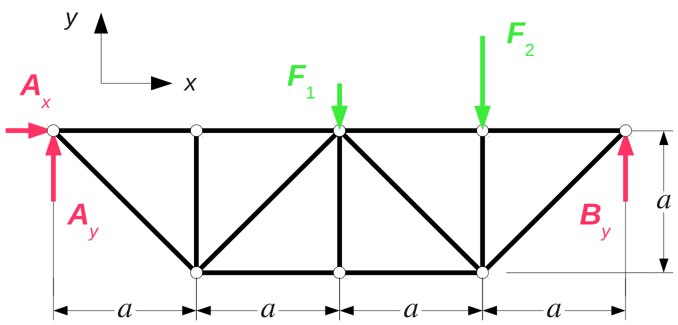
2.2 Sätze von Castigliano und Menabrea

Lösungen

Aufgabe 1:

Lagerkräfte:

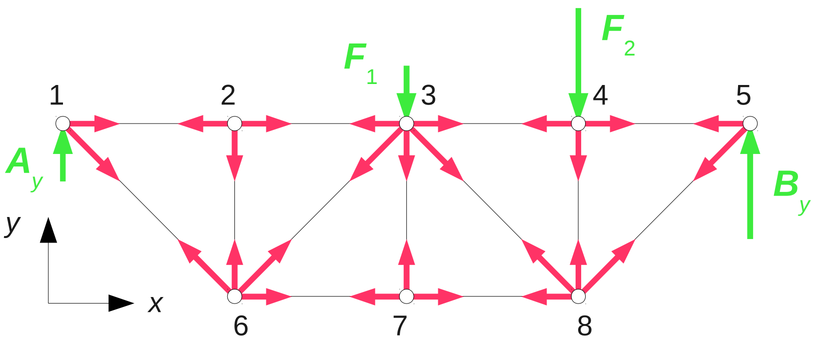


$$\sum F_x = 0 \;:\; A_x = 0$$

$$\sum M^A = 0 \;:\; -2aF_1 - 3aF_2 + 4aB_y = 0 \;\rightarrow\; B_y = \frac{1}{2}F_1 + \frac{3}{4}F_2$$

$$\sum M^B = 0 \;:\; 4aA_y - 2aF_1 - aF_2 = 0 \;\rightarrow\; A_y = \frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{4}F_2$$

Stabkräfte:



1 $\sum F_y = 0 \; : \; A_y - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{16} = 0 \rightarrow N_{16} = \sqrt{2} A_y$ $\qquad N_{16} = \frac{\sqrt{2}}{2} F_1 + \frac{\sqrt{2}}{4} F_2$

$\sum F_x = 0 \; : \; N_{12} + \frac{\sqrt{2}}{2} N_{16} = 0$ $\qquad N_{12} = -\frac{F_1}{2} - \frac{F_2}{4}$

2 $\sum F_x = 0 \; : \; -N_{12} + N_{23} = 0$ $\qquad N_{23} = -\frac{F_1}{2} - \frac{F_2}{4}$

$\sum F_y = 0 \; : \; -N_{26} = 0$ $\qquad N_{26} = 0$

6 $\sum F_y = 0 \; : \; \frac{\sqrt{2}}{2} N_{16} + \frac{\sqrt{2}}{2} N_{36} = 0$ $\qquad N_{36} = -\frac{\sqrt{2}}{2} F_1 - \frac{\sqrt{2}}{4} F_2$

$\sum F_x = 0 \; : \; -\frac{\sqrt{2}}{2} N_{16} + \frac{\sqrt{2}}{2} N_{36} + N_{67} = 0$ $\qquad N_{67} = F_1 + \frac{F_2}{2}$

7 $\sum F_x = 0 \; : \; -N_{67} + N_{78} = 0$ $\qquad N_{78} = F_1 + \frac{F_2}{2}$

$\sum F_y = 0 \; : \; N_{37} = 0$ $\qquad N_{37} = 0$

5 $\sum F_y = 0 \; : \; B_y - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{58} = 0 \rightarrow N_{58} = \sqrt{2} B_y$ $\qquad N_{58} = \frac{\sqrt{2}}{2} F_1 + \frac{3\sqrt{2}}{4} F_2$

$\sum F_x = 0 \; : \; -N_{45} - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{58} = 0$ $\qquad N_{45} = -\frac{F_1}{2} - \frac{3}{4} F_2$

4 $\sum F_x = 0 \; : \; -N_{34} + N_{45} = 0$ $\qquad N_{34} = -\frac{F_1}{2} - \frac{3}{4} F_2$

$\sum F_y = 0 \; : \; -F_2 - N_{48} = 0$ $\qquad N_{48} = -F_2$

8 $\sum F_x = 0 \; : \; -N_{78} - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{38} + \frac{\sqrt{2}}{2} N_{58} = 0$ $\qquad N_{38} = -\frac{\sqrt{2}}{2} F_1 + \frac{\sqrt{2}}{4} F_2$

$\sum F_y = \frac{\sqrt{2}}{2} N_{38} + N_{48} + \frac{\sqrt{2}}{2} N_{58} = F_2 - F_2 = 0$ ✔

3 $\sum F_x = -N_{23} - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{36} + N_{34} + \frac{\sqrt{2}}{2} N_{38}$ ✔

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) F_2 = 0$$

$\sum F_y = -F_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{36} - N_{37} - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{38}$ ✔

$$= \left(-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) F_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) F_2 = 0$$

Formänderungsenergie:

Stab	N_k	L_k	$N_k^2 L_k$
12	$N_{12}=-\frac{F_1}{2}-\frac{F_2}{4}$	a	$\left(\frac{F_1^2}{4}+\frac{F_1 F_2}{4}+\frac{F_2^2}{16}\right)a$
23	$N_{23}=-\frac{F_1}{2}-\frac{F_2}{4}$	a	$\left(\frac{F_1^2}{4}+\frac{F_1 F_2}{4}+\frac{F_2^2}{16}\right)a$
34	$N_{34}=-\frac{F_1}{2}-\frac{3}{4}F_2$	a	$\left(\frac{F_1^2}{4}+\frac{3}{4}F_1 F_2+\frac{9}{16}F_2^2\right)a$
45	$N_{45}=-\frac{F_1}{2}-\frac{3}{4}F_2$	a	$\left(\frac{F_1^2}{4}+\frac{3}{4}F_1 F_2+\frac{9}{16}F_2^2\right)a$
67	$N_{67}=F_1+\frac{F_2}{2}$	a	$\left(F_1^2+F_1 F_2+\frac{F_2^2}{4}\right)a$
78	$N_{78}=F_1+\frac{F_2}{2}$	a	$\left(F_1^2+F_1 F_2+\frac{F_2^2}{4}\right)a$
26	$N_{26}=0$	a	0
37	$N_{37}=0$	a	0
48	$N_{48}=-F_2$	a	F_2^2
16	$N_{16}=\frac{\sqrt{2}}{2}F_1+\frac{\sqrt{2}}{4}F_2$	$\sqrt{2}\,a$	$\left(\frac{F_1^2}{2}+\frac{F_1 F_2}{2}+\frac{F_2^2}{8}\right)\sqrt{2}\,a$
36	$N_{36}=-\frac{\sqrt{2}}{2}F_1-\frac{\sqrt{2}}{4}F_2$	$\sqrt{2}\,a$	$\left(\frac{F_1^2}{2}+\frac{F_1 F_2}{2}+\frac{F_2^2}{8}\right)\sqrt{2}\,a$
38	$N_{38}=-\frac{\sqrt{2}}{2}F_1+\frac{\sqrt{2}}{4}F_2$	$\sqrt{2}\,a$	$\left(\frac{F_1^2}{2}-\frac{F_1 F_2}{2}+\frac{F_2^2}{8}\right)\sqrt{2}\,a$
58	$N_{58}=\frac{\sqrt{2}}{2}F_1+\frac{3\sqrt{2}}{4}F_2$	$\sqrt{2}\,a$	$\left(\frac{F_1^2}{2}+\frac{3F_1 F_2}{2}+\frac{9F_2^2}{8}\right)\sqrt{2}\,a$
Summe:	$\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)F_1^2+\left(4+2\sqrt{2}\right)F_1 F_2+\left(\frac{11}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)F_2^2\right]a$		

$$E^F = \frac{a}{2EA}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)F_1^2 + \left(4+2\sqrt{2}\right)F_1 F_2 + \left(\frac{11}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)F_2^2\right]$$

Verschiebungen:

$$w_3 = \frac{\partial E^F}{\partial F_1} = \frac{a}{EA}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)F_1 + \left(2+\sqrt{2}\right)F_2\right]$$

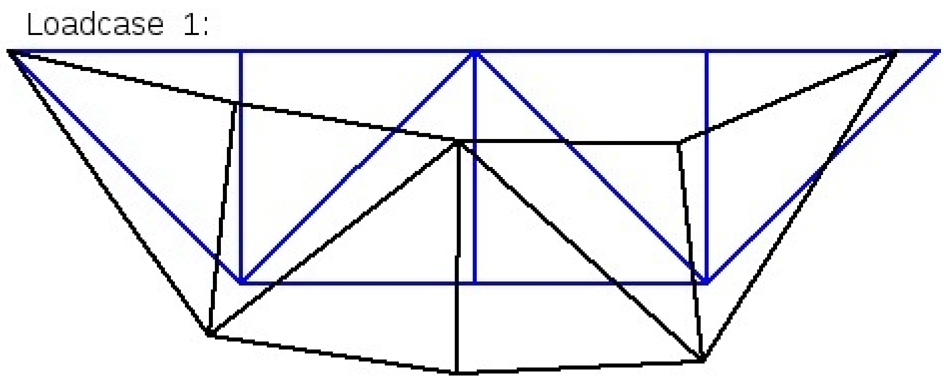
$$w_4 = \frac{\partial E^F}{\partial F_2} = \frac{a}{EA}\left[\left(2+\sqrt{2}\right)F_1 + \left(\frac{11}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)F_2\right]$$

Zahlenwerte:

$$\frac{a}{EA} = \frac{1000\,mm}{210000\,N/mm^2 \cdot 100\,mm^2} = 4{,}762 \cdot 10^{-5}\,\frac{mm}{N}$$

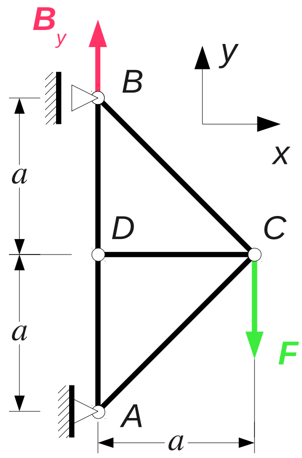
$$v_3 = 4{,}762 \cdot 10^{-5}\,\frac{mm}{N} \cdot \left(5{,}828 \cdot 1000\,N + 3{,}414 \cdot 2000\,N\right) = \underline{0{,}6027\,mm}$$

$$v_3 = 4{,}762 \cdot 10^{-5}\,\frac{mm}{N} \cdot \left(3{,}414 \cdot 1000\,N + 4{,}871 \cdot 2000\,N\right) = \underline{0{,}6265\,mm}$$



Aufgabe 2:

a) Lagerkräfte:



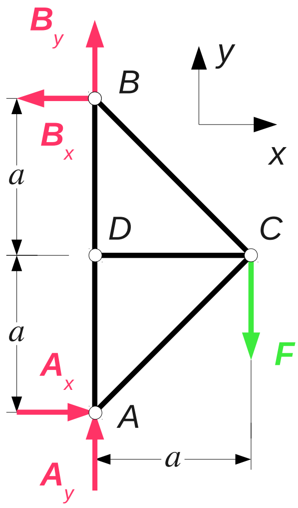
Statisch bestimmtes Grundsystem:

Die Lagerung wird statisch bestimmt, indem z.B. das Festlager in Punkt *B* durch ein Loslager ersetzt wird. Am Punkt *B* greift dann die unbekannte Kraft B_y an.

