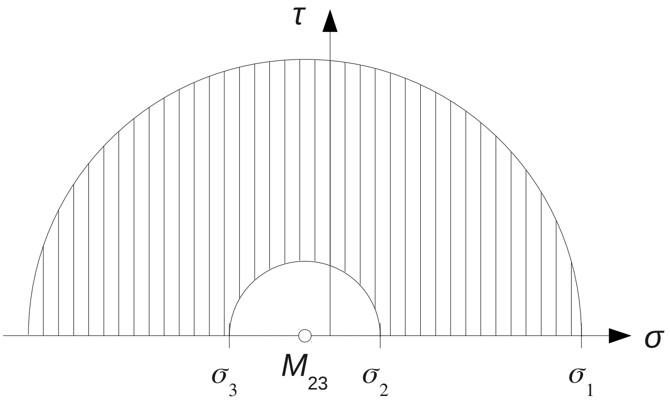
Das Quadrat des Radius variiert linear mit n_1^2 zwischen den Werten

$$R_{23}^2(0)=\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 \quad \text{und} \quad R_{23}^2(1)=\left(\sigma_1-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 \quad .$$

Damit gilt für die Radien

$$\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\le R_{23}\le\left|\sigma_1-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right| \quad ,$$

d.h. die Spannungspunkte müssen in dem senkrecht schraffierten Gebiet liegen:

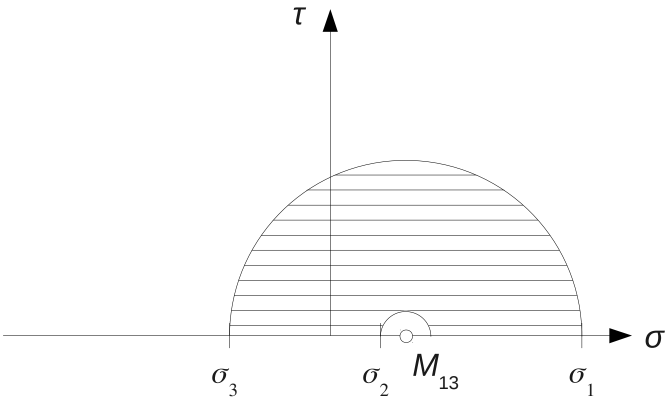


Aus der zweiten Gleichung folgt entsprechend:

$$\tau^2+\left(\sigma-\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)^2=\left(\sigma_2-\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)^2 n_2^2+\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2\left(1-n_2^2\right)$$

Diese Gleichung beschreibt Kreise um den Mittelpunkt $M_{13}=\left((\sigma_1+\sigma_3)/2,0\right)$ mit den Radien

$$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\ge R_{13}\ge\left|\sigma_2-\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right| \quad .$$

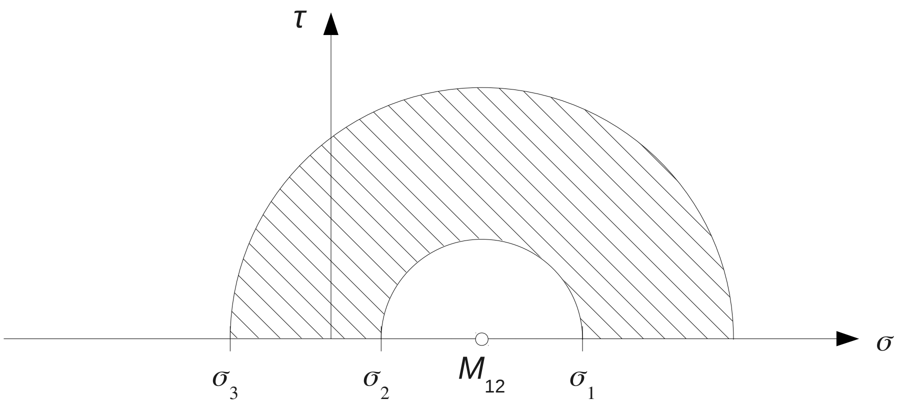


Schließlich folgt aus der letzten Gleichung:

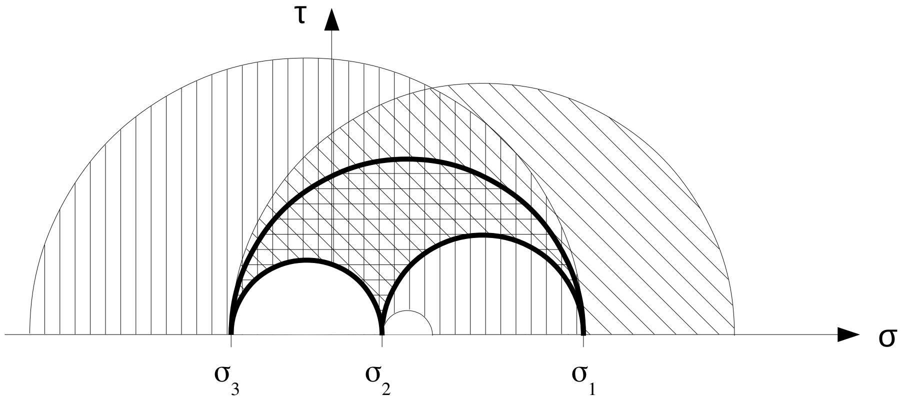
$$\tau^2+\left(\sigma-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2=\left(\sigma_3-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 n_3^2+\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2\left(1-n_3^2\right)$$

Diese Gleichung beschreibt Kreise um den Mittelpunkt $M_{12}=\left((\sigma_1+\sigma_2)/2,0\right)$ mit den Radien

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\le R_{12}\le\left|\sigma_3-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right| \quad .$$



Der Wertebereich für die Spannungspunkte ergibt sich als Durchschnitt der drei Gebiete:



Aufgabe 9:

Im Hauptachsensystem gilt:

$$[\boldsymbol{\sigma}_d]=\begin{bmatrix}\sigma_1-\sigma_m & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2-\sigma_m & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3-\sigma_m\end{bmatrix}$$

Für die 2. Invariante gilt:

$$\begin{aligned}I_{d2}&=(\sigma_1-\sigma_m)(\sigma_2-\sigma_m)+(\sigma_2-\sigma_m)(\sigma_3-\sigma_m)+(\sigma_3-\sigma_m)(\sigma_1-\sigma_m)\\&=\sigma_1\sigma_2-(\sigma_1+\sigma_2)\sigma_m+\sigma_m^2+\sigma_2\sigma_3-(\sigma_2+\sigma_3)\sigma_m+\sigma_m^2\\&\quad+\sigma_3\sigma_1-(\sigma_3+\sigma_1)\sigma_m+\sigma_m^2\\&=3\sigma_m^2-2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\sigma_m+\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\end{aligned}$$

Mit $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=3\sigma_m$ folgt:

$$\begin{aligned}I_{d2}&=-3\sigma_m^2+\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1=-\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2+\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\\&=-\frac{1}{3}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+2\sigma_1\sigma_2+2\sigma_2\sigma_3+2\sigma_3\sigma_1-3\sigma_1\sigma_2-3\sigma_2\sigma_2-3\sigma_3\sigma_1\right)\\&=-\frac{1}{3}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_3\sigma_1\right)\\&=-\frac{1}{6}\left(\sigma_1^2-2\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2+\sigma_2^2-2\sigma_2\sigma_3+\sigma_3^2+\sigma_3^2-2\sigma_3\sigma_1+\sigma_1^2\right)\\&=-\frac{1}{6}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]\end{aligned}$$

In einem allgemeinen Koordinatensystem gilt:

$$[\boldsymbol{\sigma}_d]=\begin{bmatrix}\sigma_x-\sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma_m & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma_m\end{bmatrix}$$

