1. Formänderungsenergie

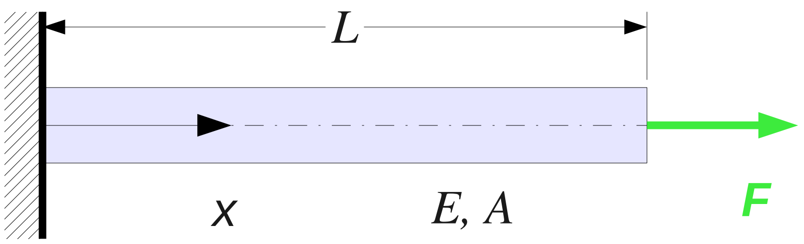
1.1 Grundlagen

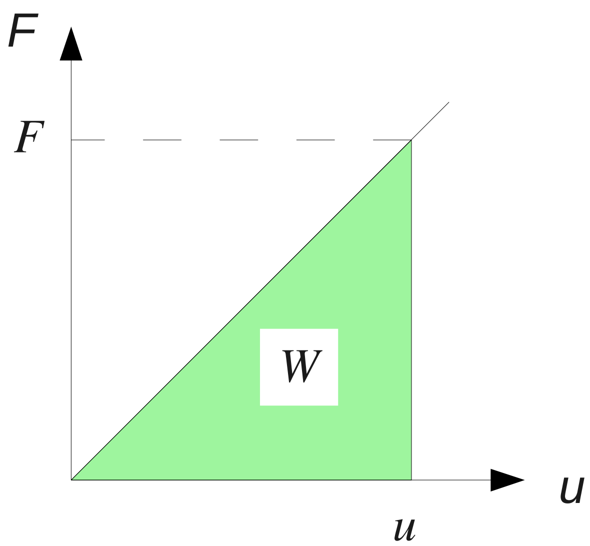
1.2 Grundlastfälle

1.3 Beispiele

1.1 Grundlagen

- Zugstab:





  - An einem am linken Ende eingespannten linear elastischen Stab greift am rechten Ende die Kraft ***F*** an.

1.1 Grundlagen

- Der Stab hat die Länge L, die konstante Querschnittsfläche A und den Elastizitätsmodul E.
- Die Kraft verrichtet die Arbeit: $W=\frac{1}{2}F\,u$
- Die Normalspannung σ im Stab ist konstant.
- Mit $F = \sigma A$ folgt:

$$W=\frac{1}{2}\sigma A u=\frac{1}{2}\int_0^L \frac{d(\sigma u)}{dx} A\,dx=\frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{d\sigma}{dx}u+\sigma\frac{du}{dx}\right)A\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^L \sigma\,\epsilon\,A\,dx=\frac{1}{2}\int_V \sigma\,\epsilon\,dV=E^F$$

1.1 Grundlagen

- Die Größe $$E^F = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon \, dV = \int_V e^F \, dV$$

  heißt *Formänderungsenergie* und der Integrand

  $$e^F = \frac{1}{2} \sigma \epsilon$$

  Formänderungsenergiedichte.

