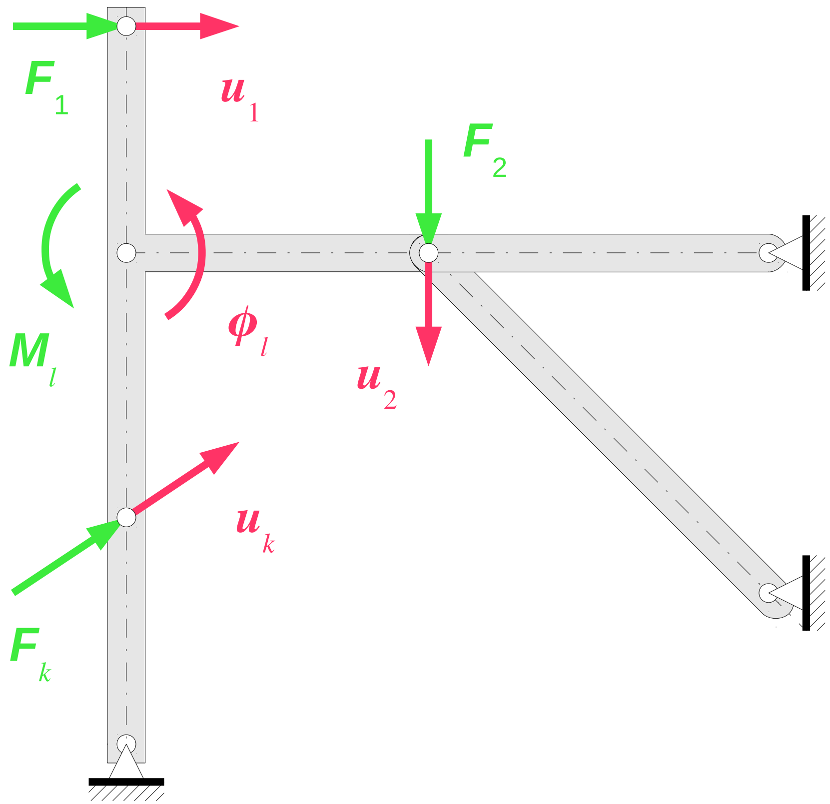
2. Sätze von Castigliano und Menabrea

- Aus der Gleichheit von äußerer Arbeit und Formänderungsenergie kann die Verschiebung am Lastangriffspunkt berechnet werden, wenn an der Struktur nur eine Last angreift.
- Die Sätze von Castigliano sind eine Erweiterung auf Strukturen, an denen mehrere Lasten angreifen.

2. Sätze von Castigliano und Menabrea

2.1 Grundlagen

- Betrachtet wird ein elastischer Körper, an dem Kräfte und Momente angreifen:
  - Für die Verschiebungen bzw. Verdrehungen wird der gleiche Richtungssinn gewählt wie für die Kräfte bzw. Momente.



2.1 Grundlagen

- Der erste Satz von Castigliano:
  - Die Arbeit von Kräften und Momenten ist definiert durch das Differenzial
    $$dW = \sum_k F_k \, du_k + \sum_l M_l \, d\phi_l$$
  - Bei einem elastischen Körper ist die Arbeit unabhängig davon, wie die Lasten aufgebracht werden. Sie definiert eine potenzielle Energie.
  - Aus $W = E^F = E^F(u_k, \phi_l)$

    folgt:
    $$dW = dE^F = \sum_k \frac{\partial E^F}{\partial u_k} du_k + \sum_l \frac{\partial E^F}{\partial \phi_l} d\phi_l$$

2.1 Grundlagen

- Daraus folgt der erste Satz von Castigliano:

$$\boxed{F_k = \frac{\partial E^F}{\partial u_k}, \quad M_l = \frac{\partial E^F}{\partial \Phi_l}}$$

- Mit dem ersten Satz von Castigliano lassen sich die Kräfte und Momente ermitteln, die nötig sind, um vorgegebene Verschiebungen und Verdrehungen zu verursachen.
- Dazu muss die Formänderungsenergie in Abhängigkeit der vorgegebenen kinematischen Größen aufgestellt werden.