Die 2. Invariante berechnet sich zunächst zu

$$I_{d2}=(\sigma_x-\sigma_m)(\sigma_y-\sigma_m)+(\sigma_y-\sigma_m)(\sigma_z-\sigma_m)+(\sigma_z-\sigma_m)(\sigma_x-\sigma_m)-\tau_{xy}^2-\tau_{xz}^2-\tau_{yz}^2 .$$

Für die ersten drei Summanden folgt wie bei der Berechnung aus den Hauptspannungen:

$$\begin{aligned}&(\sigma_x-\sigma_m)(\sigma_y-\sigma_m)+(\sigma_y-\sigma_m)(\sigma_z-\sigma_m)+(\sigma_z-\sigma_m)(\sigma_x-\sigma_m)\\ &=-\frac{1}{6}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2\right]\end{aligned}$$

Damit gilt: $I_{d2}=-\frac{1}{6}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2\right]-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{xz}^2$

Aufgabe 10:

Für die Oktaedernormalspannung gilt:

$$\sigma_{oct}=\sigma_1 n_1^2+\sigma_2 n_2^2+\sigma_3 n_3^2=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)=\frac{1}{3}\,\mathrm{sp}(\boldsymbol{\sigma})$$

Für den Spannungsvektor auf einer Oktaederfläche gilt:

$$[\boldsymbol{t}_{oct}]_H=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\pm 1\\ \pm 1\\ \pm 1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\pm\sigma_1\\ \pm\sigma_2\\ \pm\sigma_3\end{bmatrix}$$

Für das Quadrat des Betrags folgt: $|\boldsymbol{t}_{oct}|^2=\frac{1}{3}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)$

Damit berechnet sich die Oktaederschubspannung zu

$$\begin{aligned}\tau_{oct}&=\sqrt{|\boldsymbol{t}_{oct}|^2-\sigma_{oct}^2}=\sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)-\frac{1}{9}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2}\\ &=\frac{1}{3}\sqrt{2\sigma_1^2+2\sigma_2^2+2\sigma_3^2-2\sigma_1\sigma_2-2\sigma_2\sigma_3-2\sigma_3\sigma_1}\\ &=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} .\end{aligned}$$

Mit

$$\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2=-6I_{d2}$$

folgt:

$$\begin{aligned}\tau_{oct}&=\sqrt{-\frac{6}{9}I_{d2}}=\sqrt{-\frac{2}{3}I_{d2}}\\&=\sqrt{\frac{2}{18}\left[\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+\left(\sigma_y-\sigma_z\right)^2+\left(\sigma_z-\sigma_x\right)^2\right]+\frac{2}{3}\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2\right)}\\&=\frac{1}{3}\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+\left(\sigma_y-\sigma_z\right)^2+\left(\sigma_z-\sigma_x\right)^2+6\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2\right)}\end{aligned}$$

Aufgabe 11:

a) Größtmögliche Schubspannung:

Für einen einachsigen Spannungszustand sind die Hauptspannungen

$$\sigma_1=\sigma_x,\quad \sigma_2=\sigma_3=0 \quad .$$

Die größtmögliche Schubspannung ist also $\tau_{max}=\frac{\sigma_1}{2}=\frac{\sigma_x}{2}$.

b) Spannungsdeviator:

Die mittlere Normalspannung ist: $\sigma_m=\frac{1}{3}\sigma_x$

Damit gilt für den Spannungsdeviator:

$$\left[\boldsymbol{\sigma}_d\right]=\begin{bmatrix}\sigma_x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\sigma_x & 0 & 0\\ 0 & \sigma_x & 0\\ 0 & 0 & \sigma_x\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\sigma_x & 0 & 0\\ 0 & -\sigma_x & 0\\ 0 & 0 & -\sigma_x\end{bmatrix}$$

Die zweite Invariante berechnet sich zu

$$I_{d2}=-2\frac{\sigma_x^2}{9}+\frac{\sigma_x^2}{9}-2\frac{\sigma_x^2}{9}=-\frac{1}{3}\sigma_x^2.$$

c) Oktaederspannungen:

Oktaedernormalspannung: $\sigma_{okt}=\frac{1}{3}\sigma_x$

Oktaederschubspannung: $\tau_{okt}=\frac{1}{3}\sqrt{2\sigma_x^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_x=\frac{2\sqrt{2}}{3}\tau_{max}=0{,}9428\,\tau_{max}$

Aufgabe 12:

Fließen tritt ein für $\sigma_x=R_e$. Dann gilt für die Oktaederschubspannung:

$$\tau_{oktF}=\frac{\sqrt{2}}{3}R_e=0{,}4714\,R_e$$

Für die größte Schubspannung gilt: $\tau_{max}=\frac{1}{2}R_e=0{,}5\,R_e$

Aufgabe 13:

a) Hauptspannungen:

Invarianten: $I_1=\mathrm{sp}(\boldsymbol{\sigma})=0$, $I_2=-3\tau^2$, $I_3=2\tau^3$

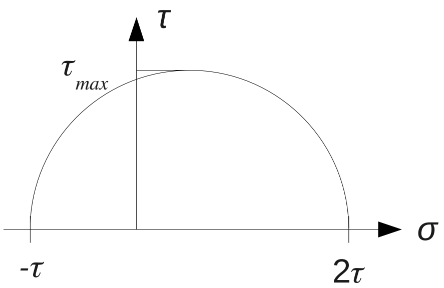
Charakteristische Gleichung: $\sigma_k^3-3\tau^2\sigma_k-2\tau^3=0 \rightarrow \left(\frac{\sigma_k}{\tau}\right)^3-3\left(\frac{\sigma_k}{\tau}\right)-2=0$

Hauptspannungen: $\sigma_1=2\tau$, $\sigma_2=\sigma_3=-\tau$

Dass die Nullstelle $\sigma=-\tau$ doppelt ist, folgt aus

$$(\sigma-2\tau)(\sigma+\tau)^2=(\sigma-2\tau)(\sigma^2+2\sigma\tau+\tau^2)=\sigma^3-3\tau^2\sigma-2\tau^3 \quad .$$

Mohrsche Spannungskreise:



b) Größtmögliche Schubspannung:

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\frac{3}{2}\tau$$

c) Vergleichsspannung nach von Mises:

$$\sigma_{V,M}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\tau^2}=3\tau$$

d) Oktaederspannungen:

Oktaedernormalspannung: $\sigma_{okt}=0$

Oktaederschubspannung: $\tau_{okt}=\frac{1}{3}\sqrt{6\cdot 3\tau^2}=\sqrt{2}\tau=1{,}414\tau$

Aufgabe 14:

a) Mohrsche Spannungskreise:

Offenes Rohr:

Innenseite: $\sigma_r(r_i)=-p=\sigma_3$, $\sigma_t(r_i)=\frac{5}{3}p=\sigma_1$, $\sigma_x=0=\sigma_2$

Außenseite: $\sigma_r(r_a)=0=\sigma_3$, $\sigma_t(r_a)=\frac{2}{3}p=\sigma_1$, $\sigma_x=0=\sigma_2$

Geschlossenes Rohr:

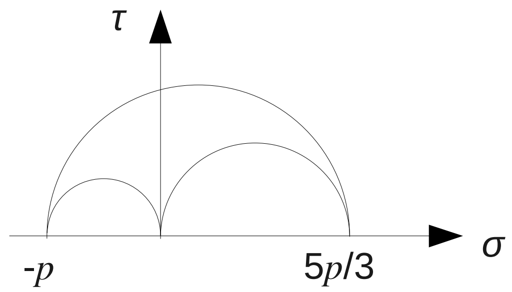
Innenseite: $\sigma_r(r_i)=-p=\sigma_3$, $\sigma_t(r_i)=\frac{5}{3}p=\sigma_1$, $\sigma_x=\frac{p}{3}=\sigma_2$

Außenseite: $\sigma_r(r_a)=0=\sigma_3$, $\sigma_t(r_a)=\frac{2}{3}p=\sigma_1$, $\sigma_x=\frac{p}{3}=\sigma_2$

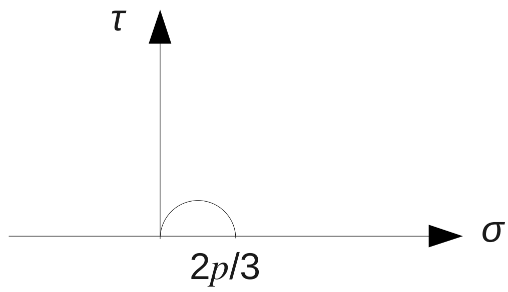
In allen Fällen zeigt die erste Hauptachse in Umfangsrichtung, die zweite Hauptachse in Längsrichtung und die dritte Hauptachse in radialer Richtung.

Mohrsche Spannungskreise:

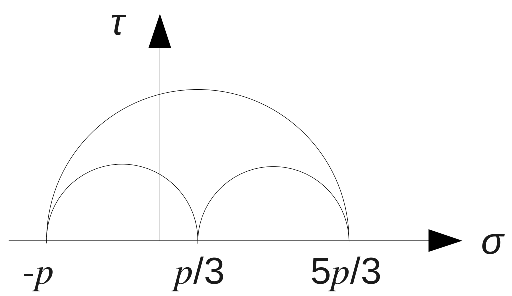
Offenes Rohr, Innenseite:



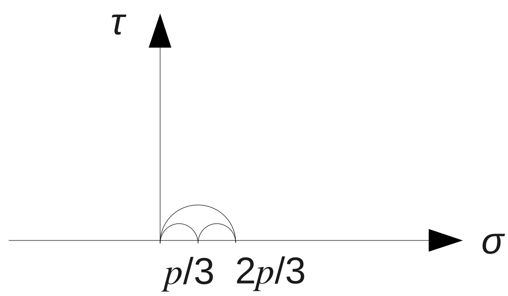
Offenes Rohr, Außenseite:



Geschlossenes Rohr, Innenseite:



Geschlossenes Rohr, Außenseite:



Kritisch ist die Innenseite. Die größte Schubspannung hat für das offene und das geschlossene Rohr den gleichen Wert.

b) <u>Innendruck bei Fließbeginn für das offenen Rohr:</u>

Fließen tritt zuerst an der Innenseite auf. Die größte Schubspannung an der Innenseite berechnet sich zu

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}+1\right)p=\frac{4}{3}p \quad .$$

Für die Vergleichsspannung nach von Mises gilt

$$\sigma_{V,M}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{5}{3}\right)^2+(-1)^2+\left(-1-\frac{5}{3}\right)^2\right]}\,p=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5^2+3^2+8^2}{2}}=\frac{7}{3}p \quad .$$

Schubspannungshypothese:

$$\tau_{max}=\frac{R_e}{2} \rightarrow \frac{4}{3}p_{F,SH}=\frac{R_e}{2} \rightarrow p_{F,SH}=\frac{3}{8}R_e$$

Gestaltänderungshypothese:

$$\sigma_{V,GH}=\sigma_{V,M}=R_e \rightarrow \frac{7}{3}p_{F,GH}=R_e \rightarrow p_{F,GH}=\frac{3}{7}R_e$$

Zahlenwerte:

$$p_{F,SH}=\frac{3}{8}\cdot 235\,MPa=\underline{88{,}13\,MPa} \quad , \quad p_{F,GH}=\frac{3}{7}\cdot 235\,MPa=\underline{100{,}7\,MPa}$$

c) <u>Innendruck bei Fließbeginn für das geschlossene Rohr:</u>

Die Längsspannung liegt zwischen der kleinsten und der größten Hauptspannung. Daher ändert sich die größte Schubspannung und damit auch der Innendruck bei Fließbeginn nach der Schubspannungshypothese nicht.