Lagerkräfte in Abhängigkeit von B_y:

$$\sum M^A=0 \ : \ -aF+2aB_x=0$$

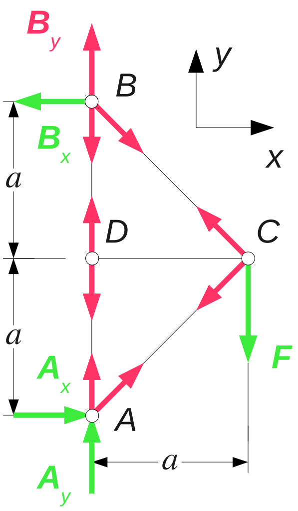
$$\rightarrow \ B_x=\frac{1}{2}F$$



$$\sum F_x=0 \ : \ A_x-B_x=0 \ \rightarrow \ A_x=B_x=\frac{1}{2}F$$

$$\sum F_y=0 \ : \ A_y+B_y-F=0 \ \rightarrow \ A_y=F-B_y$$

Stabkräfte in Abhängigkeit von B_y:



Knoten *A*:

$$\sum F_x=0 \ : \ A_x+\frac{\sqrt{2}}{2}N_{AC}=0 \ \rightarrow \ N_{AC}=-\sqrt{2}A_x$$

$$N_{AC}=-\frac{\sqrt{2}}{2}F$$

$$\sum F_y=0 \ : \ A_y+N_{AD}+\frac{\sqrt{2}}{2}N_{AC}=0$$

$$\rightarrow \ N_{AD}=-A_y-\frac{\sqrt{2}}{2}N_{AC}=-F+B_y+\frac{F}{2}$$

$$N_{AD}=B_y-\frac{F}{2}$$

Knoten *D*:

$$\sum F_x = 0 \ : \ N_{CD} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \ : \ -N_{AD} + N_{BD} = 0 \ \rightarrow \ N_{BD} = N_{AD} \qquad N_{BD} = B_y - \frac{F}{2}$$

Knoten *C*:

$$\sum F_x = 0 \ : \ -\frac{\sqrt{2}}{2} N_{AC} - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{BC} = 0 \ \rightarrow \ N_{BC} = -N_{AC} \qquad N_{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} F$$

$$\sum F_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} N_{AC} + \frac{\sqrt{2}}{2} N_{BC} - F = \frac{1}{2} F + \frac{1}{2} F - F = 0$$

Knoten *B*:

$$\sum F_x = -B_x + \frac{\sqrt{2}}{2} N_{BC} = -\frac{1}{2} F + \frac{1}{2} F = 0$$

$$\sum F_y = B_y - N_{BD} - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{BC} = B_y + \frac{1}{2} F - B_y - \frac{1}{2} F = 0$$

<u>Formänderungsenergie:</u>

Stab	N_k	L_k	$N_k^2 L_k$
AC	$N_{AC} = -\frac{\sqrt{2}}{2} F$	$\sqrt{2}\, a$	$\frac{\sqrt{2}}{2} F^2 a$
AD	$N_{AD} = B_y - \frac{F}{2}$	a	$\left(\frac{F^2}{4} - F B_y + B_y^2 \right) a$
BC	$N_{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} F$	$\sqrt{2}\, a$	$\frac{\sqrt{2}}{2} F^2 a$
BD	$N_{BD} = B_y - \frac{F}{2}$	a	$\left(\frac{F^2}{4} - F B_y + B_y^2 \right) a$
Summe:			$\left[\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \right) F^2 + 2 F B_y + 2 B_y^2 \right] a$

$$E^F = \frac{a}{2EA} \left[\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \right) F^2 - 2 F B_y + 2 B_y^2 \right]$$

<u>Lagerkräfte:</u>

Die Kraft B_y folgt aus dem Satz von Menabrea:

$$\frac{\partial E^F}{\partial B_y}=0 \quad : \quad -2F+4B_y=0 \quad \rightarrow \quad B_y=\frac{1}{2}F$$

Damit berechnet sich die Lagerkraft A_y zu

$$A_y=F-B_y=\frac{1}{2}F \quad .$$

Zahlenwerte:

$$A_x=B_x=A_y=B_y=\underline{1\,kN}$$

b) <u>Stabkräfte:</u>

$$N_{AC}=-\frac{\sqrt{2}}{2}F=-1{,}414\,kN \quad , \quad N_{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}F=1{,}414\,kN$$

$$N_{AD}=N_{BD}=\frac{F}{2}-\frac{F}{2}=0\,kN$$

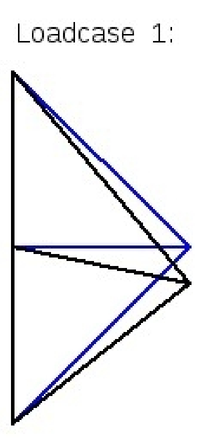
c) <u>Verschiebung von Punkt *C*:</u>

Die Vertikalverschiebung von Punkt *C* kann mit dem zweiten Satz von Castigliano berechnet werden:

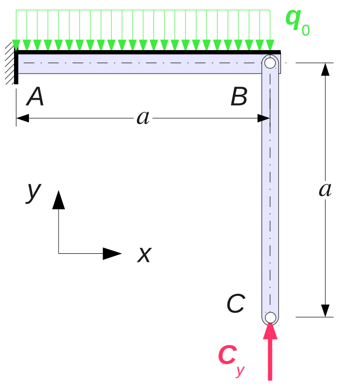
$$v_C=\frac{\partial E^F}{\partial F}=\frac{a}{2EA}\left[2\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)F-2B_y\right]=\frac{a}{EA}\left(\sqrt{2}F+\frac{1}{2}F-\frac{1}{2}F\right)=\frac{\sqrt{2}\,aF}{EA}$$

Zahlenwert:

$$v_C=\frac{\sqrt{2}\cdot 500\,mm\cdot 2000\,N}{210000\,N/mm^2\cdot 100\,mm^2}=\underline{0{,}06734\,mm}$$



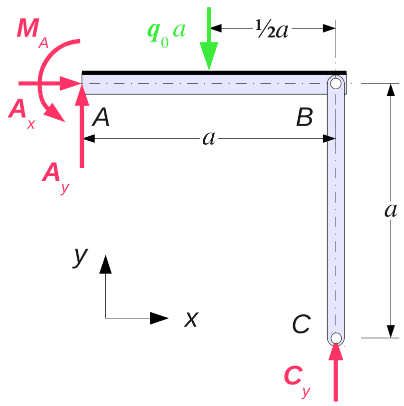
Aufgabe 3:



Reaktionslasten für das statisch bestimmte Grundsystem:

Der Träger *BC* ist eine Pendelstütze. Daher greift im Lager *C* nur eine Kraft in *y*-Richtung an. Ein statisch bestimmtes Grundsystem ergibt sich, wenn das Lager *C* durch die unbekannte Lagerkraft ersetzt wird.

Die Reaktionslasten im Lager *A* können aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden. Dazu darf die Streckenlast durch eine äquivalente Einzelkraft ersetzt werden.



$$\sum F_x=0 \ : \ A_x=0$$

$$\sum M^A=0 \ : \ M_A-\frac{1}{2}a\cdot q_0 a+a C_y=0$$

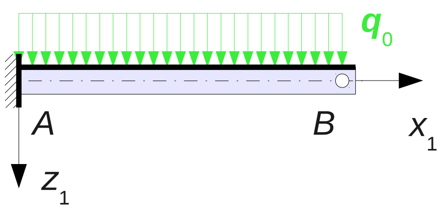
$$\rightarrow \ M_A=\frac{1}{2}q_0 a^2-a C_y$$

$$\sum F_y=0 \ : \ A_y-q_0 a+C_y=0$$

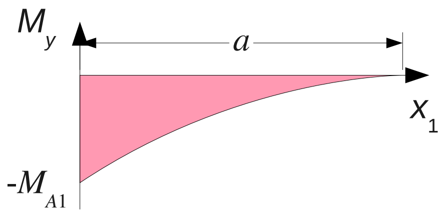
$$\rightarrow \ A_y=q_0 a-C_y$$

Schnittlasten:

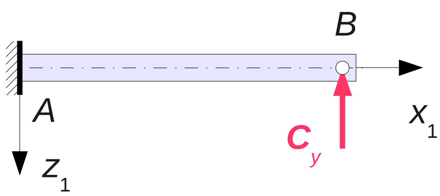
Lastfall 1: Streckenlast q_0

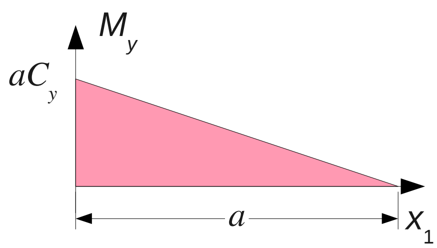


	Träger *AB*	Träger *BC*
Normalkraft:	0	0
Biegemoment:	$M_{y1}(x_1)=-\frac{1}{2}q_0 x_1^2+c_1 x_1+c_2$	0

	Träger *AB*	Träger *BC*
	$M_{y1}(0) = -M_{A1} = -\frac{1}{2} q_0 a^2 \rightarrow c_2 = -\frac{1}{2} q_0 a^2$ $M_{y1}(a) = 0 \rightarrow c_1 = q_0 a$ $\rightarrow M_{y1}(x_1) = \frac{1}{2} q_0 a^2 \left[2 \frac{x_1}{a} - \left(\frac{x_1}{a} \right)^2 - 1 \right]$ 	

Lastfall 2: Kraft C_y



	Träger *AB*	Träger *BC*
Normalkraft:	0	$-C_y$
Biegemoment:		0

Formänderungsenergie:

$$E^F = \frac{1}{2}\int_A^B \frac{\left(M_{y1}+M_{y2}\right)^2}{EI}\,dx_1 + \frac{1}{2}\frac{C_y^2 a}{EA}$$
$$= \frac{1}{2EI}\left(\int_A^B M_{y1}^2\,dx_1 + 2\int_A^B M_{y1}M_{y2}\,dx_1 + \int_A^B M_{y2}^2\,dx_1 + \frac{Ia}{A}C_y^2\right)$$

Reaktionslasten:

Die Kraft C_y wird mit dem Satz von Menabrea berechnet:

$$\frac{\partial E^F}{\partial C_y} = 0 \;:\; 2\frac{\partial}{\partial C_y}\int_A^B M_{y1}M_{y2}\,dx_1 + \frac{\partial}{\partial C_y}\int_A^B M_{y2}^2\,dx_1 + 2\frac{Ia}{A}C_y = 0$$

Dabei wurde benutzt, dass das Biegemoment M_{y1} nicht von C_y abhängt.