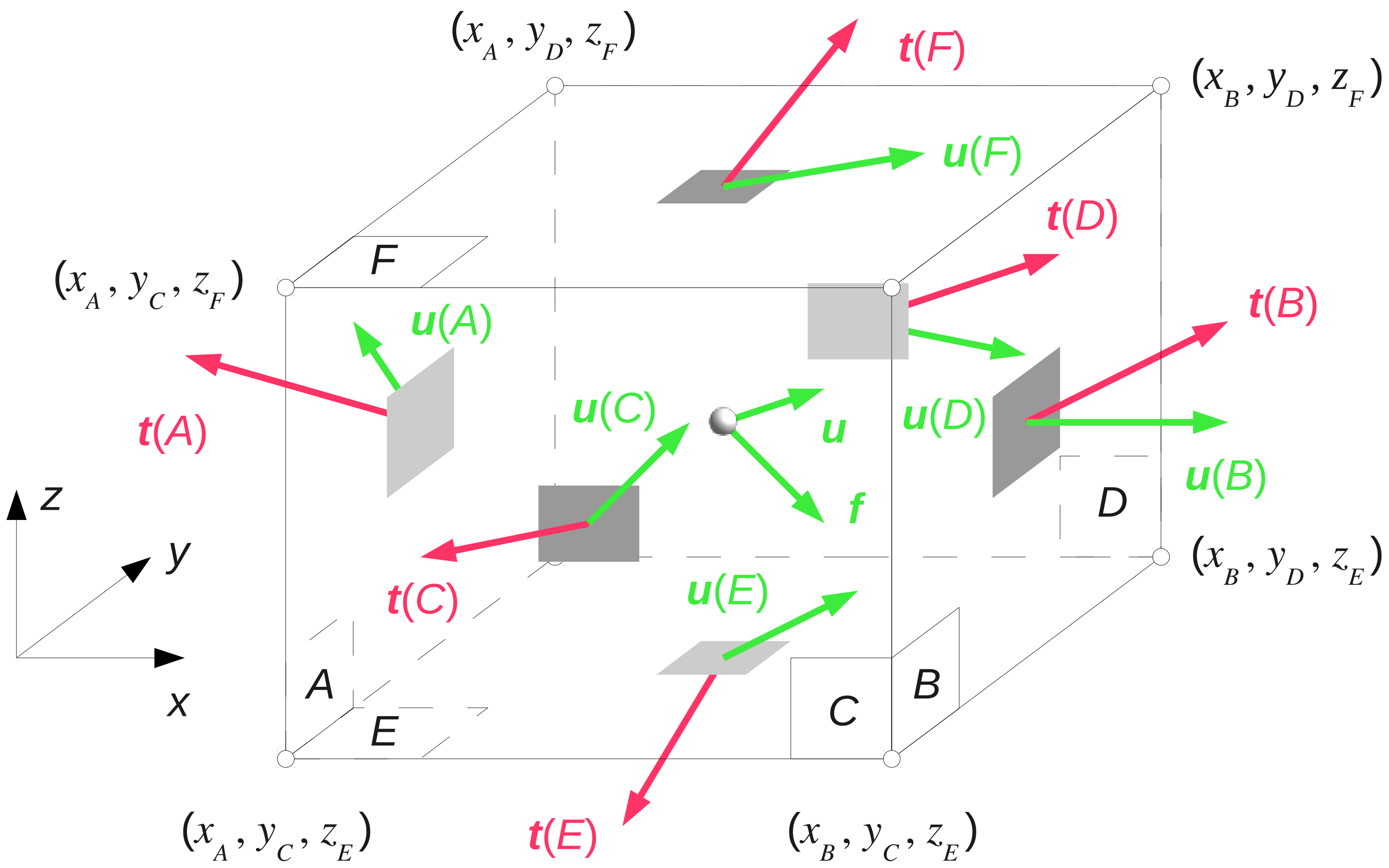
- Die von der äußeren Kraft verrichtete Arbeit ist als Formänderungsenergie im Stab gespeichert:

$$\boxed{W = E^F}$$

1.1 Grundlagen

- Räumlicher Spannungszustand:
  - Untersucht wird die Arbeit, die die an einem Quader mit achsenparallelen Kanten angreifenden Kräfte verrichten.
  - Diese Arbeit ist gleich der im Quader gespeicherten Formänderungsenergie.
  - Die gesamte Formänderungsenergie in einem Körper ergibt sich als Integral der Formänderungsenergiedichte über den gesamten Körper.