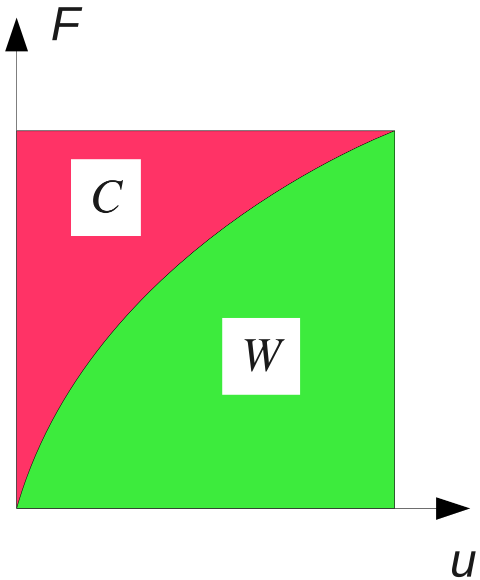
2.1 Grundlagen

- Der zweite Satz von Castigliano:
  - In der Praxis häufiger ist der Fall, dass die Verschiebungen und Verdrehungen für eine vorgegebene Belastung gesucht sind.
  - Es ist oft einfacher, die Formänderungsenergie in Abhängigkeit von den Lasten aufzustellen.
  - Um Gleichungen zu finden, die die kinematischen Größen in Abhängigkeit von den Lasten liefern, wird die *komplementäre Arbeit* eingeführt:

$$C = \sum_k F_k u_k + \sum_l M_l \phi_l - W$$

2.1 Grundlagen

- Veranschaulichung für ein System mit nur einer Kraft:



$$C = F\,u - W$$

- Das Differenzial der komplementären Arbeit berechnet sich zu

$$\begin{aligned} dC = &\sum_k \left(F_k\,du_k + u_k\,dF_k \right) \\ &+ \sum_l \left(M_l\,d\,\phi_l + \phi_l\,dM_l \right) \\ &- \sum_k F_k\,du_k - \sum_l M_l\,d\,\phi_l \\ = &\sum_k u_k\,dF_k + \sum_l \phi_l\,dM_l \end{aligned}$$

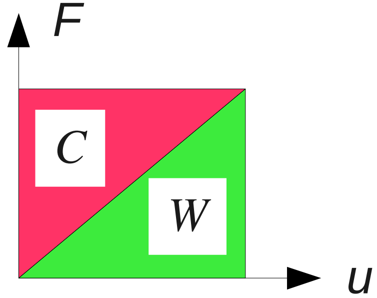
2.1 Grundlagen

- Daraus kann abgelesen werden:

$$u_k = \frac{\partial C}{\partial F_k}, \quad \phi_l = \frac{\partial C}{\partial M_l}$$

- Für eine linear-elastische Struktur gilt:

$$C = W = E^F$$



- Daraus folgt der zweite Satz von Castigliano:

$$\boxed{u_k = \frac{\partial E^F}{\partial F_k}, \quad \phi_l = \frac{\partial E^F}{\partial M_l}}$$

- Damit können die Verschiebungen in Lastrichtung berechnet werden, wenn die Formänderungsenergie in Abhängigkeit von den Lasten bekannt ist.

2.1 Grundlagen

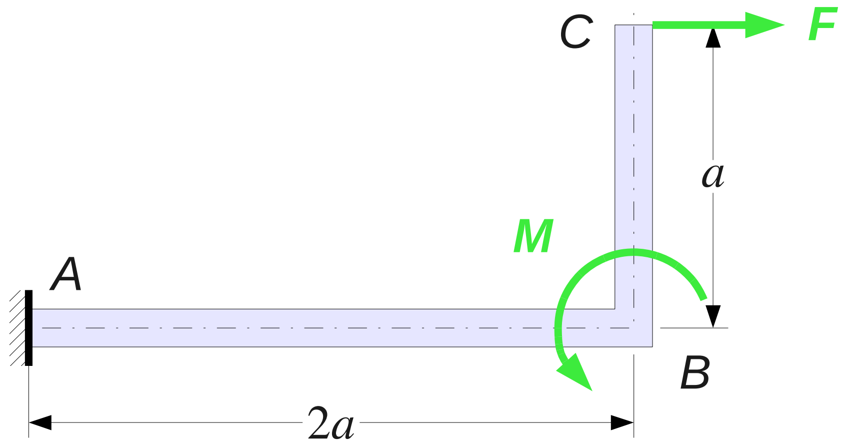
- Satz von Menabrea:
  - Mit dem Satz von Menabrea lassen sich Reaktionslasten für statisch unbestimmte Systeme ermitteln.
  - Dazu wird die Formänderungsenergie in Abhängigkeit aller an der freigeschnittenen Struktur angreifenden Lasten aufgestellt.
  - Da die Verschiebungen an den Lagern null sind, gilt für die Lagerkräfte und -momente:

$$0=\frac{\partial E^F}{\partial F_k}, \quad 0=\frac{\partial E^F}{\partial M_l}$$

  - Daraus können die Reaktionslasten berechnet werden.

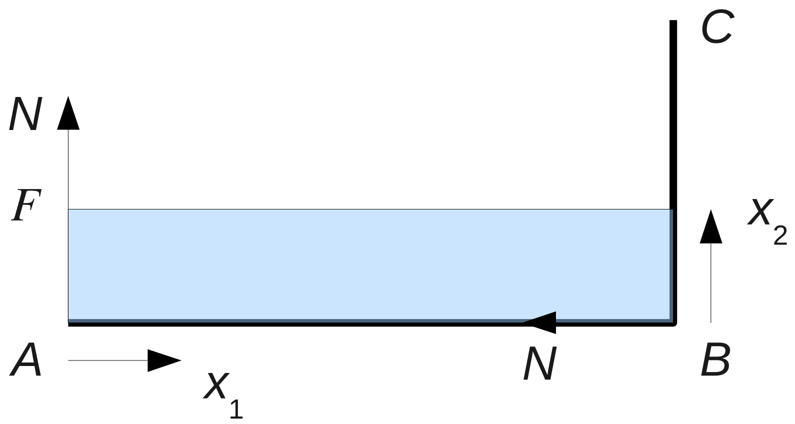
2.2 Beispiele

- Balkensystem:
  - Gegeben:
    - $a = 500mm$
    - $E = 210000MPa$
    - $A = 480mm^2$
    - $I_y = 4 \cdot 10^6 mm^4$
    - $F = 10kN,\ M = 10kNm$
  - Gesucht:
    - Verschiebung u_C und Verdrehung ϕ_B



2.2 Beispiele

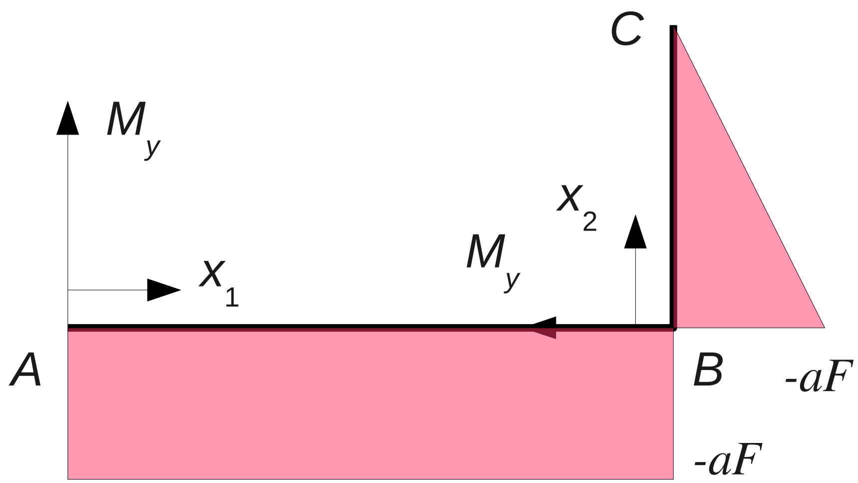
- Schnittlasten für Kraft F:
  - Normalkraft



