1.3 Elastizitätsgesetz

Lösungen

Aufgabe 1:

a) Verzerrungen:

Dehnungen:

$$\epsilon_x = \frac{(162 - 0{,}3 \cdot 168 - 0{,}3 \cdot 155)\ MPa}{204000\ MPa} = \underline{3{,}191 \cdot 10^{-4}}$$

$$\epsilon_y = \frac{-0{,}3 \cdot 162 + 168 - 0{,}3 \cdot 155}{204000} = \underline{3{,}574 \cdot 10^{-4}}$$

$$\epsilon_z = \frac{-0{,}3 \cdot 162 - 0{,}3 \cdot 168 + 155}{204000} = \underline{2{,}745 \cdot 10^{-4}}$$

Schubmodul:

$$G = \frac{204000\ MPa}{2{,}6} = 78462\ MPa$$

Scherungen:

$$\gamma_{xy} = \frac{-4\ MPa}{78462\ MPa} = \underline{-5{,}098 \cdot 10^{-5}}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{10}{78462} = \underline{1{,}275 \cdot 10^{-4}} \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{20}{78462} = \underline{2{,}549 \cdot 10^{-4}}$$

b) Dilatation:

Direkte Berechnung aus den Dehnungen;

$$\epsilon_v = (3{,}191 + 3{,}574 + 2{,}745) \cdot 10^{-4} = \underline{9{,}510 \cdot 10^{-4}}$$

Berechnung mit dem Kompressionsmodul:

$$K = \frac{204000\ MPa}{3 \cdot (1 - 2 \cdot 0.3)} = 170000\ MPa$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\left(162+168+155\right) MPa = 161{,}7\, MPa$$

$$\epsilon_v = \frac{161{,}7\, MPa}{170000\, MPa} = \underline{9{,}512 \cdot 10^{-4}}$$

Aufgabe 2:

a) <u>Hauptdehnungen und Hauptdehnungsrichtungen:</u>

Verzerrungsinvarianten:

$$I_1 = \left(324+336+310\right) \cdot 10^{-5} = 97 \cdot 10^{-4}$$

$$I_2 = \left(324 \cdot 336 + 336 \cdot 310 + 324 \cdot 310 - 8^2 - 40^2 - 20^2\right) \cdot 10^{-10} = 3114 \cdot 10^{-8}$$

$$I_3 = \left[324 \cdot \left(336 \cdot 310 - 20^2\right) + 8 \cdot \left(-8 \cdot 310 - 40 \cdot 20\right) + 40 \cdot \left(-8 \cdot 20 - 40 \cdot 336\right)\right] \cdot 10^{-15}$$
$$= 33048 \cdot 10^{-12}$$

Charakteristische Gleichung:

$$\epsilon_k^3 - 97 \cdot 10^{-4} \epsilon_k^2 + 3114 \cdot 10^{-8} \epsilon_k - 33048 \cdot 10^{-12} = 0$$

Hauptdehnungen:

$$\epsilon_1 = 3{,}6 \cdot 10^{-3}, \quad \epsilon_2 = 3{,}4 \cdot 10^{-3}, \quad \epsilon_3 = 2{,}7 \cdot 10^{-3}$$

Probe:

$$I_1 = \left(3{,}6 + 3{,}4 + 2{,}7\right) \cdot 10^{-3} = 9{,}7 \cdot 10^{-3}$$

$$I_2 = \left(3{,}6 \cdot 3{,}4 + 3{,}4 \cdot 2{,}7 + 3{,}6 \cdot 2{,}7\right) \cdot 10^{-6} = 31{,}14 \cdot 10^{-6}$$

$$I_3 = 3{,}6 \cdot 3{,}4 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-9} = 33{,}048 \cdot 10^{-9}$$