1.1 Grundlagen



1.1 Grundlagen

- Für die Arbeit W gilt zunächst:

$$
\begin{aligned}
2W = & \int_{y_C}^{y_D} \int_{z_E}^{z_F} \left(\boldsymbol{t}(B) \cdot \boldsymbol{u}(B) + \boldsymbol{t}(A) \cdot \boldsymbol{u}(A) \right) dz\, dy \\
& + \int_{x_A}^{x_B} \int_{z_E}^{z_F} \left(\boldsymbol{t}(D) \cdot \boldsymbol{u}(D) + \boldsymbol{t}(C) \cdot \boldsymbol{u}(C) \right) dz\, dx \\
& + \int_{x_A}^{x_B} \int_{y_C}^{y_D} \left(\boldsymbol{t}(F) \cdot \boldsymbol{u}(F) + \boldsymbol{t}(E) \cdot \boldsymbol{u}(E) \right) dy\, dx \\
& + \int_{x_A}^{x_B} \int_{y_C}^{y_D} \int_{z_E}^{z_F} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}\, dz\, dy\, dx
\end{aligned}
$$

1.1 Grundlagen

- Mit $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$ folgt in Komponenten:

$$
\begin{aligned}
2W = & \int_{y_C}^{y_D}\int_{z_E}^{z_F}\Big(\sigma_x(B)u(B)+\tau_{xy}(B)v(B)+\tau_{xz}(B)w(B) \\
& \quad -\sigma_x(A)u(A)-\tau_{xy}(A)v(A)-\tau_{xz}(A)w(A)\Big)\,dz\,dy \\
& +\int_{x_A}^{x_B}\int_{z_E}^{z_F}\Big(\tau_{xy}(D)u(D)+\sigma_y(D)v(D)+\tau_{yz}(D)w(D) \\
& \quad -\tau_{xy}(C)u(C)-\sigma_y(C)v(C)-\tau_{yz}(C)w(C)\Big)\,dz\,dx \\
& +\int_{x_A}^{x_B}\int_{y_C}^{y_D}\Big(\tau_{xz}(F)u(F)+\tau_{yz}(F)v(F)+\sigma_z(F)w(F) \\
& \quad -\tau_{xz}(E)u(E)-\tau_{yz}(E)v(E)-\sigma_z(E)w(E)\Big)\,dy\,dx \\
& +\int_{x_A}^{x_B}\int_{y_C}^{y_D}\int_{z_E}^{z_F}\left(f_x u+f_y v+f_z w\right)dz\,dy\,dx
\end{aligned}
$$

1.1 Grundlagen

- Ersetzen der Differenzen durch Integrale ergibt:

$$
\begin{aligned}
2W = &\int_{x_A}^{x_B}\int_{y_C}^{y_D}\int_{z_E}^{z_F}\left(\frac{\partial(\sigma_x u)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau_{xy} v)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau_{xz} w)}{\partial x}\right) dz\,dy\,dx \\
&+\int_{x_A}^{x_B}\int_{y_C}^{y_D}\int_{z_E}^{z_F}\left(\frac{\partial(\tau_{xy} u)}{\partial y}+\frac{\partial(\sigma_y v)}{\partial y}+\frac{\partial(\tau_{yz} w)}{\partial y}\right) dz\,dy\,dx \\
&+\int_{x_A}^{x_B}\int_{y_C}^{y_D}\int_{z_E}^{z_F}\left(\frac{\partial(\tau_{xz} u)}{\partial z}+\frac{\partial(\tau_{yz} v)}{\partial z}+\frac{\partial(\sigma_z w)}{\partial z}\right) dz\,dy\,dx \\
&+\int_{x_A}^{x_B}\int_{y_C}^{y_D}\int_{z_E}^{z_F}\left(f_x u+f_y v+f_z w\right) dz\,dy\,dx = 2\int_{x_A}^{x_B}\int_{y_C}^{y_D}\int_{z_E}^{z_F} e^F\,dz\,dy\,dx
\end{aligned}
$$

1.1 Grundlagen

- Mit der Produktregel ergibt sich daraus für die Formände-rungsenergiedichte:

$$
\begin{aligned}
2\,e^F = & \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x \right) u + \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} \\
& + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y \right) v + \sigma_x \frac{\partial v}{\partial y} \\
& + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z \right) w + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} \\
& + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)
\end{aligned}
$$

