1.3 Elastizitätsgesetz

Aufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist der Spannungstensor

$$[\boldsymbol{\sigma}]=\begin{bmatrix}162 & -4 & 20\\ -4 & 168 & 10\\ 20 & 10 & 155\end{bmatrix} MPa\,.$$

a) Berechnen Sie die Verzerrungen für ein isotropes elastisches Material.
b) Berechnen Sie die Dilatation ε_v.

Zahlenwerte: Elastizitätsmodul $E = 204000 MPa$, Querkontraktionszahl $\nu = 0{,}3$

(Ergebnis: $\varepsilon_x = 3{,}191 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_y = 3{,}574 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_z = 2{,}745 \cdot 10^{-4}$, $\gamma_{xy} = -5{,}098 \cdot 10^{-5}$, $\gamma_{yz} = 1{,}275 \cdot 10^{-4}$, $\gamma_{xz} = 2{,}549 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon_v = 9{,}51 \cdot 10^{-4}$)

Aufgabe 2:

Gegeben ist der linearisierte Verzerrungstensor

$$[\boldsymbol{\epsilon}]=\begin{bmatrix}324 & -8 & 40\\ -8 & 336 & 20\\ 40 & 20 & 310\end{bmatrix}\cdot 10^{-5}\,.$$

a) Berechnen Sie die Hauptdehnungen und die Hauptdehnungsrichtungen.
b) Berechnen Sie die Spannungen für ein isotropes elastisches Material.
c) Berechnen Sie die Hauptspannungen aus dem Spannungstensor sowie über das Materialgesetz aus den Hauptdehnungen und vergleichen Sie die Ergebnisse.
d) Berechnen Sie die Hauptspannungsrichtungen.

Zahlenwerte: Elastizitätsmodul $E = 204000 MPa$, Querkontraktionszahl $\nu = 0{,}3$

(Ergebnis: $\varepsilon_1 = 0{,}36\%$, $\varepsilon_2 = 0{,}34\%$, $\varepsilon_3 = 0{,}27\%$, $[\boldsymbol{e}_1]=[2 \quad 1 \quad 2]^T/3$, $[\boldsymbol{e}_2]=[-1 \quad 2 \quad 0]^T/\sqrt{5}$, $[\boldsymbol{e}_3]=[-4 \quad -2 \quad 5]^T/(3\sqrt{5})$; $\sigma_x = 1650 MPa$,

$\sigma_y = 1669MPa$, $\sigma_z = 1628MPa$, $\tau_{xy} = -12{,}55MPa$, $\tau_{yz} = 31{,}38MPa$, $\tau_{xz} = 62{,}77MPa$;
$\sigma_1 = 1706MPa$, $\sigma_2 = 1675MPa$, $\sigma_3 = 1565MPa$)

Aufgabe 3:

Die größten Schubspannungen treten in Ebenen auf, die unter ±45° gegen die Ebenen mit den Hauptspannungen geneigt sind. In diesen Ebenen treten auch die größten Scherungen auf.

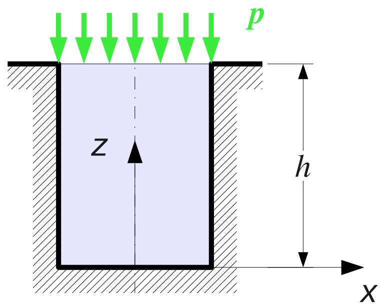
Leiten Sie aus den beiden Gleichungen

$$\tau_{12}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)=G\gamma_{12} \quad \text{und} \quad \gamma_{12}=2\epsilon_{12}=\epsilon_1-\epsilon_2$$

die Beziehung zwischen dem Schubmodul G, dem Elastizitätsmodul E und der Querkontrationszahl ν her.

Aufgabe 4:

Ein Kreiszylinder aus Stahl mit Querschnittsfläche A und Höhe h sitzt im unbelasteten Zustand spielfrei in einem starren Hohlraum. Ermitteln Sie unter der Annahme, dass der Zylinder an der Mantelfläche reibungsfrei gleiten kann, die Komponenten des Spannungstensors und die Änderung Δh seiner Höhe,



a) wenn der Zylinder auf der Oberseite durch den Druck p belastet wird,

b) wenn der Zylinder gleichmäßig um ΔT erwärmt wird.

Hinweis: Die Spannungen im Zylinder sind konstant.

Zahlenwerte: $h = 60mm$, $A = 160mm^2$, $E = 210000MPa$, $\nu = 0{,}3$, $\alpha_T = 12\cdot 10^{-6} 1/K$, $p = 100MPa$, $\Delta T = 100K$

(Ergebnis: a) $\sigma_x = -42{,}86MPa$, $\sigma_y = -42{,}86MPa$, $\sigma_z = -100MPa$, $\Delta h = -0{,}02122mm$;
b) $\sigma_x = -360MPa$, $\sigma_y = -360MPa$, $\sigma_z = 0MPa$, $\Delta h = 0{,}1337mm$)

Aufgabe 5:

Zeigen Sie, dass bei einem isotropen Material für die Temperaturspannungen die Beziehung

$$[\boldsymbol{\sigma}_T]=-3K\alpha_T\Delta T\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

gilt.