Vergleichsspannung nach von Mises:

$$\sigma_{V,M}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}+1\right)^2+\left(-1-\frac{5}{3}\right)^2\right]}\,p=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4^2+4^2+8^2}{2}}\,p=\frac{4}{\sqrt{3}}p$$

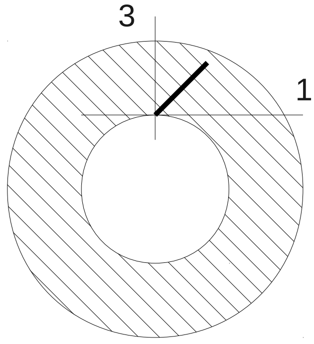
$$\sigma_{V,M}=R_e \rightarrow \frac{4}{\sqrt{3}}p_{F,GH}=R_e \rightarrow p_{F,GH}=\frac{\sqrt{3}}{4}R_e$$

Zahlenwert:

$$p_{F,GH}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 235\,MPa=\underline{101{,}8\,MPa}$$

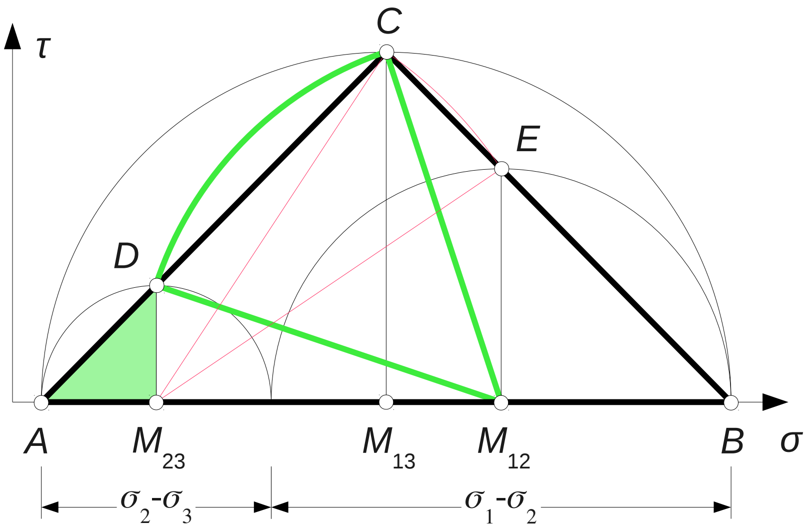
Beim geschlossenen Rohr tritt Fließen bei einem etwas höheren Innendruck ein als beim offenen Rohr.

d) <u>Bruchfläche:</u>



Die Schnittebene mit der größten Schubspannung ist in beiden Fällen parallel zur zweiten Hauptachse und bildet mit der ersten und der dritten Hauptachse einen Winkel von 45°. Sie liegt also parallel zur Längsachse und verläuft unter 45° zur radialen und zur Umfangsrichtung.

Aufgabe 15:



Die größte Schubspannung tritt im Punkt *C* auf. Das Dreieck *ABC* ist ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck. Daher gilt:

$$\sphericalangle(CAB) = \sphericalangle(CBA) = 45°$$

Punkt *D* ist der Schnittpunkt der Geraden *AC* mit dem Mohrschen Kreis um Punkt M_{23} und Punkt *E* der Schnittpunkt der Geraden *BC* mit dem Mohrschen Kreis um Punkt M_{12}.

Wegen $|\overline{M_{23}A}| = |\overline{M_{23}D}|$ ist Dreieck $AM_{23}D$ ein gleichschenkliges und wegen $\sphericalangle(M_{23}DA) = \sphericalangle(M_{23}AD) = \sphericalangle(BAC) = 45°$ ein rechtwinkliges Dreieck. Also gilt:

$$\sphericalangle(AM_{23}D) = 90°$$

Entsprechend folgt: $\sphericalangle(BM_{23}E) = 90°$

Um $\sphericalangle(AM_{23}D) = 2\alpha_3$ zu zeigen, ist nachzuweisen, dass Punkt *D* auf dem durch Punkt *C* verlaufenden Kreis um Punkt M_{12} liegt, d.h. $|\overline{M_{12}D}| = |\overline{M_{12}C}|$.