1.1 Grundlagen

- Mit den Gleichgewichtsbedingungen und den kinematischen Beziehungen folgt:

$$e^F = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\sigma}\right]^T\left[\boldsymbol{\epsilon}\right] = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\sigma}\right]^T\left[\boldsymbol{S}\right]\left[\boldsymbol{\sigma}\right] = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\epsilon}\right]^T\left[\boldsymbol{E}\right]\left[\boldsymbol{\epsilon}\right] \geq 0$$

- Die Formänderungsenergiedichte ist positiv. Sie ist null, wenn die Verzerrungen null sind, d.h. für eine Starrkörper-bewegung.

1.1 Grundlagen

- Für die Formänderungsenergie gilt:

$$E^F = \int_V e^F \, dV = \frac{1}{2} \int_V \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{\boldsymbol{\epsilon}\} \, dV$$

- Sie ist gleich der Arbeit der äußeren Kräfte: $W = E^F$
- Wenn am Körper nur eine einzige Kraft angreift, gilt:

$$W = \frac{1}{2} F \, u = \frac{1}{2} \int_V \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{\boldsymbol{\epsilon}\} \, dV$$

- Daraus lässt sich die Verschiebung u am Lastangriffspunkt ermitteln:

$$u = \frac{1}{F} \int_V \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{\boldsymbol{\epsilon}\} \, dV$$

1.2 Grundlastfälle

- Normalkraft:
  - Betrachtet wird ein Stab mit veränderlichem Querschnitt, der durch eine Normalkraft N belastet wird.
  - Mit
  $$\sigma_x = \frac{N}{A} \quad \text{und} \quad \epsilon_x = \frac{\sigma}{E}$$
  gilt:
  $$\boxed{E_N^F = \frac{1}{2} \int_V \frac{N^2}{E\,A^2}\, dV = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{E\,A}\, dx}$$
  - Wenn Querschnittsfläche und Normalkraft konstant sind, gilt:
  $$E_N^F = \frac{1}{2} \frac{N^2 L}{E\,A}$$

1.2 Grundlastfälle

- Bei Fachwerken muss über alle Stäbe summiert werden:

$$E_N^F = \frac{1}{2} \sum_k \frac{N_k^2 L_k}{E_k A_k}$$

- Biegemoment:
  - Im Hauptachsensystem gilt für die Spannungen in einem Querschnitt:

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z - \frac{M_z(x)}{I_z} y$$

1.2 Grundlastfälle

- Daraus folgt für die Formänderungsenergiedichte:

$$e_B^F = \frac{1}{2}\frac{\sigma_x^2}{E} = \frac{1}{2}\frac{M_y^2}{E I_y^2} z^2 - \frac{M_y M_z}{E I_y I_z} yz + \frac{1}{2}\frac{M_z^2}{E I_z^2} y^2$$

- Die Formänderungsenergie ergibt sich durch Integration über das Volumen. Mit $dV = dA dx$ und

$$I_y = \int_A z^2 \, dA, \quad I_z = \int_A y^2 \, dA, \quad I_{yz} = -\int_A y\, z \, dA = 0$$

folgt:

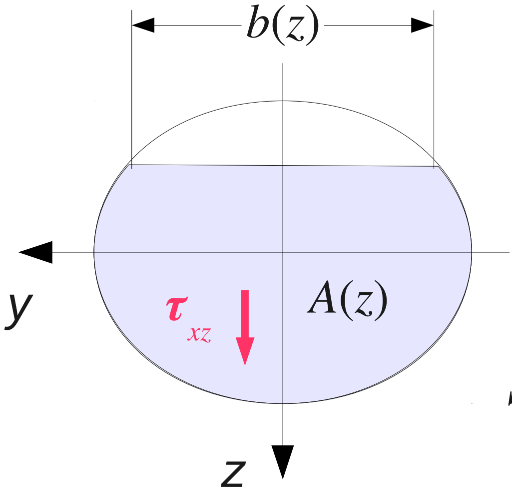
$$\boxed{E_B^F = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{M_y^2}{E I_y} + \frac{M_z^2}{E I_z} \right) dx}$$