Balken AB: $N_1(x_1) = F$

Balken BC: $N_1(x_2) = 0$

- Biegemoment



Balken AB: $M_{y1}(x_1) = -a\,F$

Balken BC: $M_{y1}(x_2) = -a\,F\left(1 - \dfrac{x_2}{a}\right)$

2.2 Beispiele

- Schnittlasten für Moment M:
  - Die Normalkraft ist null: $N_2 = 0$
  - Im Balken *AB* ist das Biegemoment konstant: $M_{y2} = M$
  - Im Balken *BC* ist das Biegemoment null: $M_{y2} = 0$
- Formänderungsenergie:

$$E^F = \frac{1}{2}\frac{2aN_1^2}{EA} + \frac{1}{2}\int_A^B \frac{\left(M_{y1} + M_{y2}\right)^2}{EI_y}dx + \frac{1}{2}\int_B^C \frac{M_{y1}^2}{EI_y}dx$$

  - Berechnung der Integrale mit Hilfe einer Koppeltafel:

$$\int_A^B \left(M_{y1} + M_{y2}\right)^2 dx = \int_A^B M_{y1}^2 dx + 2\int_A^B M_{y1} M_{y2} dx + \int_A^B M_{y2}^2 dx$$

2.2 Beispiele

$$\int_A^B M_{y1}^2\,dx = a^2 F^2 \cdot 2a = 2a^3 F^2, \quad \int_A^B M_{y2}^2\,dx = 2aM^2$$

$$\int_A^B M_{y1} M_{y2}\,dx = -aF \cdot M \cdot 2a = -2a^2 FM, \quad \int_B^C M_{y1}^2\,dx = \frac{1}{3}a^3 F^2$$

- Ergebnis:

$$E^F = \frac{aF^2}{EA} + \frac{1}{EI_y}\left(a^3 F^2 + aM^2 - 2a^2 FM + \frac{1}{6}a^3 F^2\right)$$

$$= \frac{a^3 F^2}{EI_y}\left(\frac{7}{6} + \frac{i_y^2}{a^2}\right) - \frac{2a^2 FM}{EI_y} + \frac{aM^2}{EI_y} \quad \text{mit} \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A}$$

2.2 Beispiele

- Verschiebungen:

$$u=\frac{\partial E^F}{\partial F}=\frac{2a^3F}{EI_y}\left(\frac{7}{6}+\frac{i_y^2}{a^2}\right)-\frac{2a^2M}{EI_y},\quad \phi=\frac{\partial E^F}{\partial M}=\frac{2a\left(M-aF\right)}{EI_y}$$

  - Zahlenwerte:

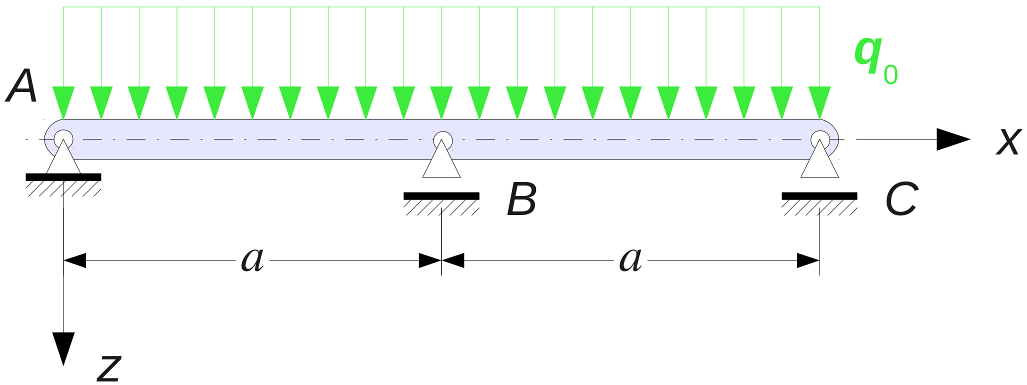
$$u=\frac{2\cdot 500^3\,mm^3\cdot 10^4\,N}{2{,}1\cdot 10^5\,N/mm^2\cdot 4\cdot 10^6\,mm^4}\left(\frac{7}{6}+\frac{1}{30}\right)$$

$$-\frac{2\cdot 500^2\,mm^2\cdot 10^7\,Nmm}{2{,}1\cdot 10^5\,N/mm^2\cdot 4\cdot 10^6\,mm^4}=\left(3{,}571-5{,}952\right)=\underline{-2{,}381\,mm}$$

$$\phi=\frac{2\cdot 500\,mm\cdot\left(10^7\,Nmm-500\,m\cdot 10^4\,N\right)}{210000\,N/mm^2\cdot 4\cdot 10^6\,mm^2}=\underline{5{,}952\cdot 10^{-3}}$$

