# 3. Elastizitätsgesetz

# 3.1 Grundlagen

- Elastisches Material:
  - Bei einem elastischen Material besteht ein eindeutig umkehrbarer Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor und dem Verzerrungstensor:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\epsilon}), \quad \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{\sigma})$$

  - Der Zusammenhang wird durch die tensorwertige Tensorfunktion $\boldsymbol{f}$ beschrieben.
- Linear-elastisches Material:
  - Bei einem linear-elastischen Material ist die Tensorfunktion $\boldsymbol{f}$ linear, d.h. es gilt:

$$\boldsymbol{f}(\alpha \boldsymbol{\epsilon}_1 + \beta \boldsymbol{\epsilon}_2) = \alpha \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\epsilon}_1) + \beta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\epsilon}_2)$$

# 3.1 Grundlagen

- Die Tensoren $\boldsymbol{\sigma}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$ beschreiben lineare Beziehungen zwischen Vektoren. Sie sind Tensoren 2. Stufe.
- Das lineare Elastizitätsgesetz stellt eine lineare Beziehung zwischen Tensoren 2. Stufe her. Es definiert einen Tensor 4. Stufe:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\epsilon}$$

- Diese Beziehung wird als allgemeines Hookesches Gesetz bezeichnet.
- Der Tensor $\boldsymbol{E}$ ist der *Elastizitätstensor*.

# 3.1 Grundlagen

- Voigtsche Schreibweise:
  - Wenn die Spannungen und Verzerrungen durch Spaltenmatrizen beschrieben werden, lässt sich das allgemeine Hookesche Gesetz durch Matrizen ausdrücken.
  - Da die Tensoren $\boldsymbol{\sigma}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$ symmetrisch sind, genügen sechs Komponenten.

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}, \quad \{\boldsymbol{\epsilon}\} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

# 3.1 Grundlagen

- In Voigtscher Darstellung lautet das Hookesche Gesetz:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ E_{14} & E_{24} & E_{34} & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ E_{15} & E_{25} & E_{35} & E_{45} & E_{55} & E_{56} \\ E_{16} & E_{26} & E_{36} & E_{46} & E_{56} & E_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\boldsymbol{E}\}\{\boldsymbol{\epsilon}\}$$

- Die Matrix $\{\boldsymbol{E}\}$ heißt *Elastizitätsmatrix*.

# 3.1 Grundlagen

- Die Symmetrie der Elastizitätsmatrix $\{\boldsymbol{E}\}$ folgt aus Energiebetrachtungen.
- Ein allgemeines anisotropes linear-elastisches Material wird durch 21 elastische Konstanten beschrieben.
- Für die Dehnungen gilt:

$$\left\{\boldsymbol{\epsilon}\right\}=\left\{\boldsymbol{E}\right\}^{-1}\left\{\boldsymbol{\sigma}\right\}=\left\{\boldsymbol{S}\right\}\left\{\boldsymbol{\sigma}\right\}$$

- Die Matrix $\{\boldsymbol{S}\}$ heißt *Nachgiebigkeitsmatrix*.

# 3.2 Isotropes Material

- Definition:
  - Bei einem isotropen Material hängt das Elastizitätsgesetz nicht vom Koordinatensystem ab.
- Nachgiebigkeitsmatrix:
  - Die Normalspannung $\sigma_x$ verursacht die Dehnungen

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x, \quad \epsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x, \quad \epsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x$$

  - Dabei ist $E$ der *Elastizitätsmodul* und $\nu$ die *Querkontraktionszahl*.
  - Die Gleichheit der Dehnungen $\varepsilon_y$ und $\varepsilon_z$ folgt aus der Isotropie.

# 3.2 Isotropes Material

- Die Normalspannung $\sigma_y$ verursacht die Dehnungen

$$\epsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_y, \quad \epsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y, \quad \epsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_y$$

- Die Normalspannung $\sigma_z$ verursacht die Dehnungen

$$\epsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_z, \quad \epsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z, \quad \epsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z$$

- Die Schubspannungen verursachen die Scherungen

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

- Die Konstante $G$ heißt *Schubmodul*.

# 3.2 Isotropes Material

- Damit sich das Elastizitätsgesetz bei Drehungen des Koordinatensystems nicht ändert, muss gelten:

$$\boxed{G=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}}$$

- Diese Beziehung folgt leicht aus der Tatsache, dass bei einem isotropen Material Hauptspannungsrichtungen und Hauptdehnungsrichtungen gleich sind (s. unten).
- Zur Beschreibung eines isotropen Materials genügen also zwei unabhängige elastische Konstanten.

# 3.2 Isotropes Material

- Die Verzerrungen für einen allgemeinen räumlichen Spannungszustand ergeben sich durch Überlagerung:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}$$

# 3.2 Isotropes Material

- Elastizitätsmatrix:
  - Inversion der Nachgiebigkeitsmatrix führt auf

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

  - Für $\nu = 0{,}5$ ist die Inversion nicht möglich.

# 3.2 Isotropes Material

- Hauptachsen:
  - Die Elastizitätsmatrix und die Nachgiebigkeitsmatrix zeigen, dass keine Kopplung zwischen Schubspannungen und Dehnungen und zwischen Normalspannungen und Sche-rungen besteht.
  - Daher sind in einem Hauptachsensystem des Spannungs-tensors die Scherungen null und in einem Hauptachsensys-tem des Verzerrungstensors die Schubspannungen.
  - Spannungstensor und Verzerrungstensor haben die glei-chen Hauptachsen.

# 3.2 Isotropes Material

- Kompressionsmodul:
  - Für die Dilatation gilt:

$$\epsilon_v = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

$$= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\,\sigma_y - \nu\,\sigma_z - \nu\,\sigma_x + \sigma_y - \nu\,\sigma_z - \nu\,\sigma_x - \nu\,\sigma_y + \sigma_z\right)$$

$$= \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) = \frac{3\left(1-2\nu\right)}{E}\sigma_m = \frac{1}{K}\sigma_m$$

  - Die Konstante

$$\boxed{K = \frac{E}{3\left(1-2\nu\right)}}$$

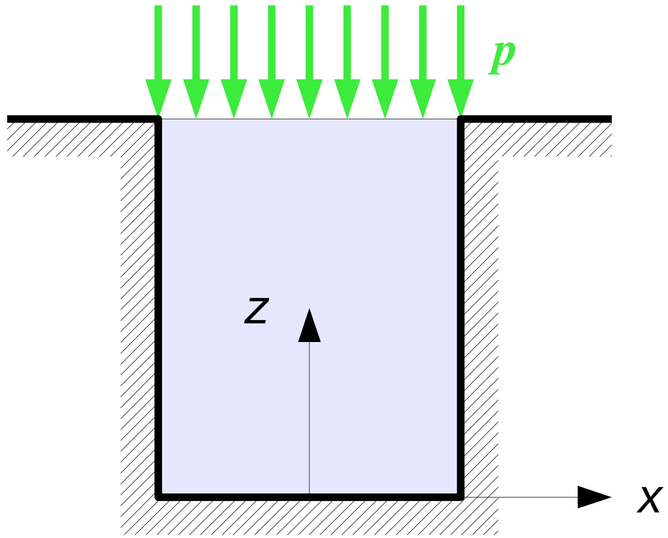
heißt *Kompressionsmodul*.

# 3.2 Isotropes Material

- Für $\nu = 0{,}5$ gilt: $\epsilon_\nu = 0$
- Ein Werkstoff, dessen Volumen sich unter Belastung nicht ändert, wird als *inkompressibel* bezeichnet.
- Da sich die Nachgiebigkeitsmatrix für $\nu = 0{,}5$ nicht invertieren lässt, benötigen inkompressible Werkstoffe spezielle Materialgesetze.

# 3.2 Isotropes Material

- Beispiel:
  - Ein prismatischer Körper befindet sich in einer starren Hülse, in der er sich reibungsfrei bewegen kann.
  - Auf der oberen Seite wird er durch den konstanten Druck $p$ belastet.
  - Gesucht sind die Spannungen und die Verzerrungen.



# 3.2 Isotropes Material

- Aus den Randbedingungen folgt: $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$

  $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$

- Daraus folgt für die Scherungen: $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$

- Aus dem Materialgesetz folgt:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \epsilon_z \end{bmatrix}$$

- Aus dem Kräftegleichgewicht in *z*-Richtung folgt: $\sigma_z = -p$

# 3.2 Isotropes Material

- Aus der letzten Gleichung des Materialgesetzes folgt:

$$-p=\sigma_z=\frac{E\left(1-\nu\right)}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\epsilon_z \quad \rightarrow \quad \epsilon_z=-\frac{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}{E\left(1-\nu\right)}p$$

- Einsetzen in die beiden anderen Gleichungen ergibt:

$$\sigma_x=\sigma_y=\frac{E\nu}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\epsilon_z=-\frac{\nu}{1-\nu}p$$

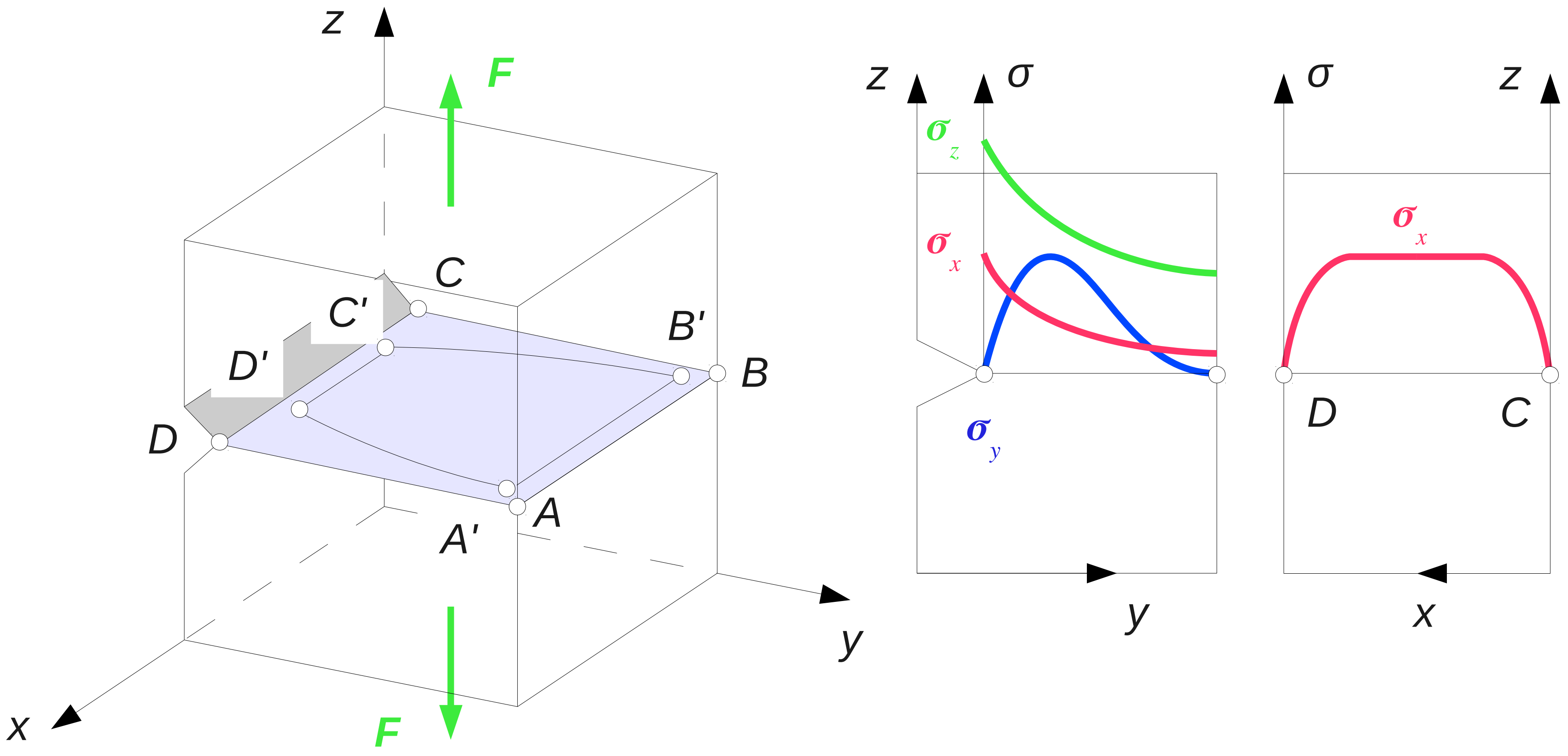
- Für $\nu = 0{,}3$ gilt z.B.: $\epsilon_z=-\frac{26}{35}\frac{p}{E}, \quad \sigma_x=\sigma_y=-\frac{3}{7}p$

- Die Dehnungsbehinderung führt zu einem räumlichen Spannungszustand.