1.2 Grundlastfälle

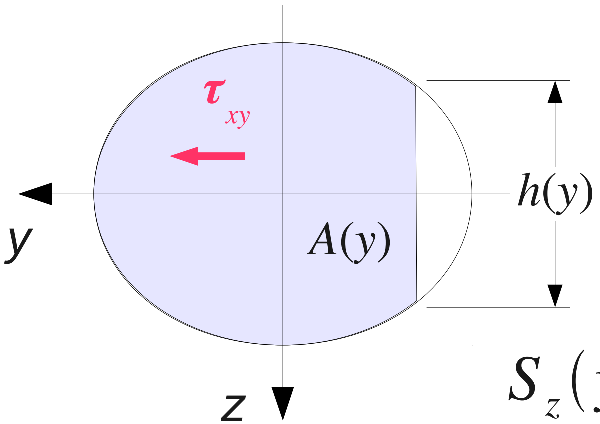
- Querkraftschub:
  - Für die Schubspannung in einem Querschnitt senkrecht zur Balkenachse gilt:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z(x) S_y(z)}{I_y(x) b(z)}$$

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y(x) S_z(y)}{I_z(x) h(y)}$$



$$S_y(z) = \int_{A(z)} \bar{z}\, dA$$



$$S_z(y) = \int_{A(y)} \bar{y}\, dA$$

1.2 Grundlastfälle

- Dabei sind $S_y(z)$ und $S_z(y)$ die statischen Momente der ab z bzw. y laufenden Fläche.
- Die Formänderungsenergiedichte berechnet sich zu

$$e_S^F = \frac{1}{2G}\left(\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2\right) = \frac{1}{2G}\left(\frac{Q_z^2 S_y^2}{I_y^2 b^2} + \frac{Q_y^2 S_z^2}{I_z^2 h^2}\right)$$

- Integration über das Volumen ergibt:

$$E_S^F = \int_V \frac{1}{2G}\left(\frac{Q_z^2 S_y^2}{I_y^2 b^2} + \frac{Q_y^2 S_z^2}{I_z^2 h^2}\right) dV = \int_0^L \frac{1}{2G}\left(\frac{Q_z^2}{I_y^2}\int_A \frac{S_y^2}{b^2}\,dA + \frac{Q_y^2}{I_z^2}\int_A \frac{S_z^2}{h^2}\,dA\right) dx$$

1.2 Grundlastfälle

- Mit den *Schubverteilungszahlen*

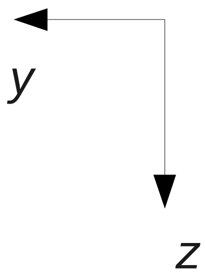
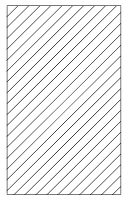
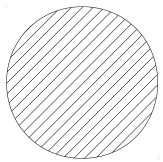
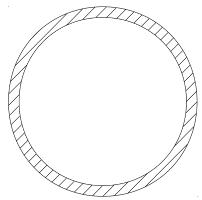
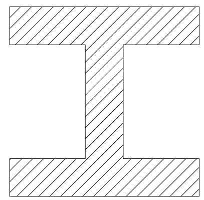
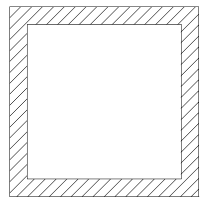
$$k_y = \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{S_z^2}{h^2} dA, \quad k_z = \frac{A}{I_y^2} \int_A \frac{S_y^2}{b^2} dA$$

folgt für die Formänderungsenergie:

$$\boxed{E_S^F = \frac{1}{2} \int_0^L \left(k_z \frac{Q_z^2}{GA} + k_y \frac{Q_y^2}{GA} \right) dx}$$

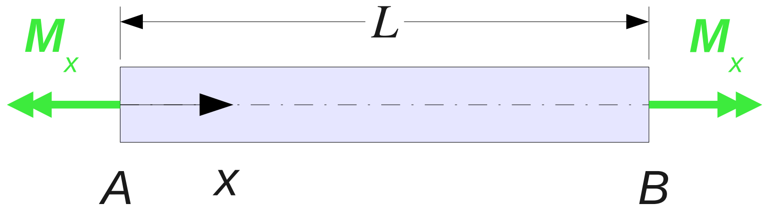
1.2 Grundlastfälle

- Schubverteilungszahlen:

			 $t \ll d$		 $t \ll d$
k_y, k_z	6/5	≈ 10/9	2	≈ 6/5	≈ 1

1.2 Grundlastfälle

- Torsion:
  - Mit den Verdrehungen θ_A und θ_B gilt:



$$2W = M_x\left(\theta_B - \theta_A\right) = \int_{x_A}^{x_B} M_x \frac{d\theta}{dx}\,dx = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M_x^2}{G I_T}\,dx$$

  - Damit gilt für die Formänderungsenergie:

$$\boxed{E_T^F = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M_x^2}{G I_T}\,dx}$$

  - Dabei ist I_T das Torsionsträgheitsmoment.

1.2 Grundlastfälle

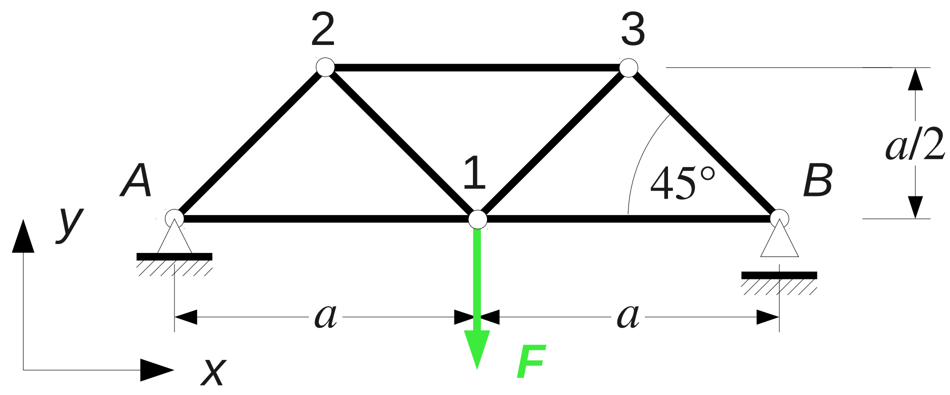
- Überlagerung:
  - Wird ein Träger durch mehrere dieser Grundlastfälle belastet, so ergibt sich die gesamte Formänderungsenergie durch Addition der einzelnen Beiträge:

$$\boxed{E^F = E_N^F + E_B^F + E_S^F + E_T^F}$$

  - Bei langen schlanken Balken ($L > 5h$) kann der Beitrag des Querkraftschubs vernachlässigt werden.

1.3 Beispiele

- Fachwerk:
  - Gegeben:
    - $a = 1000mm$
    - $E = 210000MPa$
    - $A = 250mm^2$
    - $F = 10kN$



  - Gesucht:
    - Formänderungsenergie
    - Vertikalverschiebung des Lastangriffspunkts

1.3 Beispiele

- Stabkräfte (mit Knotenpunktverfahren):

$$N_{A1}=N_{B1}=\frac{F}{2},\quad N_{23}=-F,\quad N_{12}=N_{13}=\frac{F}{\sqrt{2}},\quad N_{A2}=N_{B3}=-\frac{F}{\sqrt{2}}$$