Erste Hauptachse: $\epsilon_1 = 3{,}6 \cdot 10^{-3}$

$$\begin{bmatrix} 324-360 & -8 \\ -8 & 336-360 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 & -8 \\ -8 & -24 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 40 \\ 20 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5} e_{1z}$$

$$\begin{bmatrix} -9 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} e_{1z} \rightarrow \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \end{bmatrix} = -\frac{1}{50} \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} e_{1z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} e_{1z}$$

$$1 = e_{1x}^2 + e_{1y}^2 + e_{1z}^2 = \left(1 + 0{,}5^2 + 1\right) e_{1z}^2 = \frac{9}{4} e_{1z}^2 \rightarrow e_{1z} = \frac{2}{3} \rightarrow \left[\boldsymbol{e_1}\right] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Zweite Hauptachse: $\epsilon_2 = 3{,}4 \cdot 10^{-3}$

$$\begin{bmatrix} 324-340 & 40 \\ 40 & 310-340 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5} \begin{bmatrix} e_{2x} \\ e_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 40 \\ 40 & -30 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5} \begin{bmatrix} e_{2x} \\ e_{2z} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -8 \\ 20 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5} e_{2y}$$

$$\begin{bmatrix} -16 & 40 \\ 40 & -30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{2x} \\ e_{2z} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -8 \\ 20 \end{bmatrix} e_{2y}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} e_{2x} \\ e_{2z} \end{bmatrix} = \frac{1}{1120} \begin{bmatrix} -30 & -40 \\ -40 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 20 \end{bmatrix} e_{2y} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} e_{2y}$$

$$1 = e_{2x}^2 + e_{2y}^2 + e_{2z}^2 = \left(\frac{1}{4} + 1 \right) e_{2y}^2 = \frac{5}{4} e_{2y}^2 \rightarrow e_{2y} = \frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow [\boldsymbol{e_2}] = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dritte Hauptachse: $\epsilon_3 = 2{,}7 \cdot 10^{-3}$

$$[\boldsymbol{e_3}] = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Probe:

$$\frac{10^{-5}}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 324 & -8 & 40 \\ -8 & 336 & 20 \\ 40 & 20 & 310 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{10^{-5}}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1080 \\ -540 \\ 1350 \end{bmatrix} = 2{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

b) <u>Spannungen:</u>

$$\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{204000\,MPa}{(1+0{,}3)(1-2\cdot 0.3)} = 392308\,MPa$$

$$\sigma_x = 392308\,MPa \cdot \left((1-0{,}3) \cdot 324 + 0{,}3 \cdot 336 + 0{,}3 \cdot 310 \right) \cdot 10^{-5} = \underline{1650\,MPa}$$

$$\sigma_y = 392308\,MPa \cdot \left(0{,}3 \cdot 324 + 0{,}7 \cdot 336 + 0{,}3 \cdot 310 \right) \cdot 10^{-5} = \underline{1669\,MPa}$$

$$\sigma_z = 392308\,MPa \cdot \left(0{,}3 \cdot 324 + 0{,}3 \cdot 336 + 0{,}7 \cdot 310 \right) \cdot 10^{-5} = \underline{1628\,MPa}$$

$$\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \frac{(1-2\nu)}{2} = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{204000\,MPa}{2{,}6} = 78462\,MPa = G$$

$$\gamma_{xy} = 2\,\epsilon_{xy} = -16 \cdot 10^{-5}, \quad \gamma_{yz} = 2\,\epsilon_{yz} = 40 \cdot 10^{-5}, \quad \gamma_{xz} = 2\,\epsilon_{xz} = 80 \cdot 10^{-5}$$

$$\tau_{xy} = -78462\,MPa \cdot 16 \cdot 10^{-5} = \underline{-12{,}55\,MPa}$$

$$\tau_{yz}=78462\,MPa\cdot 40\cdot 10^{-5}=\underline{31{,}38\,MPa}$$

$$\tau_{xz}=78462\,MPa\cdot 80\cdot 10^{-5}=\underline{62{,}77\,MPa}$$

Spannungstensor: $$[\boldsymbol{\sigma}]=\begin{bmatrix}1650 & -12{,}55 & 62{,}77\\ -12{,}55 & 1669 & 31{,}38\\ 62{,}77 & 31{,}38 & 1628\end{bmatrix} MPa$$

c) <u>Hauptspannungen:</u>

Invarianten:

$$I_1=(1650+1669+1628)\,MPa=4947\,MPa$$

$$I_2=\left(1650\cdot 1669+1669\cdot 1628+1620\cdot 1628-12{,}55^2-31{,}38^3-62{,}77^2\right)MPa^2$$
$$=8152100\,MPa^2$$

$$I_3=\begin{vmatrix}1650 & -12{,}55 & 62{,}77\\ -12{,}55 & 1669 & 31{,}38\\ 62{,}77 & 31{,}38 & 1628\end{vmatrix} MPa^3=4474761202\,MPa^3$$