Die beiden Integrale berechnen sich zu

$$\int_A^B M_{y1}M_{y2}\,dx_1 = \frac{1}{4}a\left(-\frac{1}{2}q_0 a^2\right)a\,C_y = -\frac{1}{8}q_0 a^4 C_y$$

und

$$\int_A^B M_{y2}^2\,dx_1 = \frac{1}{3}a\left(aC_y\right)^2 = \frac{1}{3}a^3 C_y^2 \quad .$$

Damit folgt:

$$-\frac{1}{4}q_0 a^4 + \frac{2}{3}a^3 C_y + 2\frac{Ia}{A}C_y = 0 \;\rightarrow\; \left(\frac{2}{3}a^2 + 2\frac{I}{A}\right)C_y = \frac{1}{4}q_0 a^3$$

$$\rightarrow\; C_y = \frac{\frac{1}{4}q_0 a^3}{\frac{2}{3}a^2 + 2\frac{I}{A}} = \frac{3}{4}\frac{q_0 a}{2+6\frac{I}{a^2 A}}$$

Daraus folgt für die übrigen Reaktionslasten:

$$M_A = \frac{1}{2}q_0 a^2 - aC_y = q_0 a^2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\frac{1}{2+6I/\left(a^2 A\right)}\right) = \frac{1}{2}q_0 a^2\left(1 - \frac{3}{2}\frac{1}{2+6I/\left(a^2 A\right)}\right)$$

$$A_y = q_0 a - C_y = q_0 a\left(1 - \frac{3}{4}\frac{1}{2+6I/\left(a^2 A\right)}\right)$$

Zahlenwerte:

$$q_0 a = 1000\,N$$

$$\frac{I}{a^2 A} = \frac{5 \cdot 10^5\,mm^4}{1000^2\,mm^2 \cdot 100\,mm^2} = 5 \cdot 10^{-3}$$

$$C_y = \frac{3}{4} \frac{1000\,N}{2 + 30 \cdot 10^{-3}} = \underline{369{,}5\,N} \quad , \quad A_y = 1000\,N - 369{,}5\,N = \underline{630{,}5\,N}$$

$$M_A = \frac{1}{2} \cdot 1000\,N \cdot 1000\,mm - 1000\,mm \cdot 369{,}5\,N = 130500\,Nmm = \underline{130{,}5\,Nm}$$

Aufgabe 4:

a) <u>Schnittlasten:</u>

Zuerst werden die Lagerkräfte bestimmt:

$$\sum F_x = 0 \;:\; 2F - C_x = 0$$

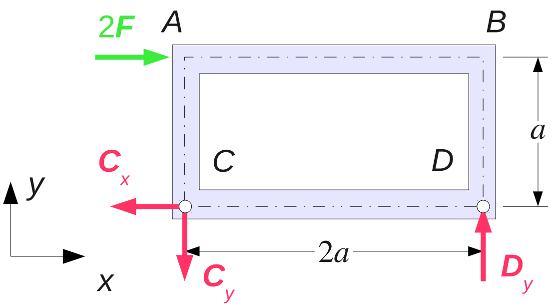
$$\rightarrow \; C_x = 2F$$

$$\sum M^C = 0 \;:\; -2aF + 2aD_y = 0$$

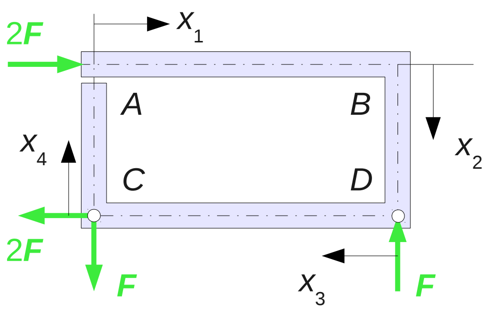
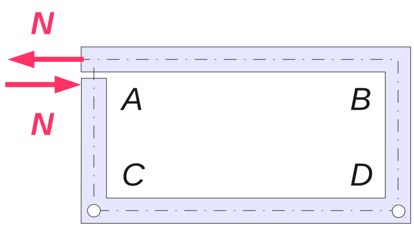
$$\rightarrow \; D_y = F$$

$$\sum F_y = 0 \;:\; -C_y + D_y = 0$$

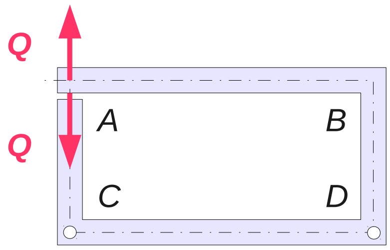
$$\rightarrow \; C_y = D_y = F$$



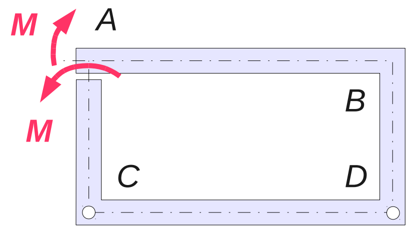
Als nächstes wird der Rahmen am Punkt *A* aufgeschnitten. Es müssen vier Lastfälle untersucht werden:

Lastfall 1: Äußere Last	Lastfall 2: Normalkraft
	

Lastfall 3: Querkraft

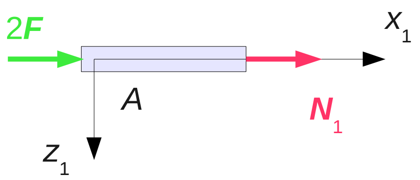


Lastfall 4: Biegemoment



Lastfall 1: Äußere Kraft

Abschnitt *AB*:

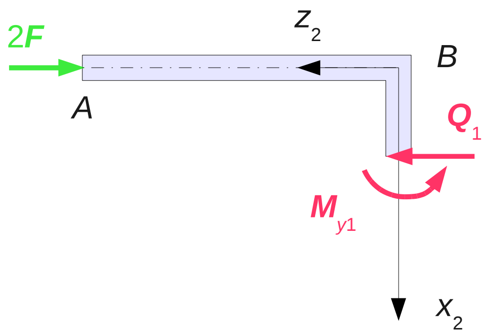


Normalkraft: $N_1(x_1) = -2F$

Querkraft: $Q_1(x_1) = 0$

Biegemoment: $M_{y1}(x_1) = 0$

Abschnitt *BD*:

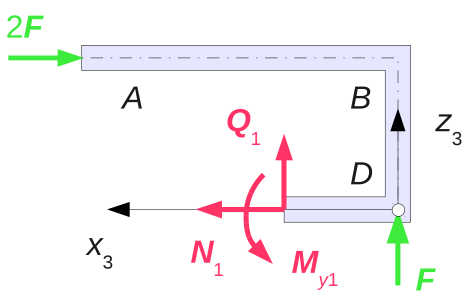


Normalkraft: $N_1(x_2) = 0$

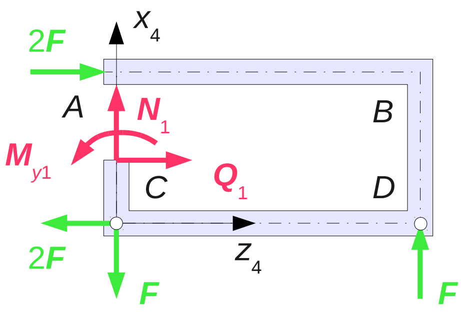
Querkraft: $Q_1(x_2) = 2F$

Biegemoment: $M_{y1}(x_2) = 2F\,x_2$

Abschnitt *DC*:

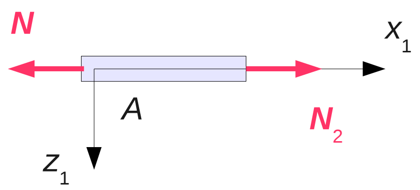
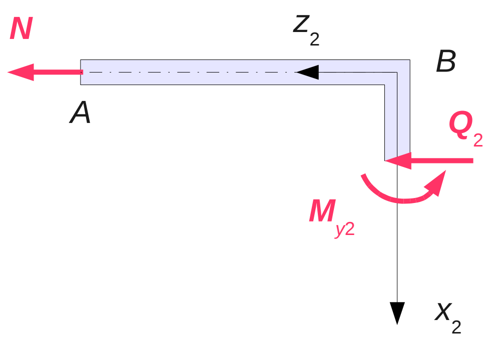
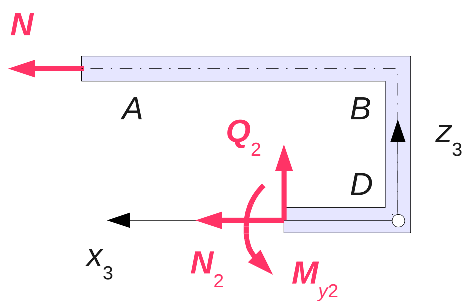
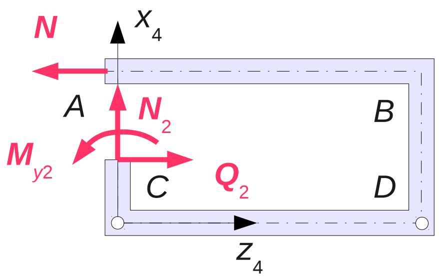


Abschnitt *CA*:



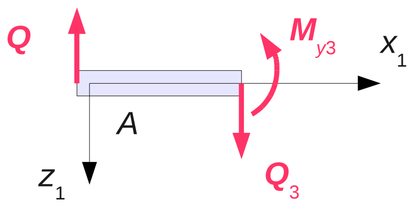
Normalkraft: $N_1(x_3)=2F$ Querkraft: $Q_1(x_3)=-F$ Biegemoment: $M_{y1}(x_3)=(2a-x_3)F$	Normalkraft: $N_1(x_4)=0$ Querkraft: $Q_1(x_4)=0$ Biegemoment: $M_{y1}(x_4)=0$

Lastfall 2: Normalkraft

<table>
<tr>
<td>Abschnitt AB:

</td>
<td>Abschnitt BD:

</td>
</tr>
<tr>
<td>Normalkraft: $N_2(x_1)=N$
Querkraft: $Q_2(x_1)=0$
Biegemoment: $M_{y2}(x_1)=0$</td>
<td>Normalkraft: $N_2(x_2)=0$
Querkraft: $Q_2(x_2)=-N$
Biegemoment: $M_{y2}(x_2)=-N x_2$</td>
</tr>
<tr>
<td>Abschnitt DC:

</td>
<td>Abschnitt CA:

</td>
</tr>
<tr>
<td>Normalkraft: $N_2(x_3)=-N$
Querkraft: $Q_2(x_3)=0$
Biegemoment: $M_{y2}(x_3)=-aN$</td>
<td>Normalkraft: $N_2(x_4)=0$
Querkraft: $Q_2(x_4)=N$
Biegemoment: $M_{y2}(x_4)=(x_4-a)N$</td>
</tr>
</table>

Lastfall 3: Querkraft

Abschnitt *AB*:

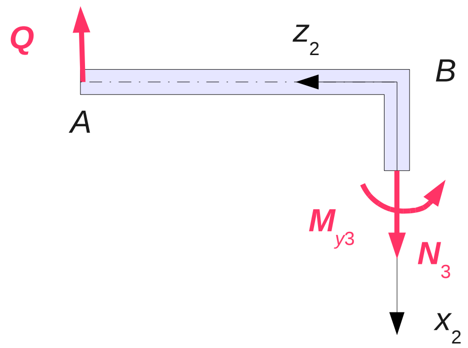


Normalkraft: $N_3(x_1)=0$

Querkraft: $Q_3(x_1)=Q$

Biegemoment: $M_{y3}(x_1)=x_1 Q$

Abschnitt *BD*:

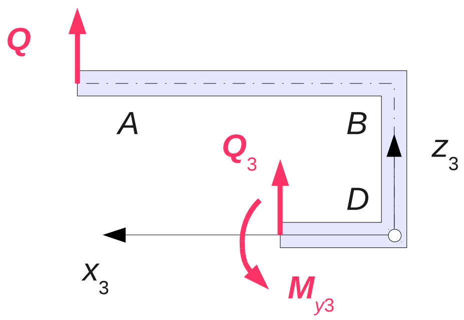


Normalkraft: $N_3(x_2)=Q$

Querkraft: $Q_3(x_2)=0$

Biegemoment: $M_{y3}(x_2)=2aQ$

Abschnitt *DC*:

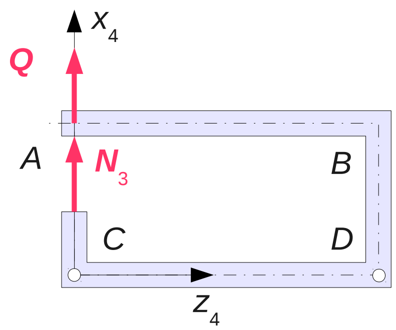


Normalkraft: $N_3(x_3)=0$

Querkraft: $Q_3(x_3)=-Q$

Biegemoment: $M_{y3}(x_3)=(2a-x_3)Q$

Abschnitt *CA*:



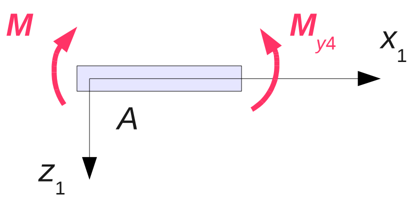
Normalkraft: $N_3(x_4)=-Q$

Querkraft: $Q_3(x_4)=0$

Biegemoment: $M_{y3}(x_4)=0$

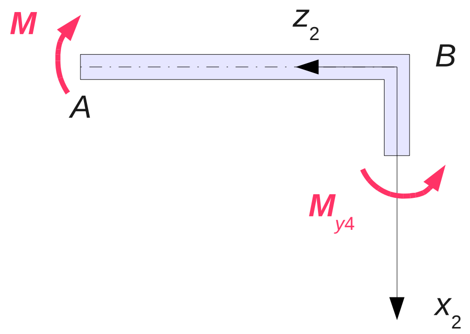
Lastfall 4: Biegemoment

Abschnitt *AB*:



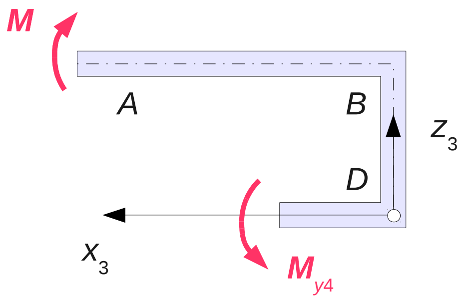
Normalkraft: $N_4(x_1)=0$
Querkraft: $Q_4(x_1)=0$
Biegemoment: $M_{y4}(x_1)=M$

Abschnitt *BD*:



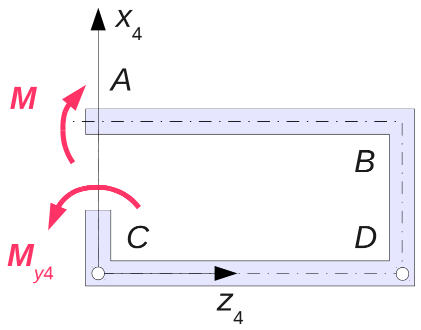
Normalkraft: $N_4(x_2)=0$
Querkraft: $Q_4(x_2)=0$
Biegemoment: $M_{y4}(x_2)=M$

Abschnitt *DC*:



Normalkraft: $N_4(x_3)=0$
Querkraft: $Q_4(x_3)=0$
Biegemoment: $M_{y4}(x_3)=M$

Abschnitt *CA*:



Normalkraft: $N_4(x_4)=0$
Querkraft: $Q_4(x_4)=0$
Biegemoment: $M_{y4}(x_4)=M$

Zur Berechnung des Biegemoments müssen alle Produkte zwischen den Biegemomenten der einzelnen Lastfälle gebildet und integriert werden. Die Integration erfolgt abschnittsweise.

Abschnitt *AB*: Länge = $2a$

	$M_{y1}(x_1)=0$	$M_{y2}(x_1)=0$	$M_{y3}(x_1)=x_1 Q$	$M_{y4}(x_1)=M$
$M_{y1}(x_1)=0$	0	0	0	0

$M_{y2}(x_1)=0$	0	0	0	0
$M_{y3}(x_1)=x_1 Q$	0	0	$\frac{8}{3}a^3 Q^2$	$2a^2 Q M$
$M_{y4}(x_1)=M$	0	0	$2a^2 Q M$	$2a M^2$

Gesamt: $E^F_{B,AB}=\frac{a}{2EI}\left(\frac{8}{3}a^2 Q^2+4aQM+2M^2\right)$

Abschnitt *BD*: Länge = a

	$M_{y1}=2Fx_2$	$M_{y2}=-Nx_2$	$M_{y3}=2aQ$	$M_{y4}=M$
$M_{y1}=2Fx_2$	$\frac{4}{3}a^3 F^2$	$-\frac{2}{3}a^3 F N$	$2a^3 F Q$	$a^2 F M$
$M_{y2}=-Nx_2$	$-\frac{2}{3}a^3 F N$	$\frac{1}{3}a^3 N^2$	$-a^3 N Q$	$-\frac{1}{2}a^2 N M$
$M_{y3}=2aQ$	$2a^3 F Q$	$-a^3 N Q$	$4a^3 Q^2$	$2a^2 Q M$
$M_{y4}=M$	$a^2 F M$	$-\frac{1}{2}a^2 N M$	$2a^2 Q M$	$a M^2$

Gesamt:

$$E^N_{B,BD}=\frac{a}{2EI}\left(\frac{4a^2F^2}{3}+\frac{a^2N^2}{3}+4a^2Q^2+M^2-\frac{4a^2FN}{3}+4a^2FQ\right.$$
$$\left.+2aFM-2a^2NQ-aNM+4aQM\right)$$

Abschnitt *DC*: Länge = $2a$

	$M_{y1}=(2a-x_3)F$	$M_{y2}=-aN$	$M_{y3}=(2a-x_3)Q$	$M_{y4}=M$
$M_{y1}=(2a-x_3)F$	$\frac{8}{3}a^3 F^2$	$-2a^3 F N$	$\frac{8}{3}a^3 F Q$	$2a^2 F M$
$M_{y2}=-aN$	$-2a^3 F N$	$2a^3 N^2$	$-2a^3 N Q$	$-2a^2 NM$
$M_{y3}=(2a-x_3)Q$	$\frac{8}{3}a^3 F Q$	$-2a^3 N Q$	$\frac{8}{3}a^3 Q^2$	$2a^2 Q M$

$M_{y4}=M$	$2a^2 F M$	$-2a^2 N M$	$2a^2 Q M$	$2a M^2$

Gesamt:

$$E^N_{B,DC}=\frac{a}{2EI}\left(\frac{8a^2F^2}{3}+2a^2N^2+\frac{8a^2Q^2}{3}+2M^2-4a^2FN+\frac{16a^2FQ}{3}\right.$$
$$\left.+4aFM-4a^2NQ-4aNM+4aQM\right)$$

Abschnitt *CA*: Länge = a

	$M_{y1}=0$	$M_{y2}=(x_4-a)N$	$M_{y3}=0$	$M_{y4}=M$
$M_{y1}=0$	0	0	0	0
$M_{y2}=(x_4-a)N$	0	$\frac{1}{3}a^3N^2$	0	$-\frac{1}{2}a^2NM$
$M_{y3}=0$	0	0	0	0
$M_{y4}=M$	0	$-\frac{1}{2}a^2NM$	0	aM^2

