

3.1 Fachwerke

Lösungen

Aufgabe 1:

Es gilt $[k^1]=[k^2]=[k^7]$, $[k^3]=[k^5]$ und $[k^4]=[k^6]$, so dass nur drei Steifigkeitsmatrizen berechnet werden müssen.

Element 1:

Länge: $L_1 = 1000 \text{ mm}$

Steifigkeitsmatrix im Elementkoordinatensystem:

$$[k^1]_1 = \frac{210000 \text{ N/mm}^2 \cdot 50 \text{ mm}^2}{1000 \text{ mm}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10500 & -10500 \\ -10500 & 10500 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

Transformationsmatrix:

$$[T^1]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix im Strukturkoordinatensystem:

$$[k^1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10500 & -10500 \\ -10500 & 10500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10500 & 0 & -10500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10500 & 0 & 10500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ N/mm}$$

Element 3:

Länge: $L_3 = \sqrt{500^2 + 1000^2} \text{ mm} = 1118 \text{ mm}$

Steifigkeitsmatrix im Elementkoordinatensystem:

$$[k^3]_3 = \frac{210000 \text{ N/mm}^2 \cdot 50 \text{ mm}^2}{1118 \text{ mm}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9391 & -9391 \\ -9391 & 9391 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

Transformationsmatrix:

$$[T^3]_3 = \frac{1}{1118} \begin{bmatrix} 500 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4472 & 0,8945 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4472 & 0,8945 \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix im Strukturkoordinatensystem:

$$[k^3] = \begin{bmatrix} 0,4472 & 0 \\ 0,8945 & 0 \\ 0 & 0,4472 \\ 0 & 0,8945 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9391 & -9391 \\ -9391 & 9391 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4472 & 0,8945 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4472 & 0,8945 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4200 & -4200 \\ 8400 & -8400 \\ -4200 & 4200 \\ -8400 & 8400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1878 & 3756 & -1878 & -3756 \\ 3756 & 7514 & -3756 & -7514 \\ -1878 & -3756 & 1878 & 3756 \\ -3756 & -7514 & 3756 & 7514 \end{bmatrix} \quad N/mm$$

Element 4:

Länge: $L_4 = \sqrt{500^2 + 1000^2} \text{ mm} = 1118 \text{ mm}$

Steifigkeitsmatrix im Elementkoordinatensystem:

$$[k^4]_4 = \frac{210000 \text{ N/mm}^2 \cdot 50 \text{ mm}^2}{1118 \text{ mm}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9391 & -9391 \\ -9391 & 9391 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

Transformationsmatrix:

$$[T^4]_4 = \frac{1}{1118} \begin{bmatrix} -500 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -500 & 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4472 & 0,8945 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,4472 & 0,8945 \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix im Strukturkoordinatensystem:

$$[k^4] = \begin{bmatrix} -0,4472 & 0 \\ 0,8945 & 0 \\ 0 & -0,4472 \\ 0 & 0,8945 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9391 & -9391 \\ -9391 & 9391 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,4472 & 0,8945 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,4472 & 0,8945 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4200 & 4200 \\ 8400 & -8400 \\ 4200 & -4200 \\ -8400 & 8400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1878 & -3756 & -1878 & 3756 \\ -3756 & 7514 & 3756 & -7514 \\ -1878 & 3756 & 1878 & -3756 \\ 3756 & -7514 & -3756 & 7514 \end{bmatrix} \quad N/mm$$

Ergebnis:

$$[k^1] = [k^2] = [k^7] = \begin{bmatrix} 10500 & 0 & -10500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10500 & 0 & 10500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ N/mm}$$

$$[k^3] = [k^5] = \begin{bmatrix} 1878 & 3756 & -1878 & -3756 \\ 3756 & 7514 & -3756 & -7514 \\ -1878 & -3756 & 1878 & 3756 \\ -3756 & -7514 & 3756 & 7514 \end{bmatrix} N/mm$$

$$[k^4] = [k^6] = \begin{bmatrix} 1878 & -3756 & -1878 & 3756 \\ -3756 & 7514 & 3756 & -7514 \\ -1878 & 3756 & 1878 & -3756 \\ 3756 & -7514 & -3756 & 7514 \end{bmatrix} N/mm$$

Aufgabe 2:

a) Steifigkeitsmatrix

Länge: $L = \sqrt{(510-10)^2 + (260-10)^2} \text{ mm} = 559,0 \text{ mm}$

Steifigkeitsmatrix im Elementkoordinatensystem:

$$[k^E]_E = \frac{210000 \text{ N/mm}^2 \cdot 10 \text{ mm}^2}{559 \text{ mm}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3757 & -3757 \\ -3757 & 3757 \end{bmatrix} N/mm^2$$