# 3.2 Isotropes Material

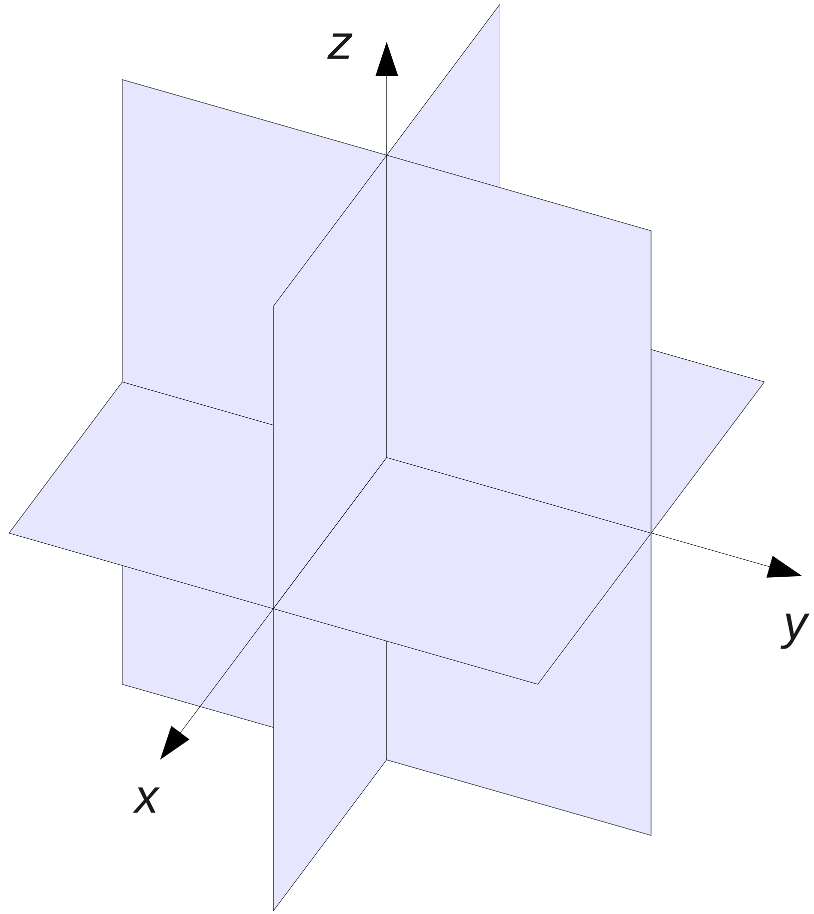
- Dehnungsbehinderung:
  - Dehnungsbehinderung tritt auf, wenn sich mindestens eine Spannungskomponente örtlich stark ändert. Sie führt zu einem ausgeprägten räumlichen Spannungszustand.
  - Beispiel: Kerbe
    - Infolge der Querkontraktion zur Spannung $\sigma_z$ würde der Querschnitt *ABCD* die Form *A'B'C'D'* annehmen.
    - Er wird daran jedoch durch das benachbarte weniger stark belastete Material gehindert.
    - Dadurch bilden sich auch Spannungen in *x*- und *y*-Richtung aus.

# 3.2 Isotropes Material



# 3.3 Orthotropes Material

- Definition:
  - Bei einem orthotropen Material gibt es drei senkrecht aufeinander stehende Ebenen, bezüglich denen die Materialeigenschaften symmetrisch sind.
  - Faserverbundwerkstoffe und Laminate zeigen ein orthotropes Materialverhalten.



# 3.3 Orthotropes Material

- Nachgiebigkeitsmatrix:
  - In einem Koordinatensystem, dessen Achsen parallel zu den Schnittgeraden der Symmetrieebenen sind, gilt:

$$\{\boldsymbol{S}\} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} \end{bmatrix}$$

# 3.3 Orthotropes Material

- Wegen der drei Symmetriebedingungen

$$\frac{\nu_{12}}{E_2}=\frac{\nu_{21}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_3}=\frac{\nu_{31}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_3}=\frac{\nu_{32}}{E_2}$$

  wird ein orthotropes Material durch insgesamt neun voneinander unabhängige elastische Konstanten beschrieben.

# 3.4 Temperaturdehnungen

- Temperaturdehnungen:
  - Bei einem isotropen Material gilt für die Dehnungen infolge einer Temperaturänderung $\Delta T$ :

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \alpha_T \Delta T$$

  - Es treten keine Scherungen auf.
  - Für die Verzerrungen gilt:

$$\{\boldsymbol{\epsilon}_T\} = \alpha_T \Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# 3.4 Temperaturdehnungen

- Gesamte Verzerrungen:
  - Die gesamten Verzerrungen ergeben sich durch Addition der elastischen Verzerrungen und der Temperaturdehnungen:

$$\{\boldsymbol{\epsilon}\} = [\boldsymbol{S}]\{\boldsymbol{\sigma}\} + \{\boldsymbol{\epsilon}_T\}$$

  - Für die Spannungen folgt:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{S}]^{-1}\left(\{\boldsymbol{\epsilon}\} - \{\boldsymbol{\epsilon}_T\}\right)$$
$$= [\boldsymbol{E}]\left(\{\boldsymbol{\epsilon}\} - \{\boldsymbol{\epsilon}_T\}\right)$$

  - Die *Temperaturspannungen* berechnen sich zu

$$\{\boldsymbol{\sigma}_T\} = -[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\epsilon}_T\}$$
$$= -3\,K\,\alpha_T\,\Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$