Gesamt: $E^N_{B,CA}=\frac{a}{2EI}\left(\frac{a^2N^2}{3}+M^2-aNM\right)$

Addition der Beiträge der einzelnen Abschnitte ergibt:

$$E^F=\frac{a}{2EI}\left(\frac{8}{3}a^2Q^2+4aQM+2M^2+\frac{4}{3}a^2F^2+\frac{1}{3}a^2N^2+4a^2Q^2+M^2\right.$$
$$-\frac{4}{3}a^2FN+4a^2FQ+2aFM-2a^2NQ-aNM+4aQM$$
$$+\frac{8}{3}a^2F^2+2a^2N^2+\frac{8}{3}a^2Q^2+2M^2-4a^2FN+\frac{16}{3}a^2FQ$$
$$\left.+4aFM-4a^2NQ-4aNM+4aQM+\frac{1}{3}a^2N^2+M^2-aNM\right)$$
$$=\frac{a}{3EI}\left(6a^2F^2-8a^2FN+14a^2FQ+9aFM+4a^2N^2-9a^2NQ\right.$$
$$\left.-9aNM+14a^2Q^2+18aQM+9M^2\right)$$

Zur Ermittlung der unbekannten Schnittlasten N, Q und M werden die entsprechenden partiellen Ableitungen der Formänderungsenergie zu null gesetzt:

$$\frac{\partial E^F}{\partial N}=0 \quad : \quad -8a^2F+8a^2N-9a^2Q-9aM=0$$

$$\frac{\partial E^F}{\partial Q}=0 \quad : \quad 14a^2F-9a^2N+28a^2Q+18aM=0$$

$$\frac{\partial E^F}{\partial M}=0 \quad : \quad 9aF-9aN+18aQ+18M=0$$

Daraus ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 8aN & - & 9aQ & - & 9M & = & 8aF \\ -9aN & + & 28aQ & + & 18M & = & -14aF \\ -9aN & + & 18aQ & + & 18M & = & -9aF \end{array}$$

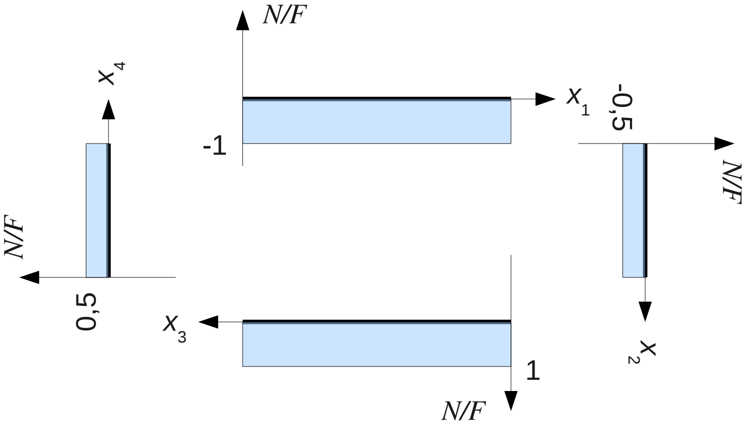
Es hat die Lösung:

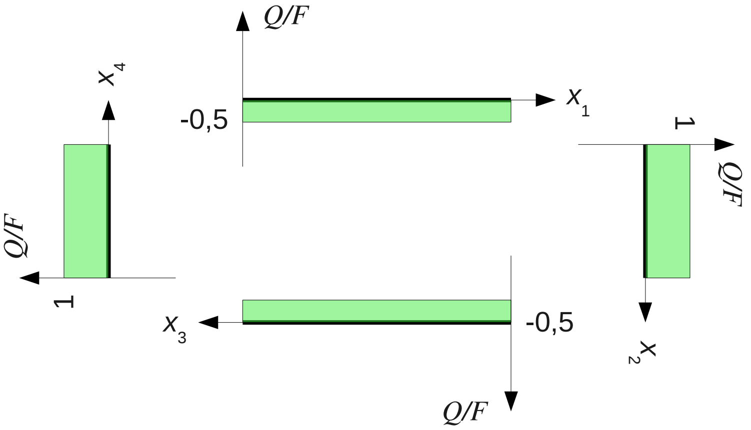
$$N=F\,,\quad Q=-\frac{1}{2}F\,,\quad M=\frac{1}{2}aF$$

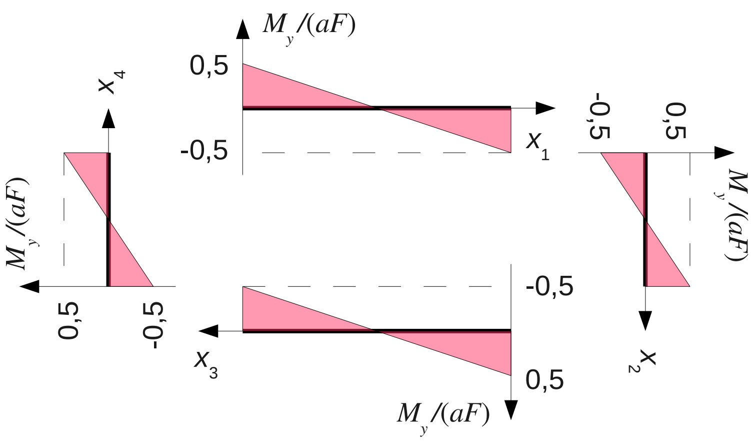
Damit lassen sich die Schnittlasten durch Überlagerung der vier Lastfälle berechnen:

Bereich	Normalkraft	Querkraft	Biegemoment
AB	$-2F+F=-F$	$-\frac{F}{2}$	$-\frac{x_1F}{2}+\frac{aF}{2}=\frac{F}{2}(a-x_1)$
BD	$-\frac{F}{2}$	$2F-F=F$	$2Fx_2-Fx_2-aF+\frac{aF}{2}=\frac{F}{2}(2x_2-a)$
DC	$2F-F=F$	$-F+\frac{F}{2}=-\frac{F}{2}$	$(2a-x_3)F-aF-(2a-x_3)\frac{F}{2}+\frac{aF}{2}$ $=\frac{F}{2}(a-x_3)$
CA	$\frac{F}{2}$	F	$(x_4-a)F+\frac{aF}{2}=\frac{F}{2}(2x_4-a)$

Graphische Darstellung der Verläufe:







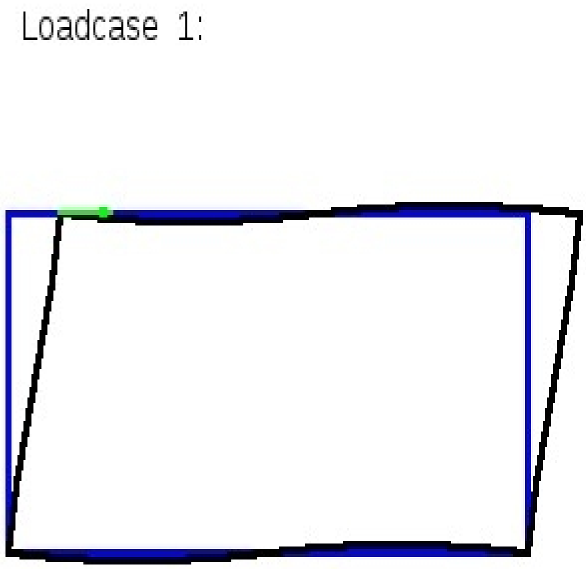
b) Horizontale Verschiebung des Lastangriffspunkts:

Mit $N=F$, $Q=-F/2$ und $M=aF/2$ gilt für die Formänderungsenergie:

$$E^F=\frac{a}{3EI}\left(6a^2F^2-8a^2F^2-7a^2F^2+\frac{9}{2}a^2F^2+4a^2F^2+\frac{9}{2}a^2F^2\right.$$
$$\left.-\frac{9}{2}a^2F^2+\frac{7}{2}a^2F^2-\frac{9}{2}a^2F^2+\frac{9}{4}a^2F^2\right)$$
$$=\frac{a^3F^2}{3EI}\left(\frac{23}{4}-5\right)=\frac{a^3F^2}{4EI}=\frac{a^3(2F)^2}{16EI}$$

Die Horizontalverschiebung u_A ist gleich der partiellen Ableitung von E^F nach $2F$:

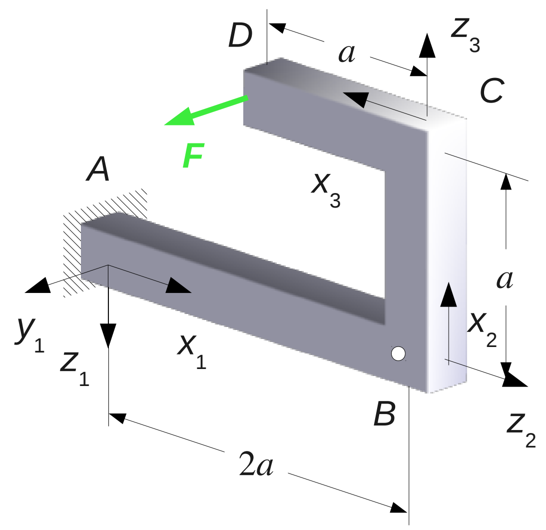
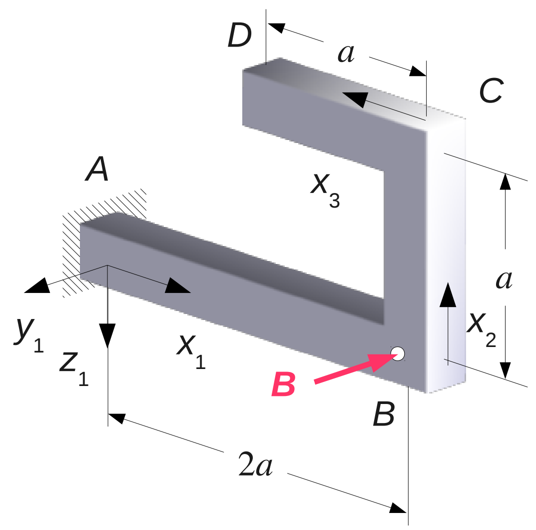
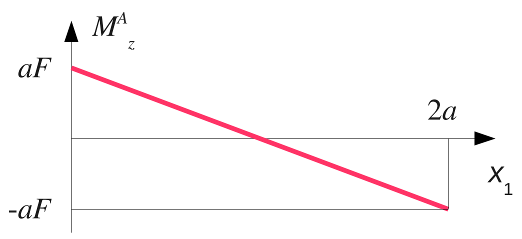
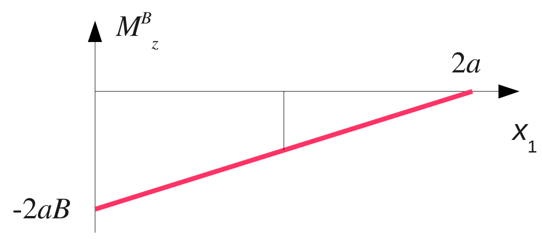
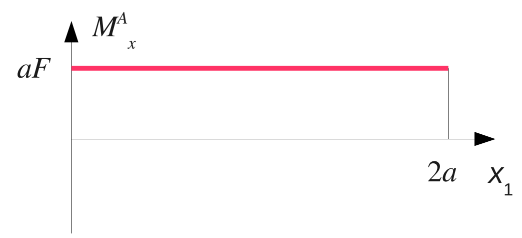
$$u_A=\frac{\partial E^F}{\partial(2F)}=\frac{2a^3(2F)}{16EI}=\frac{a^3F}{4EI}$$



Aufgabe 5:

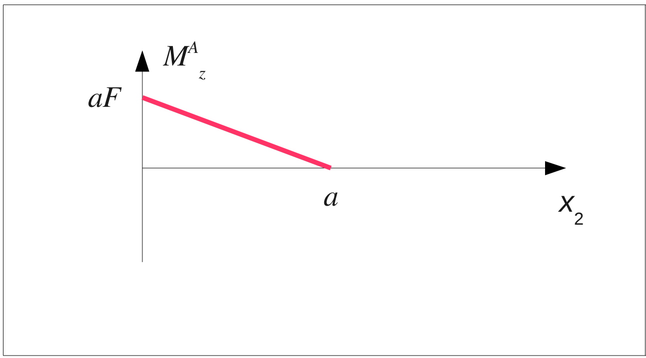
Die Stütze *BE* wird durch die im Punkt *B* angreifende Kraft B ersetzt. Für das entstehende System wird die Formänderungsenergie in Abhängigkeit von F und B ermittelt. Daraus können die gesuchten Größen nach den Sätzen von Castigliano und Menabrea ermittelt werden.