- Formänderungsenergie:

$$E_N^F=\frac{a}{2EA}\left[N_{A1}^2+N_{B1}^2+N_{23}^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(N_{A2}^2+N_{12}^2+N_{13}^2+N_{B3}^2\right)\right]$$

$$=\frac{aF^2}{2EA}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{aF^2}{2EA}\left[\frac{3}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right]$$

$$=\frac{aF^2}{4EA}\left(3+2\sqrt{2}\right)$$

1.3 Beispiele

- Vertikalverschiebung des Lastangriffspunkts:

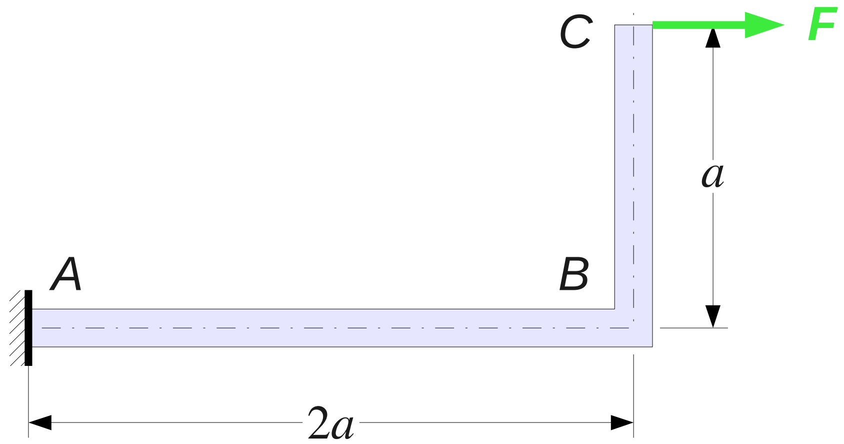
  - Aus $W = E^F$ folgt: $$\frac{1}{2} F\, v = E^F = \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \frac{F^2 a}{E A}$$
    $$\rightarrow \quad v = \frac{3+2\sqrt{2}}{2} \frac{F a}{E A} = 2{,}914 \frac{F a}{E A}$$

  - Zahlenwert: $$v = 2{,}914 \cdot \frac{10000\, N \cdot 1000\, mm}{210000\, N / mm^2 \cdot 250\, mm^2} = \underline{0{,}5550\, mm}$$

  - Ein positives Vorzeichen gibt an, dass die Verschiebung in Richtung der Kraft erfolgt.

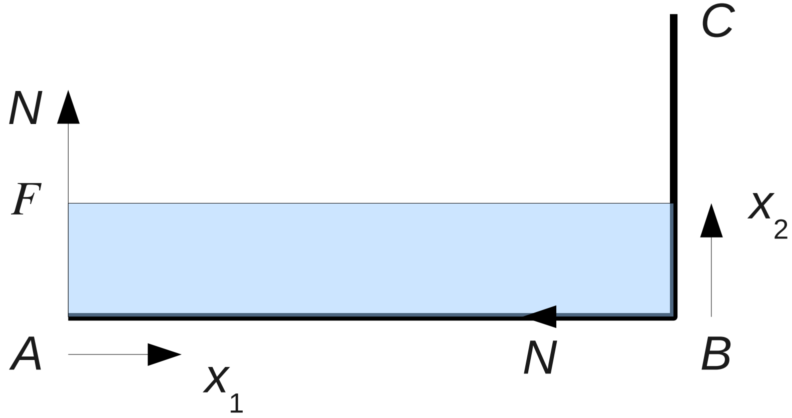
1.3 Beispiele

- Balkensystem:
  - Gegeben:
    - $a = 500mm$
    - $E = 210000MPa$
    - $A = 480mm^2$
    - $I_y = 4 \cdot 10^6 mm^4$
    - $F = 10kN$
  - Gesucht:
    - Formänderungsenergie
    - Horizontalverschiebung des Lastangriffspunkts

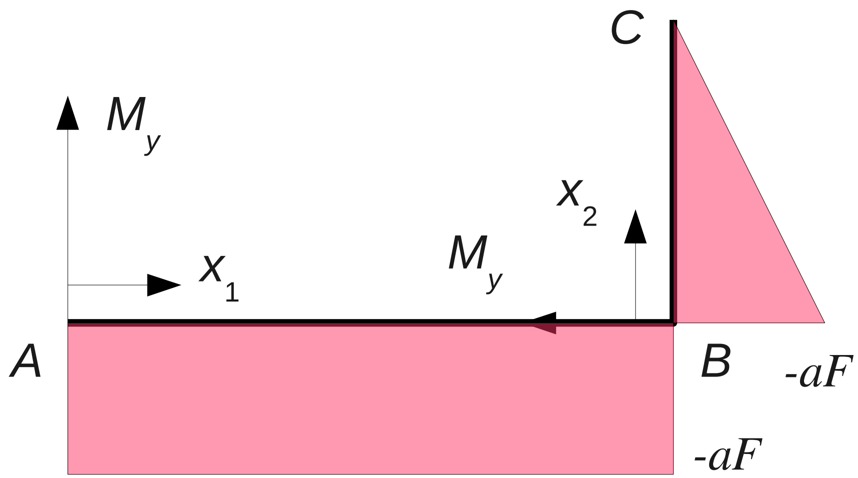


1.3 Beispiele

- Schnittlasten:
  - Normalkraft



- Biegemoment



Balken AB: $N(x_1)=F$

Balken BC: $N(x_2)=0$

Balken AB: $M_y(x_1)=-aF$

Balken BC: $M_y(x_2)=-aF\left(1-\frac{x_2}{a}\right)$

1.3 Beispiele

- Formänderungsenergie:

$$E^F = \frac{1}{2}\frac{N^2 \cdot 2a}{EA} + \frac{1}{2}\int_A^B \frac{M_y^2}{EI_y}dx + \frac{1}{2}\int_B^C \frac{M_y^2}{EI_y}dx$$

  - Die Berechnung der Integrale erfolgt am einfachsten mit Hilfe einer Koppeltafel:

$$\int_A^B \frac{M_y^2}{EI_y}dx = \frac{2a^3F^2}{EI_y}, \quad \int_B^C \frac{M_y^2}{EI_y}dx = \frac{1}{3}\frac{a^3F^2}{EI_y}$$

  - Ergebnis:

$$E^F = \frac{F^2 a}{2E}\left(\frac{2}{A} + 2\frac{a^2}{I_y} + \frac{1}{3}\frac{a^2}{I_y}\right) = \frac{F^2 a^3}{EI_y}\left(\frac{7}{6} + \frac{I_y}{Aa^2}\right) = \frac{F^2 a^3}{EI_y}\left(\frac{7}{6} + \frac{i_y^2}{a^2}\right)$$

  - Dabei ist $i_y^2 = I_y / A$ der Trägheitsradius.

1.3 Beispiele

- Horizontalverschiebung des Lastangriffspunkts:
  - Aus $W = E^F$ folgt: $u\,F = 2\,E^F \;\rightarrow\; u = \dfrac{2\,F\,a^3}{E\,I_y}\left(\dfrac{7}{6} + \dfrac{i_y^2}{a^2}\right)$
  - Zahlenwert: $i_y^2 = \dfrac{4\cdot 10^6\,mm^4}{480\,mm^2} = \dfrac{10\cdot 50^2}{3}\,mm^2\,,\quad \dfrac{i_y^2}{a^2} = \dfrac{10\cdot 50^2}{3\cdot 50^2\cdot 10^2} = \dfrac{1}{30}$

$$u = \frac{2\cdot 10000\,N\cdot 500^3\,mm^3}{210000\,N/mm^2\cdot 4\cdot 10^6\,mm^4}\cdot\left(\frac{7}{6} + \frac{1}{30}\right) = \underline{3{,}571\,mm}$$

  - Der Beitrag der Normalkraft ist vernachlässigbar klein.