

1.2 Verzerrungszustand

Lösungen

Aufgabe 1:

a) Verschiebungsgradient:

Die partiellen Ableitungen berechnen sich zu

$$\frac{\partial [\mathbf{u}]}{\partial x} = \begin{bmatrix} 6bx \\ 3a \\ -2a \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial [\mathbf{u}]}{\partial y} = \begin{bmatrix} -3a \\ 4by \\ a \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial [\mathbf{u}]}{\partial z} = \begin{bmatrix} 2a \\ -a \\ 2bz \end{bmatrix}.$$

Damit gilt für den Verschiebungsgradienten:

$$[\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial [\mathbf{u}]}{\partial x} & \frac{\partial [\mathbf{u}]}{\partial y} & \frac{\partial [\mathbf{u}]}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6bx & -3a & 2a \\ 3a & 4by & -a \\ -2a & a & 2bz \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{H}]^T = \begin{bmatrix} 6bx & 3a & -2a \\ -3a & 4by & a \\ 2a & -a & 2bz \end{bmatrix}$$

Sein antimetrischer Anteil ist

$$[\mathbf{\Omega}] = \frac{1}{2}([\mathbf{H}] - [\mathbf{H}]^T) = \begin{bmatrix} 0 & -3a & 2a \\ 3a & 0 & -a \\ -2a & a & 0 \end{bmatrix}.$$

Der symmetrische Anteil (Verzerrungstensor) berechnet sich zu

$$[\mathbf{\epsilon}] = \frac{1}{2}([\mathbf{H}] + [\mathbf{H}]^T) = \begin{bmatrix} 6bx & 0 & 0 \\ 0 & 4by & 0 \\ 0 & 0 & 2bz \end{bmatrix}.$$

b) Daten im Punkt P:

Verschiebung:

$$[\mathbf{u}(1,2,3)] = \begin{bmatrix} 0,015 \cdot (2 \cdot 3 - 3 \cdot 2) + 3 \cdot 0,001 \cdot 1^2 \\ 0,015 \cdot (3 \cdot 1 - 3) + 2 \cdot 0,001 \cdot 2^2 \\ 0,015 \cdot (2 - 2 \cdot 1) + 0,001 \cdot 3^2 \end{bmatrix} \text{ cm} = \begin{bmatrix} 0,003 \\ 0,008 \\ 0,009 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

Dehnungen:

$$\epsilon_x(1,2,3)=0,006 \quad , \quad \epsilon_y(1,2,3)=0,008 \quad , \quad \epsilon_z(1,2,3)=0,006$$

Aufgabe 2:

a) Verschiebungsgradient und Verzerrungstensor:

Verschiebungsgradient:

$$[\mathbf{H}] = a \begin{bmatrix} -6z & 0 & -6x \\ 0 & 2z & 2y \\ 8x & -2y & 2z \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{H}]^T = a \begin{bmatrix} -6z & 0 & 8x \\ 0 & 2z & -2y \\ -6x & 2y & 2z \end{bmatrix}$$

Verzerrungstensor:

$$[\boldsymbol{\epsilon}] = a \begin{bmatrix} -6z & 0 & x \\ 0 & 2z & 0 \\ x & 0 & 2z \end{bmatrix}$$

b) Hauptdehnungen und Dilatation im Punkt P:

Verzerrungstensor im Punkt P:

$$[\boldsymbol{\epsilon}(2,1,1)] = a \begin{bmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Hauptdehnungen:

Invarianten:

$$I_1 = (-6 + 2 + 2)a = -2a$$

$$I_2 = (-6 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-6) - 2^2)a^2 = -24a^2$$

$$I_3 = 2 \cdot (-6 \cdot 2 - 2^2) = -32a^3$$

Charakteristische Gleichung:

$$\epsilon_k^3 + 2a\epsilon_k^2 - 24a^2\epsilon_k + 32a^3 = 0$$

Hauptdehnungen: $\epsilon_1 = 2,472a$, $\epsilon_2 = 2a$, $\epsilon_3 = -6,472a$

Dilatation: $\epsilon_v = (-6 + 2 + 2)a = -2a$

Aufgabe 3:

Die gegebenen Vektoren sind Einheitsvektoren. Damit gilt für die Dehnungen:

$$\begin{aligned}\epsilon_a &= [\mathbf{a}]^T [\boldsymbol{\epsilon}] [\mathbf{a}] = \frac{10^{-5}}{9} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 324 & -8 & 40 \\ -8 & 336 & 20 \\ 40 & 20 & 310 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{10^{-5}}{9} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 720 \\ 360 \\ 720 \end{bmatrix} \\ &= \frac{10^{-5}}{9} \cdot 3240 = 360 \cdot 10^{-5} = \underline{3,6 \cdot 10^{-3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_b &= [\mathbf{b}]^T [\boldsymbol{\epsilon}] [\mathbf{b}] = \frac{10^{-5}}{5} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 324 & -8 & 40 \\ -8 & 336 & 20 \\ 40 & 20 & 310 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{10^{-5}}{5} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -340 \\ 680 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{10^{-5}}{5} \cdot 1700 = 340 \cdot 10^{-5} = \underline{3,4 \cdot 10^{-3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_c &= [\mathbf{c}]^T [\boldsymbol{\epsilon}] [\mathbf{c}] = \frac{10^{-5}}{45} \begin{bmatrix} -4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 324 & -8 & 40 \\ -8 & 336 & 20 \\ 40 & 20 & 310 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{10^{-5}}{45} \begin{bmatrix} -4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1080 \\ -540 \\ 1350 \end{bmatrix} = \frac{10^{-5}}{45} \cdot 12150 = 270 \cdot 10^{-5} = \underline{2,7 \cdot 10^{-3}}\end{aligned}$$

Aufgabe 4:

Antimetrischer Anteil:

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\Omega}] &= \frac{1}{2} ([\mathbf{H}] - [\mathbf{H}]^T) = \frac{10^{-4}}{2} \left(\begin{bmatrix} 0,79 & -3,8 & 7,6 \\ -3,6 & 1,9 & -0,57 \\ 7,2 & -0,17 & 2,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,79 & -3,6 & 7,2 \\ -3,8 & 1,9 & -0,17 \\ 7,6 & -0,57 & 2,5 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & -0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \\ [\boldsymbol{\omega}] &= \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$

Linearisierter Verzerrungstensor:

$$\begin{aligned}
 [\epsilon] &= \frac{1}{2} ([H] + [H]^T) = \frac{10^{-4}}{2} \left(\begin{bmatrix} 0,79 & -3,8 & 7,6 \\ -3,6 & 1,9 & -0,57 \\ 7,2 & -0,17 & 2,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,79 & -3,6 & 7,2 \\ -3,8 & 1,9 & -0,17 \\ 7,6 & -0,57 & 2,5 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0,79 & -3,7 & 7,4 \\ -3,7 & 1,9 & -0,37 \\ 7,4 & -0,37 & 2,5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 5:

Die Beweise erfolgen durch elementares Ausrechnen:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial y} - \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z} - \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{\partial u}{\partial x} \\
 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial z} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{\partial v}{\partial y} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 \right) \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z} = 0 \\
& \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial z^2} = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 6:

Verschiebungsgradienten:

$$[\mathbf{H}_1(x, y, z)] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Phi, \quad [\mathbf{H}_2(x, y, z)] = \begin{bmatrix} a & 2d & 0 \\ 0 & b & 2e \\ 2f & 0 & c \end{bmatrix}$$

Verzerrungstensoren:

$$[\epsilon_1] = [\mathbf{0}], \quad [\epsilon_2] = \begin{bmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{bmatrix}$$

Die Verzerrungen für den Verschiebungsvektor $\mathbf{u}_1$ sind null. Er beschreibt somit eine Starrkörperbewegung.