Charakteristische Gleichung:

$$\sigma_k^3-4947\,MPa\cdot\sigma_k^2+8152100\,MPa^2\cdot\sigma_k-4474761202\,MPa^3=0$$

Hauptspannungen aus dem Spannungstensor:

$$\sigma_1=1706\,MPa\,,\quad \sigma_2=1675\,MPa\,,\quad \sigma_3=1565\,MPa$$

Berechnung der Hauptspannungen aus den Hauptdehnungen:

$$\sigma_1=392308\,MPa\cdot(0{,}7\cdot 3{,}6+0{,}3\cdot 3{,}4+0{,}3\cdot 2{,}7)\cdot 10^{-3}=1707\,MPa$$

$$\sigma_2=392308\,MPa\cdot(0{,}3\cdot 3{,}6+0{,}7\cdot 3{,}4+0{,}3\cdot 2{,}7)\cdot 10^{-3}=1675\,MPa$$

$$\sigma_3=392308\,MPa\cdot(0{,}3\cdot 3{,}6+0{,}3\cdot 3{,}4+0{,}7\cdot 2{,}7)\cdot 10^{-3}=1565\,MPa$$

d) <u>Hauptspannungsrichtungen:</u>

Erste Hauptachse: $\sigma_1=1706\,MPa$

$$\begin{bmatrix}1650-1706 & -12{,}55\\ -12{,}55 & 1669-1706\end{bmatrix} MPa\cdot\begin{bmatrix}e_{1x}\\ e_{1y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-56 & -12{,}55\\ -12{,}55 & -37\end{bmatrix} MPa\cdot\begin{bmatrix}e_{1x}\\ e_{1y}\end{bmatrix}$$
$$=-\begin{bmatrix}62{,}77\\ 31{,}38\end{bmatrix} e_{1z}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \end{bmatrix} = -\frac{1}{1914} \begin{bmatrix} -37 & 12{,}55 \\ 12{,}55 & -56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 62{,}77 \\ 31{,}38 \end{bmatrix} e_{1z} = \begin{bmatrix} 1{,}008 \\ 0{,}5065 \end{bmatrix} e_{1z}$$

$$1 = e_{1x}^2 + e_{1y}^2 + e_{1z}^2 = \left(1{,}008^2 + 0{,}5065^2 + 1\right) e_{1z}^2 \rightarrow e_{1z} = 0{,}6633 \rightarrow [\boldsymbol{e_1}] = \begin{bmatrix} 0{,}6686 \\ 0{,}3360 \\ 0{,}6633 \end{bmatrix}$$

Zweite Hauptachse: $\sigma_2 = 1675\, MPa$

$$\begin{bmatrix} 1650-1675 & 62{,}77 \\ 62{,}77 & 1628-1675 \end{bmatrix} MPa \cdot \begin{bmatrix} e_{2x} \\ e_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 & 62{,}77 \\ 62{,}77 & -47 \end{bmatrix} MPa \cdot \begin{bmatrix} e_{2x} \\ e_{2z} \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} -12{,}55 \\ 31{,}38 \end{bmatrix} e_{2y}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} e_{2x} \\ e_{2z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2765} \begin{bmatrix} -47 & -62{,}77 \\ -62{,}77 & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12{,}55 \\ 31{,}38 \end{bmatrix} e_{2y} = \begin{bmatrix} -0{,}4990 \\ 0 \end{bmatrix} e_{2y}$$

$$1 = e_{2x}^2 + e_{2y}^2 + e_{2z}^2 = \left(0{,}4990^2 + 1\right) e_{2y}^2 \rightarrow e_{2y} = 0{,}8948 \rightarrow [\boldsymbol{e_2}] = \begin{bmatrix} -0{,}4465 \\ 0{,}8948 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dritte Hauptachse: $\sigma_3 = 1565\, MPa$

$$[\boldsymbol{e_3}] = \begin{bmatrix} 0{,}6686 \\ 0{,}3360 \\ 0{,}6633 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0{,}4465 \\ 0{,}8948 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5935 \\ -0{,}2961 \\ 0{,}7483 \end{bmatrix}$$

Die Hauptspannungsrichtungen stimmen im Rahmen der Rechengenauigkeit mit den Hauptdehnungsrichtungen überein.

Aufgabe 3:

Zwischen den Hauptdehnungen und den Hauptspannungen bestehen die Beziehungen

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3\right) \quad \text{und} \quad \epsilon_2 = \frac{1}{E}\left(-\nu\sigma_1 + \sigma_2 - \nu\sigma_3\right) \ .$$

Daraus folgt:

$$\gamma_{max} = \epsilon_1 - \epsilon_2 = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_1 - (1+\nu)\sigma_2\right] = \frac{1}{E}(1+\nu)(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{max}$$

Der Vergleich mit

$$\gamma_{max} = \frac{1}{G} \tau_{max}$$

ergibt:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Aufgabe 4:

a) <u>Belastung durch Druck:</u>

Aus der Randbedingung an der Oberfläche folgt: $\sigma_z = -p$

Mit $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$ folgt aus dem Hookeschen Gesetz:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_z \quad , \quad \sigma_z = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_z = -p$$

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$\epsilon_z = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{p}{E}$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt:

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\nu}{1-\nu} p$$

Da die Dehnung ε_z konstant ist, gilt für die Höhenänderung:

$$\Delta h = h \epsilon_z = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{h p}{E}$$

Zahlenwerte:

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{0,3}{0,7} \cdot 100\,MPa = \underline{-42,86\,MPa} \quad , \quad \sigma_z = \underline{-100\,MPa}$$

$$\Delta h = -\frac{1,3 \cdot 0.4}{0,7} \cdot \frac{60\,mm \cdot 100\,MPA}{210000\,MPa} = \underline{-0,02122\,mm}$$

b) <u>Belastung durch Temperaturänderung:</u>

Aus der Randbedingung an der Oberfläche folgt: $\sigma_z = 0$

Mit $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$ lautet das Hookesche Gesetz:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{bmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \nu\\ \nu & 1-\nu & \nu\\ \nu & \nu & 1-\nu\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\ \epsilon_z\end{bmatrix}-\alpha_T\,\Delta T\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$$

Aus der letzten Zeile folgt:

$$0=\sigma_z=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\epsilon_z-(1+\nu)\alpha_T\,\Delta T\right]\ \rightarrow\ \epsilon_z=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T\,\Delta T$$

Da die Dehnung ε_z konstant ist, gilt für die Höhenänderung:

$$\Delta h=h\,\epsilon_z=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T\,\Delta T\,h$$

Für die übrigen beiden Spannungen folgt aus dem Hookeschen Gesetz:

$$\sigma_x=\sigma_y=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\nu\,\epsilon_z-(1+\nu)\alpha_T\,\Delta T\right)$$

$$=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,\frac{\nu(1+\nu)-(1+\nu)(1-\nu)}{1-\nu}\alpha_T\,\Delta T=-\frac{E\,\alpha_T\,\Delta T}{1-\nu}$$

Zahlenwerte:

$$\Delta h=\frac{1{,}3}{0{,}7}\cdot 12\cdot 10^{-6}\,K^{-1}\cdot 100\,K\cdot 60\,mm=\underline{0{,}1337\,mm}$$

$$\sigma_x=\sigma_y=-210000\,MPa\cdot\frac{12\cdot 10^{-6}\cdot 100}{0{,}7}=\underline{-360\,MPa}$$

Aufgabe 5:

Für die Temperaturspannungen gilt:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{Tx}\\ \sigma_{Ty}\\ \sigma_{Tz}\end{bmatrix}=-\frac{E\,\alpha_T\,\Delta T}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \nu\\ \nu & 1-\nu & \nu\\ \nu & \nu & 1-\nu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=-\frac{E\,\alpha_T\,\Delta T}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1+\nu\\1+\nu\\1+\nu\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{E}{1-2\nu}\alpha_T\,\Delta T\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Mit dem Kompressionsmodul

$$K = \frac{E}{3\left(1-2\nu\right)}$$

folgt:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{Tx} \\ \sigma_{Ty} \\ \sigma_{Tz} \end{bmatrix} = -3K\alpha_T \Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$