Transformationsmatrix:

$$[T^E]_E = \frac{1}{559} \begin{bmatrix} 500 & 250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & 250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8945 & 0,4472 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8945 & 0,4472 \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix im Strukturkoordinatensystem:

$$[k^E] = \begin{bmatrix} 0,8945 & 0 \\ 0,4472 & 0 \\ 0 & 0,8945 \\ 0 & 0,4472 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3757 & -3757 \\ -3757 & 3757 \\ 3361 & -3361 \\ 1680 & -1680 \\ -3361 & 3361 \\ -1680 & 1680 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8945 & 0,4472 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8945 & 0,4472 \\ 3006 & 1503 & -3006 & -1503 \\ 1503 & 751 & -1503 & -751 \\ -3006 & -1503 & 3006 & 1503 \\ -1503 & -751 & 1503 & 751 \end{bmatrix} N/mm$$

b) Stabkräfte

$$[F_1^E] = \begin{bmatrix} 3006 & 1503 & -3006 & -1503 \\ 1503 & 751 & -1503 & -751 \\ -3006 & -1503 & 3006 & 1503 \\ -1503 & -751 & 1503 & 751 \end{bmatrix} N/mm \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} mm = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{F}_2^E] &= \begin{bmatrix} 3006 & 1503 & -3006 & -1503 \\ 1503 & 751 & -1503 & -751 \\ -3006 & -1503 & 3006 & 1503 \\ -1503 & -751 & 1503 & 751 \end{bmatrix} \frac{N}{mm} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} mm = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} N \\
 [\mathbf{F}_3^E] &= \begin{bmatrix} 3006 & 1503 & -3006 & -1503 \\ 1503 & 751 & -1503 & -751 \\ -3006 & -1503 & 3006 & 1503 \\ -1503 & -751 & 1503 & 751 \end{bmatrix} \frac{N}{mm} \begin{bmatrix} -0,1 \\ 0,1 \\ -2,6 \\ 5,1 \end{bmatrix} mm = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 0 \\ -2,5 \end{bmatrix} N
 \end{aligned}$$

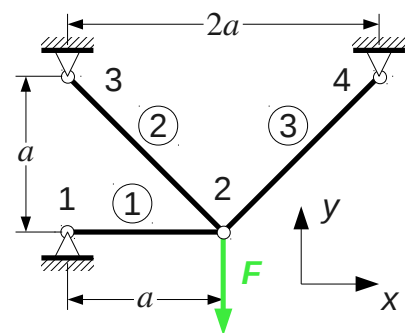
Alle drei Verschiebungen sind Starrkörperbewegungen. Bei der Drehung sind die Kräfte nicht exakt null, aber klein im Vergleich zu den Elementen der Steifigkeitsmatrix. Ursache dafür sind die Rundungsfehler bei den Elementen der Steifigkeitsmatrix.

Aufgabe 3:

a) Verschiebungen:

Elemente:

- 1: Knoten 1, Knoten 2
- 2: Knoten 2, Knoten 3
- 3: Knoten 2, Knoten 4



Elementsteifigkeitsmatrizen:

Im Elementkoordinatensystem gilt:

$$[\mathbf{k}^1]_E = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{k}^2]_E = [\mathbf{k}^3]_E = \frac{EA}{\sqrt{2}a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mit den Transformationsmatrizen

$$[\mathbf{T}^1]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{T}^2]_E = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ und}$$

$$[\mathbf{T}^3]_E = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

berechnen sich die Steifigkeitsmatrizen der Elemente im Strukturkoordinaten-

system zu

$$\begin{aligned}
 [k^1] &= \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 [k^2] &= \frac{EA}{2\sqrt{2}a} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 [k^3] &= \frac{EA}{2\sqrt{2}a} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Steifigkeitsmatrix der Gesamtstruktur:

$$[u] = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4]^T$$

$$[K] = \frac{EA}{2\sqrt{2}a} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2}+1+1 & -1+1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1+1 & 1+1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ausrechnen ergibt:

$$[K] = \frac{EA}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2}+2 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Gleichungssystem:

Unbekannt sind nur die Verschiebungen u_2 und v_2 am Knoten 2. Das zu lösende Gleichungssystem lautet:

$$\frac{EA}{2\sqrt{2}a} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}+2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F \end{bmatrix}$$

Es hat die Lösung: $u_2=0$, $v_2=-\frac{\sqrt{2}aF}{EA}$

b) Stabkräfte:

Für die Stabkräfte gilt: $N_k = \sigma^k A = \epsilon^k EA$

Element 1:

$$[u^1]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \epsilon^1 = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow N_1 = 0$$

Element 2:

$$[u^2]_E = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -u_2 + v_2 \\ -u_3 + v_3 \end{bmatrix} = -\frac{aF}{EA} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon^2 = \frac{1}{\sqrt{2}a} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \left(-\frac{aF}{EA} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{F}{\sqrt{2}EA} \rightarrow N_2 = \frac{F}{\sqrt{2}}$$

Element 3:

$$[\mathbf{u}^3]_E = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} u_2 + v_2 \\ u_4 + v_4 \end{bmatrix} = -\frac{aF}{EA} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon^3 = \frac{1}{\sqrt{2}a} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \left(-\frac{aF}{EA} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{F}{\sqrt{2}EA} \rightarrow N_3 = \frac{F}{\sqrt{2}}$$

Loadcase 1:

