1.1 Spannungszustand

Aufgaben

Aufgabe 1:

Der Spannungstensor im Punkt *P* ist gegeben durch

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 50 & -20 & 20 \\ -20 & -40 & 10 \\ 20 & 10 & 80 \end{bmatrix} MPa .$$

Berechnen Sie für die Schnittebene mit dem Normalenvektor

$$[\boldsymbol{n}] = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

a) den Spannungsvektor $\boldsymbol{t}$,

b) den Betrag der Normalspannung σ_n und der Schubspannung τ_{tn} sowie

c) den Winkel ϕ zwischen dem Spannungsvektor und dem Normalenvektor.

(Ergebnis: $[\boldsymbol{t}] = [40 \quad 20 \quad 70]^T MPa$, $\sigma_n = 62{,}86 MPa$, $\tau_{tn} = 54{,}30 MPa$, $\phi = 40{,}82°$)

Aufgabe 2:

Der Spannungstensor im Punkt *P* ist gegeben durch

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & 80 \\ 20 & 110 & 20 \\ 80 & 20 & 50 \end{bmatrix} MPa .$$

Berechnen Sie für die Schnittebenen mit den Normalenvektoren $\boldsymbol{n}_1$ bzw. $\boldsymbol{n}_2$ jeweils den Spannungsvektor $\boldsymbol{t}$ sowie die Beträge der Normalspannung σ_n und der Schubspannung τ_{tn}.

Zahlenwerte: $[\boldsymbol{n_1}] = \frac{1}{3}[2 \quad 2 \quad -1]^T$, $[\boldsymbol{n_2}] = \frac{1}{\sqrt{3}}[1 \quad 1 \quad 1]^T$

(Ergebnis: $[\boldsymbol{t_1}] = [20 \quad 80 \quad 50]^T MPa$, $[\boldsymbol{t_2}] = [86{,}60 \quad 86{,}60 \quad 86{,}60]^T MPa$;

$\sigma_{n1} = 50 MPa$, $\sigma_{n2} = 150 MPa$, $\tau_{tn1} = 82{,}46 MPa$, $\tau_{tn2} = 0 MPa$)

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Hauptspannungen und die Hauptachsen des Spannungstensors

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 170 \\ 0 & 50 & 0 \\ 170 & 0 & 80 \end{bmatrix} MPa.$$

(Ergebnis: $\sigma_1 = 250 MPa$, $\sigma_2 = 50 MPa$, $\sigma_3 = -90 MPa$; $[\boldsymbol{e}_1] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$,

$[\boldsymbol{e}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $[\boldsymbol{e}_3] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$)

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die Hauptspannungen und die Hauptachsen des Spannungstensors

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 116 & 8 & 60 \\ 8 & 104 & 30 \\ 60 & 30 & 105 \end{bmatrix} MPa.$$

(Ergebnis: $\sigma_1 = 180 MPa$, $\sigma_2 = 100 MPa$, $\sigma_3 = 45 MPa$; $[\boldsymbol{e}_1] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$,

$[\boldsymbol{e}_2] = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$, $[\boldsymbol{e}_3] = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}^T$)

Aufgabe 5:

Im Hauptachsensystem wird der Spannungstensor durch die Diagonalmatrix

$$[\boldsymbol{\sigma}]_H = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

dargestellt. Ermitteln Sie die Normalspannung σ_n und die Schubspannung τ_{tn} in einer Schnittebene, deren Normalenvektor im Hauptachsensystem durch

$$[\boldsymbol{n}]_H = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T$$

gegeben ist.

(Ergebnis: $\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$, $\tau_{tn} = \sqrt{\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \sigma_n^2}$)

Aufgabe 6:

Gegeben sind die Hauptspannungen $\sigma_1 = 200MPa$, $\sigma_2 = 50MPa$ und $\sigma_3 = -50MPa$.

a) Zeichnen Sie die Mohrschen Spannungskreise ($1cm$ entspricht $25MPa$).

b) Berechnen Sie die Normalspannung und die Schubspannung für eine Schnittebene mit dem Normalenvektor

$$[\boldsymbol{n}]_H = \frac{1}{2}[1 \quad 1 \quad \sqrt{2}]^T$$

und überprüfen Sie das Ergebnis graphisch mit den Mohrschen Spannungskreisen.

(Ergebnis: $\sigma_n = 37{,}5MPa$, $\tau_{tn} = 102{,}3MPa$)

Aufgabe 7:

Gegeben ist der Spannungstensor

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 162 & -4 & 20 \\ -4 & 168 & 10 \\ 20 & 10 & 155 \end{bmatrix} MPa.$$

a) Ermitteln Sie die Hauptspannungen und zeichnen Sie die Mohrschen Spannungskreise ($1cm$ entspricht $20MPa$).

b) Bestimmen Sie die größtmögliche Schubspannung τ_{max}.

(Ergebnis: $\sigma_1 = 180MPa$, $\sigma_2 = 170MPa$, $\sigma_3 = 135MPa$; $\tau_{max} = 22{,}5MPa$)

Aufgabe 8:

Führen Sie die Rechenschritte zur Herleitung der Gleichungen für die Mohrschen Spannungskreise durch und zeigen Sie, dass die Spannungspunkte in dem Gebiet zwischen dem äußeren Kreis und den beiden inneren Kreisen liegen müssen.

Aufgabe 9:

Leiten Sie die Formeln zur Berechnung der 2. Invariante des Spannungsdeviators aus den Hauptspannungen sowie aus den Spannungskomponenten in einem beliebigen Koordinatensystem her.

Aufgabe 10:

Leiten Sie die Formeln zur Berechnung der Oktaederspannungen aus den Hauptspannungen her.

Aufgabe 11:

Berechnen Sie für einen einachsigen Spannungszustand (nur Normalspannung σ_x von null verschieden)

a) die größtmögliche Schubspannung τ_{max},

b) den Spannungsdeviator und seine 2. Invariante sowie

c) die Oktaederspannungen.

(Ergebnis: $\tau_{max}=\sigma_x/2$, $I_{d2}=-\sigma_x^2/3$, $\sigma_{okt}=\sigma_x/3$, $\tau_{okt}=\sqrt{2}\,\sigma_x/3=2\sqrt{2}\,\tau_{max}/3=0{,}9428\,\tau_{max}$)

Aufgabe 12:

Welcher Zusammenhang besteht beim einachsigen Spannungszustand zwischen der Streckgrenze R_e und der Oktaederschubspannung τ_{oktF}, bei der Fließen eintritt? Wie groß ist die größte Schubspannung τ_{max} bei Fließbeginn?

(Ergebnis: $\tau_{oktF}=\sqrt{2}\,R_e/3$, $\tau_{max}=R_e/2$)

Aufgabe 13:

Gegeben ist der Spannungstensor

$$[\boldsymbol{\sigma}]=\begin{bmatrix}0 & \tau & \tau\\ \tau & 0 & \tau\\ \tau & \tau & 0\end{bmatrix}.$$

a) Ermitteln Sie die Hauptspannungen und zeichnen Sie die Mohrschen Spannungskreise.

b) Ermitteln Sie die größtmögliche Schubspannung τ_{max}.

c) Ermitteln Sie die Vergleichsspannung nach von Mises.

d) Ermitteln Sie die Oktaederspannungen.

(Ergebnis: $\sigma_1 = 2\,\tau, \sigma_2 = \sigma_3 = -\tau$, $\tau_{max} = 1{,}5\,\tau$, $\sigma_{okt} = 0$, $\tau_{okt} = \sqrt{2}\,\tau = 1{,}414\,\tau$)

Aufgabe 14:

Bei einem dickwandigen Rohr unter Innendruck p gilt für die Radialspannung

$$\sigma_r = -\frac{\left(r_a/r\right)^2 - 1}{\left(r_a/r_i\right)^2 - 1}\,p$$

und für die Umfangsspannung

$$\sigma_t = \frac{\left(r_a/r\right)^2 + 1}{\left(r_a/r_i\right)^2 - 1}\,p \quad .$$

Dabei ist r_i der innere und r_a der äußere Radius. Die Längsspannung σ_x bei einem Rohr mit offenen Enden ist null. Für ein geschlossenes Rohr berechnet sie sich zu

$$\sigma_x = \frac{p}{\left(r_a/r_i\right)^2 - 1} \quad .$$

In einem zylindrischen Koordinatensystem wird der Spannungstensor in einem Punkt des Rohrs durch die Diagonalmatrix

$$\left[\boldsymbol{\sigma}(r)\right] = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{bmatrix}$$

dargestellt.

a) Zeichnen Sie für beide Fälle die Mohrschen Spannungskreise an der Innenseite ($r = r_i$) und der Außenseite ($r = r_a$). Wie liegen die Hauptachsen?

b) Berechnen Sie den Innendruck bei Fließbeginn für das offene Rohr nach der Schubspannungshypothese und nach der Gestaltänderungshypothese.

c) Berechnen Sie den Innendruck bei Fließbeginn für das geschlossene Rohr nach der Schubspannungshypothese und nach der Gestaltänderungshypothese.

d) Wie liegt die Bruchfläche, wenn der Bruch in der Ebene mit der größten

Schubspannung erfolgt?

Zahlenwerte: Radienverhältnis $r_a/r_i = 2$, Streckgrenze $R_e = 235 MPa$

(Ergebnis: Offenes Rohr: $p_{F,SH} = 88{,}13 MPa$, $p_{F,GH} = 100{,}7 MPa$; Geschlossenes Rohr: $p_{F,SH} = 88{,}13 MPa$, $p_{F,GH} = 101{,}8 MPa$)

Aufgabe 15:

Zeigen Sie anhand der Mohrschen Spannungskreise, dass die größte Schubspannung in einer Ebene mit den Winkeln $\alpha_1 = \alpha_3 = \pm 45°$ und $\alpha_2 = \pm 90°$ auftritt.

Aufgabe 16:

Der Spannungstensor in einem Punkt der Struktur ist gegeben durch

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 75 & -60 & 120 \\ -60 & 93 & -6 \\ 120 & -6 & 102 \end{bmatrix} MPa \quad .$$

a) Berechnen Sie die Hauptspannungen und zeichnen Sie die Mohrschen Spannungskreise ($5mm$ entspricht $10MPa$).

b) Bestimmen Sie die größtmögliche Schubspannung τ_{max}.

c) Bestimmen Sie die zweite Invariante des Spannungsdeviators und die Vergleichsspannung $\sigma_{V,M}$ nach von Mises.

(HM, Prüfung SS 2012)

(Ergebnis: $\sigma_1 = 225 MPa$, $\sigma_2 = 90 MPa$, $\sigma_3 = -45 MPa$; $\tau_{max} = 135 MPa$; $I_{d2} = -18225 MPa^2$, $\sigma_{V,M} = 233{,}8 MPa$)

Aufgabe 17:

In einem Punkt der Struktur sind der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und der Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ gegeben durch

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 162 & -72 & 72 \\ -72 & -18 & -72 \\ 72 & -72 & 162 \end{bmatrix} MPa \quad \text{und} \quad [\boldsymbol{n}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad .$$

a) Berechnen Sie die Normalspannung σ_n und die Schubspannung τ_{tn} in der durch den Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ definierten Schnittebene.

b) Berechnen Sie die in diesem Punkt maximal mögliche Normalspannung

σ_{max} und den Normalenvektor $\boldsymbol{n}_{max}$ der Schnittebene, in der die maximale Normalspannung auftritt.

(HM, Prüfung SS 2013)

(Ergebnis: a) $\sigma_n = 18MPa$, $\tau_{tn} = 129{,}2MPa$; b) $\sigma_{max} = 270MPa$,

$\left[\boldsymbol{n}_{max}\right]^T = \frac{1}{3}\left[\begin{matrix} 2 & -1 & 2 \end{matrix}\right]$)