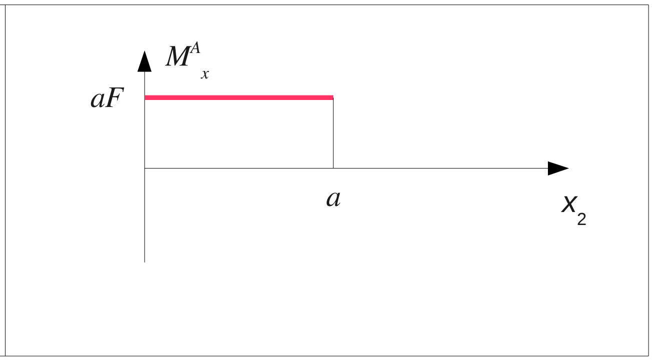
Schnittlasten:

<table>
<tr><td>Lastfall A:</td><td>Lastfall B:</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Abschnitt AB:</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
</table>

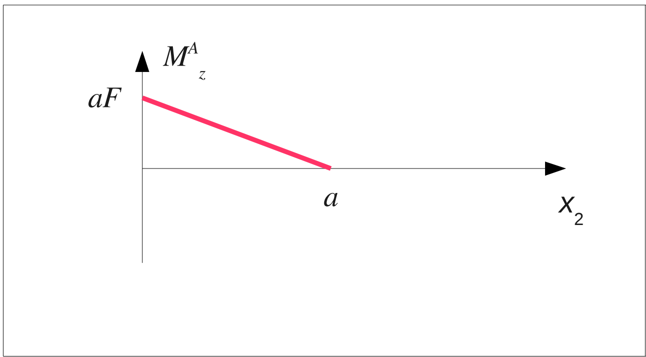
Für Lastfall *B* sind die Schnittlasten in den übrigen Abschnitten null.

Abschnitt *BC*:





Abschnitt *CD*:



<u>Formänderungsenergie:</u>

$$2E^F=\int_A^B\left(\frac{\left(M_z^A+M_z^B\right)^2}{EI_z}+\frac{\left(M_x^A\right)^2}{GI_T}\right)dx+\int_B^C\left(\frac{\left(M_z^A\right)^2}{EI_z}+\frac{\left(M_x^A\right)^2}{GI_T}\right)dx+\int_C^D\frac{\left(M_z^A\right)^2}{EI_z}dx$$

Die Integrale werden mit einer Koppeltafel berechnet:

$$\begin{aligned}\int_A^B\left(M_z^A+M_z^B\right)^2dx&=\int_0^{2a}\left(\left(M_z^A\right)^2+\left(M_z^B\right)^2\right)dx+2\int_0^a M_z^A M_z^B\,dx+2\int_a^{2a}M_z^A M_z^B\,dx\\&=\frac{2}{3}a(aF)^2+\frac{1}{3}\cdot 2a(-2aB)^2+2\cdot\frac{1}{6}a(-2\cdot 2aB-aB)aF\\&\quad+2\cdot\frac{1}{6}a(-aF)\cdot(-aB)\\&=\frac{a^3}{3}\left(2F^2+8B^2-4BF\right)\end{aligned}$$

$$\int_A^B\left(M_x^A\right)^2dx=2a(aF)^2=2a^3F^2$$

$$\int_B^C \left(M_z^A\right)^2 dx = \frac{1}{3} a \left(a F\right)^2 = \frac{1}{3} a^3 F^2 \quad , \quad \int_B^C \left(M_x^A\right)^2 dx = a \left(a F\right)^2 = a^3 F^2$$

$$\int_C^D \left(M_z^A\right)^2 dx = \frac{1}{3} a \left(a F\right)^2 = \frac{1}{3} a^3 F^2$$

Damit gilt: $E^F = \dfrac{a^3}{6 E I_z}\left(4 F^2 + 8 B^2 - 4 B F\right) + \dfrac{3 a^3 F^2}{2 G I_T}$

Kraft in der Stütze:

Da die Stütze starr ist, ist die *y*-Verschiebung von Punkt *B* null:

$$0 = \frac{\partial E^F}{\partial B} = \frac{a^3}{6 E I_z}\left(16 B - 4 F\right) \rightarrow B = \frac{F}{4}$$

Verschiebung von Punkt *D*:

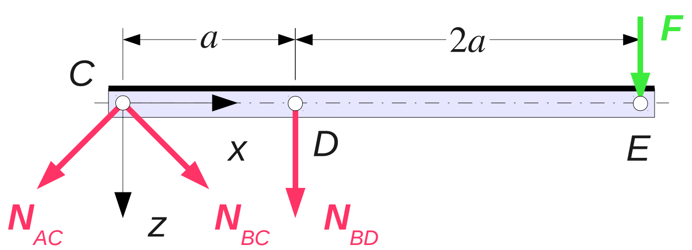
$$v_D = \frac{\partial E^F}{\partial F} = \frac{a^3}{6 E I_z}\left(8 F - 4 B\right) + \frac{3 a^3 F}{G I_T}$$

Einsetzen für B ergibt:

$$v_D = a^3 F\left(\frac{7}{6 E I_z} + \frac{3}{G I_T}\right) = \frac{a^3 F}{E I_z}\left(\frac{7}{6} + 3\frac{E I_z}{G I_T}\right)$$

Aufgabe 6:

a) Stabkräfte:



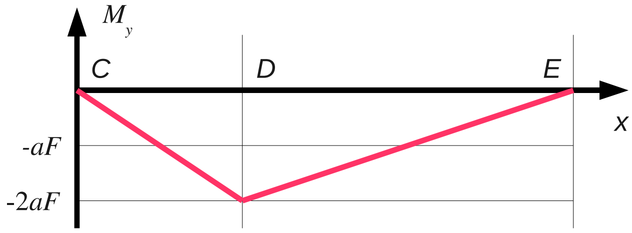
$$\sum F_x = 0 \ : \ -\frac{\sqrt{2}}{2} N_{AC} + \frac{\sqrt{2}}{2} N_{BC} = 0 \rightarrow N_{BC} = N_{AC}$$

$$\sum M^C=0\ :\ -3aF-aN_{BD}=0\ \rightarrow\ \underline{N_{BD}=-3F}$$

$$\sum F_z=0\ :\ \sqrt{2}N_{AC}+N_{BD}+F=0$$

$$\rightarrow\ \sqrt{2}N_{AC}=-F+3F=2F\ \rightarrow\ \underline{N_{AC}=N_{BC}=\sqrt{2}F}$$

b) <u>Biegemoment:</u>



c) <u>Verschiebung von Punkt *E*:</u>

Formänderungsenergie:

$$E^F=\frac{1}{2}\left(\frac{N_{BD}^2 a}{EA}+\frac{N_{BC}^2\sqrt{2}a}{EA}+\frac{N_{AC}^2\sqrt{2}a}{EA}+\frac{1}{3}\frac{(2aF)^2 a}{EI_y}+\frac{1}{3}\frac{(2aF)^2\cdot 2a}{EI_y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{a^3F^2}{EI_y}\left[\frac{I_y}{a^2A}\left(9+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)+4\right]=\frac{1}{2}\frac{a^3F^2}{EI_y}\left[4+\left(9+4\sqrt{2}\right)\frac{I_y}{a^2A}\right]$$

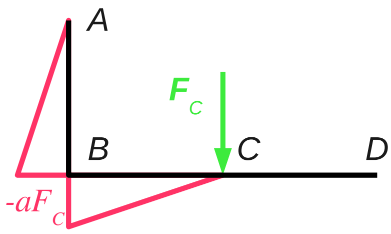
Verschiebung:

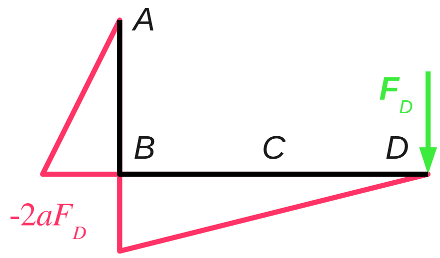
$$w_E=\frac{\partial E^F}{\partial F}=\frac{a^3F}{EI_y}\left[4+\left(9+4\sqrt{2}\right)\frac{I_y}{a^2A}\right]$$

Aufgabe 7:

a) <u>Formänderungsenergie:</u>

Biegemomente:





$$E^F=\frac{1}{2}\int_A^D \frac{\left(M_{by}(F_C)+M_{by}(F_D)\right)^2}{E\,I_y}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_A^D \frac{M_{by}(F_C)^2}{E\,I_y}dx+\int_A^D \frac{M_{by}(F_C)M_{by}(F_D)}{E\,I_y}dx+\frac{1}{2}\int_A^D \frac{M_{by}(F_D)^2}{E\,I_y}dx$$

Mit

$$\int_A^D M_{by}(F_C)^2\,dx=\frac{1}{3}\left((a\,F_C)^2 a+(a\,F_C)^2 a\right)=\frac{2}{3}a^3F_C^2 \quad ,$$

$$\int_A^D M_{by}(F_C)M_{by}(F_D)\,dx=\frac{1}{3}(a\,F_C)(2\,a\,F_D)\,a+\frac{1}{6}a\left(2\cdot 2\,a\,F_D+a\,F_D\right)(a\,F_C)$$
$$=\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)a^3F_CF_D=\frac{3}{2}a^3F_CF_D$$

und

$$\int_A^D M_{by}(F_D)^2\,dx=\frac{1}{3}\left((2\,a\,F_D)^2 a+(2\,a\,F_D)^2\cdot 2\,a\right)=4\,a^3F_D^2$$

folgt:

$$E^F=\frac{a^3}{E\,I_y}\left(\frac{1}{3}F_C^2+\frac{3}{2}F_CF_D+2\,F_D^2\right)$$

b) <u>Verschiebungen der Punkte *C* und *D*:</u>

$$w_C=\frac{\partial E^F}{\partial F_C}=\frac{a^3}{E\,I_y}\left(\frac{2}{3}F_C+\frac{3}{2}F_D\right) \quad , \quad w_D=\frac{\partial E^F}{\partial F_D}=\frac{a^3}{E\,I_y}\left(\frac{3}{2}F_C+4\,F_D\right)$$

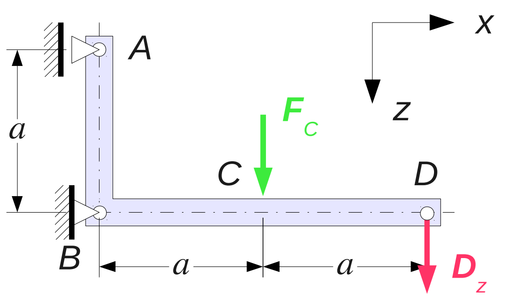
c) <u>Lagerkraft:</u>

Mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe a) gilt für die Formänderungsenergie:

$$E^F=\frac{a^3}{E\,I_y}\left(\frac{1}{3}F_C^2+\frac{3}{2}F_CD_z+2\,D_z^2\right)$$

Da die Vertikalverschiebung im Punkt *D* null sein muss, folgt:

$$\frac{\partial E^F}{\partial D_z}=\frac{a^3}{E\,I_y}\left(\frac{3}{2}F_C+4\,D_z\right)=0$$

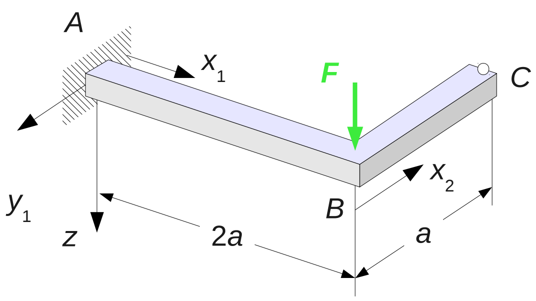
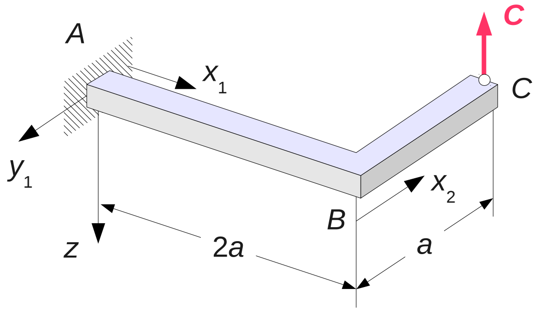
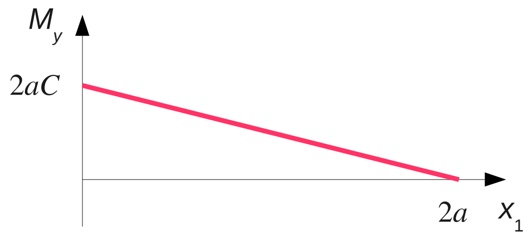
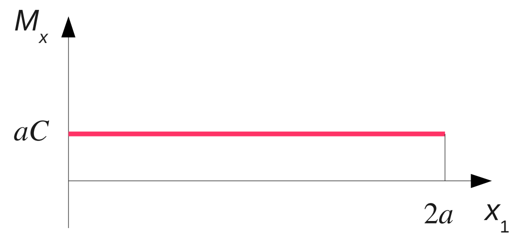


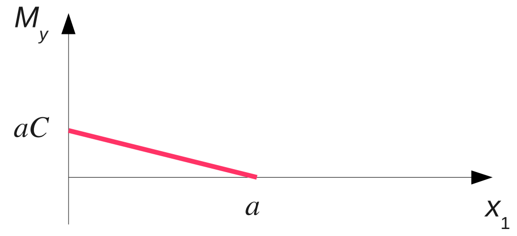
Daraus ergibt sich die gesuchte Lagerkraft zu $D_z = -\frac{3}{8} F_C$.

Aufgabe 8:

Die Stütze *CD* wird durch die im Punkt *C* angreifende Kraft C ersetzt. Für das entstehende System wird die Formänderungsenergie in Abhängigkeit von F und C ermittelt. Daraus können die gesuchten Größen nach den Sätzen von Castigliano und Menabrea ermittelt werden.

<u>Schnittlasten:</u>

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Abschnitt *AB*:</td><td>Abschnitt *AB*:</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>Abschnitt *BC*:</td><td>Abschnitt *BC*:</td></tr>
</table>



Formänderungsenergie:

$$E^F(F,C)=\frac{1}{2}\left(\int_A^B \frac{\left(M_y(F)+M_y(C)\right)^2}{E I_y}dx+\int_B^C \frac{M_y(C)^2}{E I_y}dx+\int_A^B \frac{M_x(C)^2}{G I_T}dx\right)$$

$$\int_A^B \left(M_y(F)+M_y(C)\right)^2 dx=\int_A^B M_y(F)^2 dx+2\int_A^B M_y(F)M_y(C)\,dx+\int_A^B M_y(C)^2 dx \quad :$$

$$\int_A^B M_y(F)^2 dx=\frac{1}{3}\cdot 2a\cdot(-2aF)^2=\frac{8}{3}a^3F^2$$

$$\int_A^B M_y(F)M_y(C)\,dx=\frac{1}{3}\cdot 2a\cdot(-2aF)\cdot 2aC=-\frac{8}{3}a^3CF$$

$$\int_A^B M_y(C)^2 dx=\frac{1}{3}\cdot 2a\cdot(2aC)^2=\frac{8}{3}a^3C^2$$

$$\int_A^B \left(M_y(F)+M_y(C)\right)^2 dx=\frac{8}{3}a^3\left(F^2-2CF+C^2\right)$$

$$\int_B^C M_y(C)^2 dx=\frac{1}{3}a\cdot(aC)^2=\frac{1}{3}a^3C^2$$

$$\int_A^B M_x(C)^2 dx=2a(aC)^2=2a^3C^2$$

Ergebnis:

$$E^F(F,C)=\frac{a^3\left(8F^2-16CF+9C^2\right)}{6EI_y}+\frac{a^3C^2}{GI_T}$$

Kraft in der Stütze:

Da die Stütze starr ist, ist die Vertikalverschiebung von Punkt *C* null:

$$0=\frac{\partial E^F}{\partial C}=a^3\left(\frac{-16F+18C}{6EI_y}+\frac{2C}{GI_T}\right)$$

$$\left(\frac{3}{EI_y}+\frac{2}{GI_T}\right)C=\frac{8F}{3EI_y} \rightarrow \left(3+2\frac{EI_y}{GI_T}\right)C=\frac{8}{3}F \rightarrow C=\frac{8F}{9+6\frac{EI_y}{GI_T}}$$

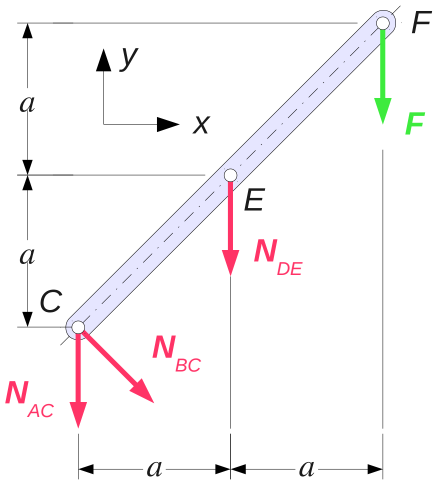
Mit $EI_y/GI_T=7/6$ folgt: $\underline{C=\frac{1}{2}F}$

Vertikalverschiebung von Punkt *B*:

$$w_B=\frac{\partial E^F}{\partial F}=\frac{a^3}{6EI_y}(16F-16C)=\frac{8}{3}\frac{a^3(F-C)}{EI_y}=\frac{8}{3}\frac{1}{2}\frac{a^3F}{EI_y}=\underline{\frac{4}{3}\frac{a^3F}{EI_y}}$$

Aufgabe 9:

Stabkräfte:



Knoten *D*: $N_{CD}=0,\ N_{BD}=N_{DE}$

Balken *CEF* freigeschnitten:

$$\sum M^C=0\ :\ -aN_{DE}-2aF=0$$

$$\rightarrow N_{DE}=-2F$$

$$\sum F_x=0\ :\ \frac{\sqrt{2}}{2}N_{BC}=0 \rightarrow N_{BC}=0$$

$$\sum F_y=0\ :\ -N_{AC}-N_{DE}-F=0$$

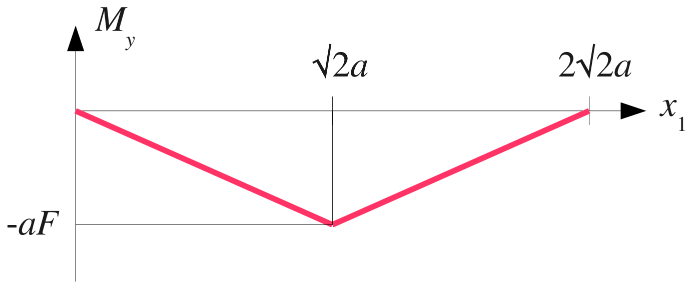
$$\rightarrow N_{AC}=2F-F=F$$

Biegemoment:

In den Punkten *C* und *F* ist das Biegemoment null. In den Bereichen *CE* und *EF* hat es einen linearen Verlauf.