Einerseits gilt: $|\overline{M_{12}C}| = \sqrt{|\overline{M_{12}M_{13}}|^2 + |\overline{M_{13}C}|^2}$

Mit

$$|\overline{M_{12}M_{13}}| = |\overline{M_{13}B}| - |\overline{M_{12}B}| = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

und

$$\left|\overline{M_{13}C}\right| = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

folgt: $\left|\overline{M_{12}C}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_1 - \sigma_3\right)^2}$

Andererseits gilt: $\left|\overline{M_{12}D}\right| = \sqrt{\left|\overline{M_{12}M_{23}}\right|^2 + \left|\overline{M_{23}D}\right|^2}$

Mit

$$\left|\overline{M_{12}M_{23}}\right| = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

und

$$\left|\overline{M_{23}D}\right| = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

folgt: $\left|\overline{M_{12}D}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2}$

Damit ist $\left|\overline{M_{12}D}\right| = \left|\overline{M_{12}C}\right|$ gezeigt. Es gilt also:

$$2\alpha_3 = \sphericalangle(AM_{23}D) = 90° \quad \rightarrow \quad \alpha_3 = 45°$$

Entsprechend lässt sich $\left|\overline{M_{23}C}\right| = \left|\overline{M_{23}E}\right|$ zeigen, woraus folgt:

$$2\alpha_1 = \sphericalangle(BM_{12}E) = 90° \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = 45°$$

Aus $\cos^2(\alpha_1) + \cos^2(\alpha_2) + \cos^2(\alpha_3) = 1$ folgt schließlich:

$$\cos^2(\alpha_2) = 1 - 2\cos^2(45°) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_2 = \pm 45°$$

Aufgabe 16:

a) <u>Hauptspannungen:</u>

Invarianten:

$$I_1 = \left(75 + 93 + 102\right) MPa = 270\, MPa$$

$$I_2 = \left(75 \cdot 93 + 93 \cdot 102 + 75 \cdot 102 - 60^2 - 120^2 - 6^2\right) MPa^2 = 6075\, MPa^2$$

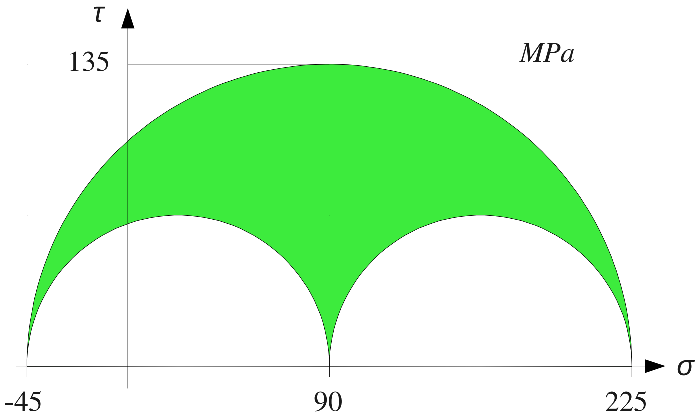
$$\begin{aligned} I_3 = |\boldsymbol{\sigma}| &= \left[75\left(93 \cdot 102 - 6^2\right) + 60\left(-60 \cdot 102 + 120 \cdot 6\right) + 120\left(60 \cdot 6 - 120 \cdot 93\right)\right] MPa^3 \\ &= \left[708750 - 324000 - 1296000\right] MPa^3 = -911250\, MPa^3 \end{aligned}$$

Charakteristische Gleichung:

$$\sigma_k^3 - 270\,MPa\cdot\sigma_k^2 + 6075\,MPa^2\cdot\sigma_k + 911250\,MPa^3 = 0$$

Hauptspannungen:

$$\sigma_1 = 225\,MPa,\quad \sigma_2 = 90\,MPa,\quad \sigma_3 = -45\,MPa$$



b) <u>Größte Schubspannung:</u>

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{225+45}{2}\,MPa = \underline{135\,MPa}$$

c) <u>Spannungsdeviator und Vergleichsspannung:</u>

Die 2. Invariante des Spannungsdeviators kann aus den Hauptspannungen berechnet werden:

$$I_{d2} = -\frac{1}{6}\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2\right]$$

Zahlenwert:

$$I_{d2} = -\frac{1}{6}\left(135^2 + 135^2 + 270^2\right)MPa^2 = \underline{-18225\,MPa^2}$$

Für die Vergleichsspannung nach von Mises gilt:

$$\sigma_{V,M} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2\right]} = \sqrt{-3I_{d2}}$$

Zahlenwert:

$$\sigma_{V,M} = \sqrt{3\cdot 18225}\,MPa = \underline{233{,}8\,MPa}$$

Aufgabe 17:

Spannungen in der vorgegebenen Schnittebene:

Spannungsvektor:

$$[\boldsymbol{t}]=\begin{bmatrix}162 & -72 & 72\\ -72 & -18 & -72\\ 72 & -72 & 162\end{bmatrix} MPa\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}162\\-252\\252\end{bmatrix} MPa=\begin{bmatrix}54\\-84\\84\end{bmatrix} MPa$$

Normalspannung:

$$\sigma_n=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}54\\-84\\84\end{bmatrix} MPa=\frac{54}{3} MPa=\underline{18\ MPa}$$

Schubspannung:

$$|\boldsymbol{t}|^2=\left(54^2+2\cdot 84^2\right) MPa^2=17028\ MPa^2$$

$$\tau_{tn}=\sqrt{17028-18^2}\ MPa=\sqrt{17028-324}\ MPa=\sqrt{16704}\ MPa=\underline{129{,}2\ MPa}$$

Größte Normalspannung:

Die größtmögliche Normalspannung ist gleich der 1. Hauptspannung.

Invarianten des Spannungstensors:

$$I_1=(162-18+162)\ MPa=306\ MPa$$

$$I_2=\left(-162\cdot 18-18\cdot 162+162^2\right) MPa^2-3\cdot 72^2\ MPa^2=4860\ MPa^2$$

$$I_3=\left[162\cdot\left(-18\cdot 162-72^2\right)+72\cdot\left(-72\cdot 162+72^2\right)+72\cdot\left(72^2+72\cdot 18\right)\right] MPa^3$$
$$=-1312200\ MPa^3$$

Charakteristische Gleichung:

$$\sigma^3-306\ MPa\cdot\sigma^2+4860\ MPa^2\cdot\sigma+1312200\ MPa^3=0$$

Lösungen: $\sigma_1=270\ MPa$, $\sigma_2=90\ MPa$, $\sigma_3=-54\ MPa$

$$\sigma_{max}=\sigma_1=270\ MPa$$

Der zugehörige Normalenvektor ist gleich dem Eigenvektor zur 1. Hauptspannung:

$$\boldsymbol{n}_{max}=\boldsymbol{e}_1$$

$$\begin{bmatrix} 162-270 & -72 & 72 \\ -72 & -18-270 & -72 \\ 72 & -72 & 162-270 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aus den ersten beiden Zeilen folgt:

$$\begin{bmatrix} -108 & -72 \\ -72 & -288 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -72 \\ 72 \end{bmatrix} e_{1z} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \end{bmatrix} = \frac{1}{25920} \begin{bmatrix} -288 & 72 \\ 72 & -108 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -72 \\ 72 \end{bmatrix} e_{1z}$$

$$\begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \end{bmatrix} = \frac{1}{25920} \begin{bmatrix} 25920 \\ -12960 \end{bmatrix} e_{1z} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e_{1z}$$

Normierung:

$$1 = e_{1x}^2 + e_{1y}^2 + e_{1z}^2 = \left(1 + \frac{1}{4} + 1 \right) e_{1z}^2 = \frac{9}{4} e_{1z}^2 \quad \rightarrow \quad e_{1z} = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad [n_{max}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$