Wert im Punkt *E*: (Schnitt unmittelbar rechts von *E*, negatives Schnittufer)

$$M_y(\sqrt{2}a)=-aF$$



Vertikalverschiebung von Punkt *F*:

Formänderungsenergie:

$$E^F = \frac{1}{2}\frac{a}{EA}\left(N_{AC}^2 + \sqrt{2}\,N_{BC}^2 + N_{CD}^2 + N_{BD}^2 + N_{DE}^2\right) + \frac{1}{2}\int_C^E \frac{M_y^2}{EI_y}\,dx + \frac{1}{2}\int_E^F \frac{M_y^2}{EI_y}\,dx$$

Einsetzen ergibt:

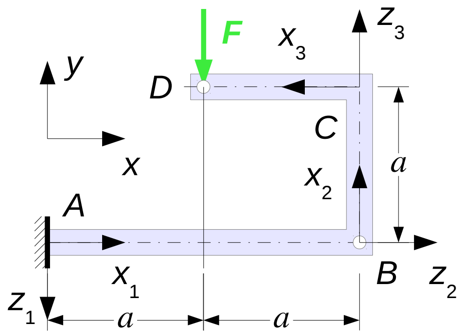
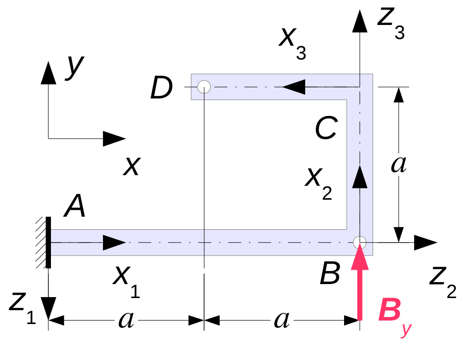
$$E^F = \frac{aF^2}{2EA}\left(1+4+4\right) + \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{F^2 a^3}{EI_y} = \frac{F^2 a^3}{6EI_y}\left(2\sqrt{2} + 27\frac{I_y}{a^2 A}\right)$$

Verschiebung:

$$v_F = \frac{\partial E^F}{\partial F} = \frac{1}{3}\frac{F a^3}{EI_y}\left(2\sqrt{2} + 27\frac{I_y}{a^2 A}\right)$$

Aufgabe 10:

Das Loslager wird durch die unbekannte Kraft B_y ersetzt. Die Formänderungsenergie wird in Abhängigkeit der Kräfte F und B_y ermittelt. Daraus können die gesuchten Größen mit den Sätzen von Menabrea und Castigliano ermittelt werden.

<table>
<tr><th>Lastfall A:</th><th>Lastfall B:</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

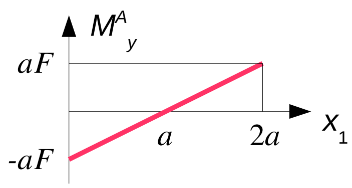
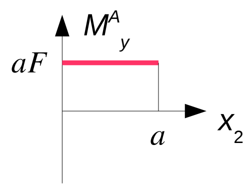
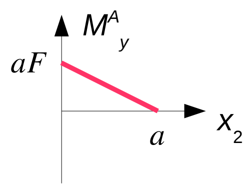
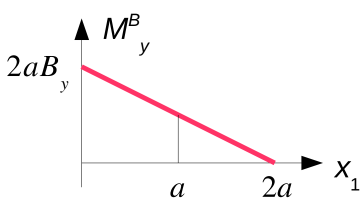
Normalkraft:

Abschnitt *AB*: $N^A(x_1)=0$, $N^B(x_1)=0$

Abschnitt *BC*: $N^A(x_2)=-F$, $N^B(x_2)=0$

Abschnitt *CD*: $N^A(x_3)=0$, $N^B(x_3)=0$

Biegemoment:

<table>
<tr><th></th><th>Abschnitt AB</th><th>Abschnitt BC</th><th>Abschnitt CD</th></tr>
<tr><td>Lastfall A:</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Lastfall B:</td><td>
</td><td>$M_y^B(x_2)=0$</td><td>$M_y^B(x_3)=0$</td></tr>
</table>

Beitrag der Normalkraft zur Formänderungsenergie: $E_N^F=\frac{1}{2}\frac{F^2 a}{EA}$

Beitrag des Biegemoments zur Formänderungsenergie:

$$E_B^F=\frac{1}{2}\int_A^D\frac{\left(M_y^A+M_y^B\right)^2}{E\,I_y}dx=\frac{1}{2}\int_A^D\frac{\left(M_y^A\right)^2+2\,M_y^A M_y^B+\left(M_y^B\right)^2}{E\,I_y}dx$$

	$\int\left(M_y^A\right)^2 dx$	$2\int M_y^A M_y^B dx$	$\int\left(M_y^B\right)^2 dx$
AB	$2\cdot\frac{1}{3}a^3F^2$	$-2\cdot\frac{5}{6}a^3B_yF+2\cdot\frac{1}{6}a^3B_yF$	$\frac{1}{3}\cdot 2\,a\cdot\left(2\,a\,B_y\right)^2$
BC	a^3F^2	0	0
CD	$\frac{1}{3}a^3F^2$	0	0

$$E_B^F=\frac{1}{2\,E\,I_y}\left[\left(\frac{2}{3}+1+\frac{1}{3}\right)a^3F^2-\frac{8}{6}a^3B_yF+\frac{8}{3}a^3B_y^2\right]=\frac{a^3}{6\,E\,I_y}\left(6\,F^2-4\,B_yF+8\,B_y^2\right)$$

Gesamte Formänderungsenergie:

$$E^F=E_N^F+E_B^F=\frac{a^3}{6\,E\,I_y}\left[\left(6+3\frac{I_y}{a^2A}\right)F^2-4\,B_yF+8\,B_y^2\right]$$

Lagerkraft:

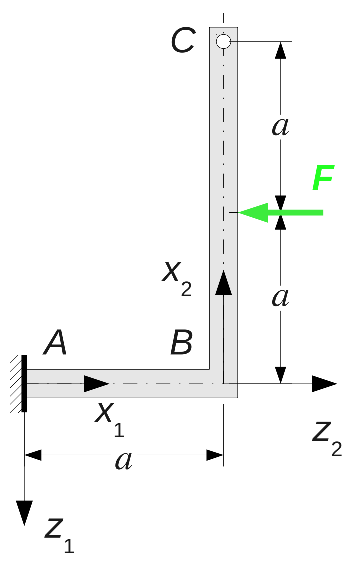
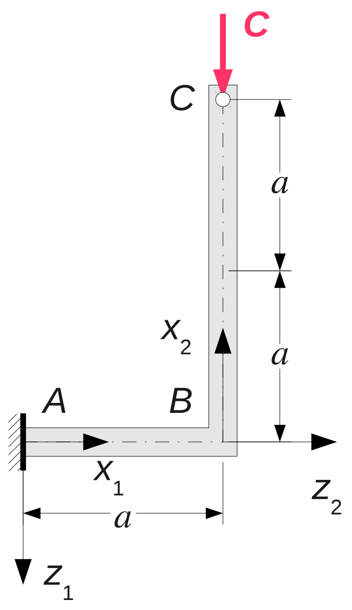
$$\frac{\partial E^F}{\partial B_y}=0\ :\ -4\,F+16\,B_y=0\ \rightarrow\ \underline{B_y=\frac{1}{4}F}$$

Vertikalverschiebung von Punkt *D*:

$$v_D=\frac{\partial E^F}{\partial F}=\frac{a^3}{6\,E\,I_y}\left[\left(12+\frac{6\,I_y}{a^2A}\right)F-4\,B_y\right]=\frac{a^3F}{6\,E\,I_y}\left(11+\frac{6\,I_y}{a^2A}\right)$$

Aufgabe 11:

Das Lager im Punkt *C* wird entfernt. Zur Ermittlung der Schnittlasten werden zwei Lastfälle betrachtet:

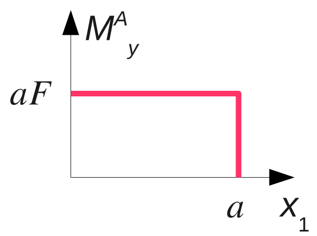
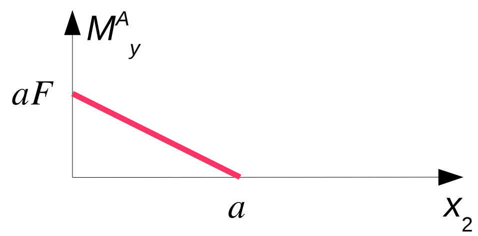
Lastfall *A*:	Lastfall *B*:
	

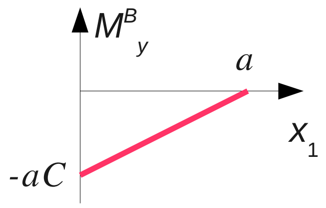
Normalkraft:

Abschnitt *AB*: $N^A(x_1) = -F$, $N^B(x_1) = 0$

Abschnitt *BC*: $N^A(x_2) = 0$, $N^B(x_2) = -C$

Biegemoment:

	Abschnitt *AB*	Abschnitt *BC*
Lastfall *A*:		

Lastfall *B*:		$M_y^B(x_2)=0$

Beitrag der Normalkraft zur Formänderungsenergie:

$$E_N^F=\frac{1}{2}\left(\frac{a\,F^2}{E\,A}+\frac{2\,a\,C^2}{E\,A}\right)=\frac{a}{2\,E\,A}\left(F^2+2\,C^2\right)$$

Beitrag des Biegemoments zur Formänderungsenergie:

$$E_B^F=\frac{1}{2}\int_A^C\frac{\left(M_y^A+M_y^B\right)^2}{E\,I_y}dx=\frac{1}{2}\int_A^C\frac{(M_y^A)^2+2\,M_y^A\,M_y^B+(M_y^B)^2}{E\,I_y}dx$$

	$\int(M_y^A)^2\,dx$	$2\int M_y^A M_y^B\,dx$	$\int(M_y^B)^2\,dx$
AB	a^3F^2	$-2\cdot\frac{1}{2}a^3F\,C=-a^3F\,C$	$\frac{1}{3}a^3C^2$
BC	$\frac{1}{3}a^3F^2$	0	0

$$E_B^F=\frac{a^3}{2\,E\,I_y}\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)F^2-F\,C+\frac{1}{3}C^2\right]=\frac{a^3}{6\,E\,I_y}\left(4\,F^2-3\,F\,C+C^2\right)$$

Gesamte Formänderungsenergie:

$$E^F=E_N^F+E_B^F=\frac{a\left(F^2+2\,C^2\right)}{2\,E\,A}+\frac{a^3\left(4\,F^2-3\,F\,C+C^2\right)}{6\,E\,I_y}$$

Kraft im Lager *C*:

$$\frac{\partial E^F}{\partial C}=0\ :\ \frac{2\,a\,C}{A}+\frac{a^3\left(2\,C-3\,F\right)}{6\,I_y}=0$$

$$\left(\frac{2}{A}+\frac{a^2}{3\,I_y}\right)C=\frac{a^2}{2\,I_y}F\ \rightarrow\ \left(\frac{4\,I_y}{a^2A}+\frac{2}{3}\right)C=F\ \rightarrow\ C=\frac{3\,F}{2+12\,I_y/(a^2A)}$$