2.2 Beispiele

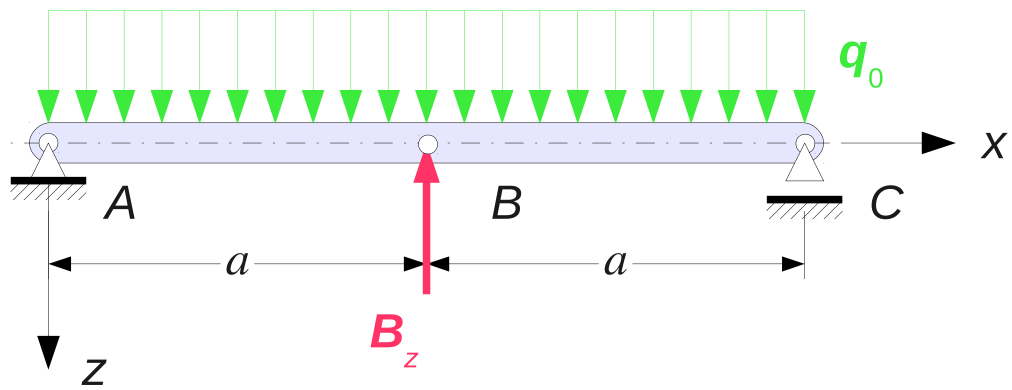
- Statisch unbestimmt gelagerter Balken:
  - Gegeben:
    - a
    - q_0
    - E
    - I_y



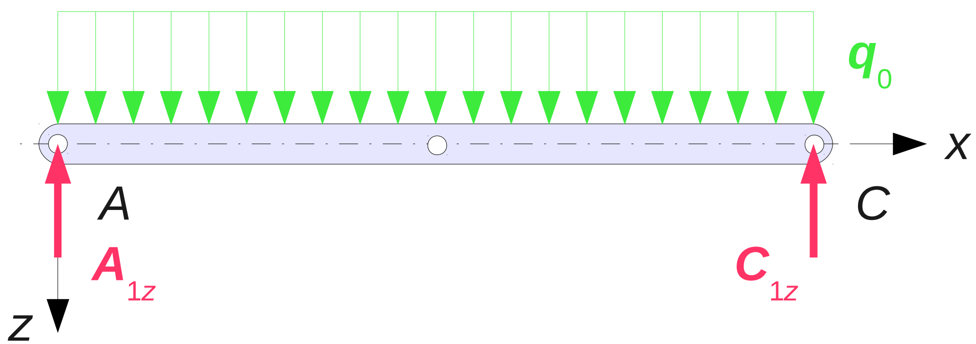
  - Gesucht:
    - Kräfte in den Lagern *A*, *B* und *C*

2.2 Beispiele

- Statisch bestimmtes Grundsystem:



- Lastfall 1: Streckenlast



2.2 Beispiele

- Lagerkräfte:

$$\sum M^A = 0 \;:\; 2a\,C_{1z} - a \cdot 2a\,q_0 = 0 \;\rightarrow\; C_{1z} = q_0\,a$$

$$\sum M^C = 0 \;:\; a \cdot 2a\,q_0 - 2a\,A_{1z} = 0 \;\rightarrow\; A_{1z} = q_0\,a$$

- Biegemoment:

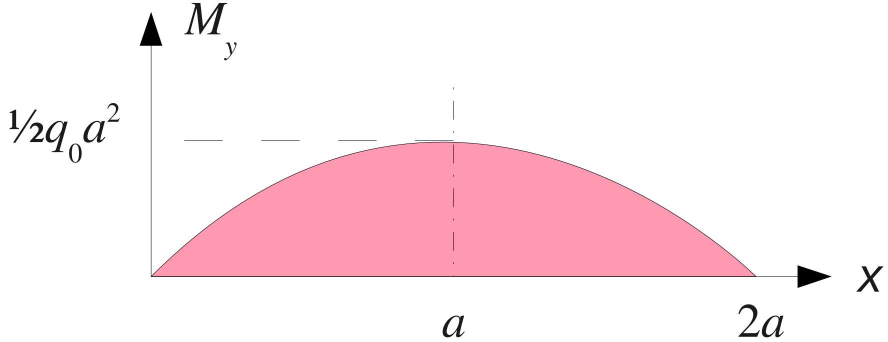
$$\frac{d^2 M_{y1}}{dx^2} = -q_0 \;:\; M_{y1}(x) = -\frac{1}{2} q_0 x^2 + c_1 x + c_2$$

$$M_{y1}(0) = 0 \;:\; c_2 = 0$$

$$M_{y1}(2a) = 0 \;:\; -\frac{1}{2} q_0 (2a)^2 + c_1 (2a) = 0 \;\rightarrow\; c_1 = q_0\,a$$

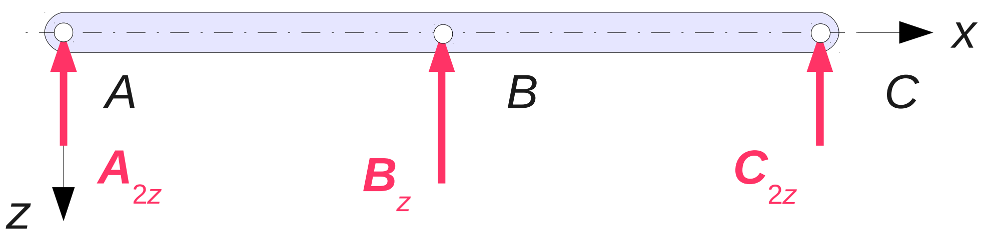
$$M_{y1}(x) = q_0 a^2 \left[\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]$$

$$M_{y1}(a) = \frac{1}{2} q_0 a^2$$



2.2 Beispiele

- Lastfall 2: Einzelkraft



- Lagerkräfte:

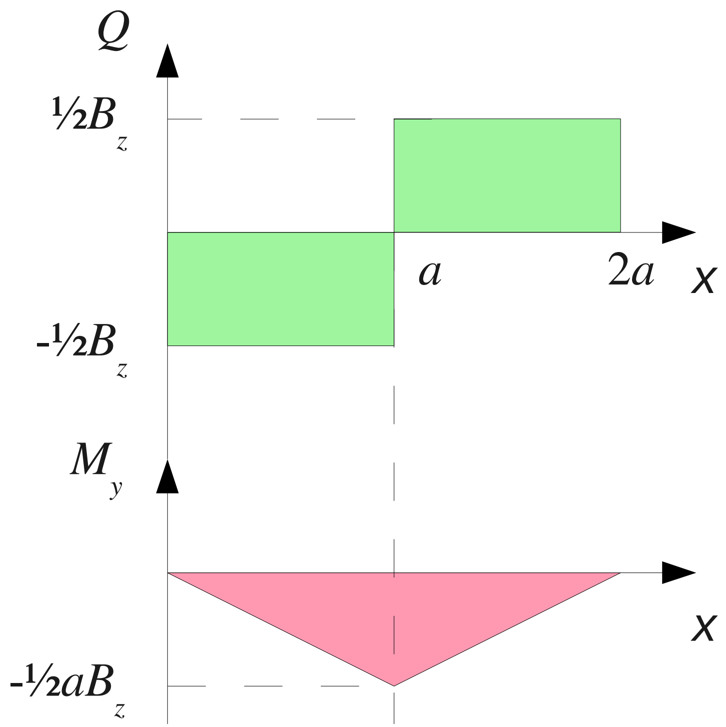
$$\sum M^A = 0 \;:\; a\,B_z + 2\,C_{2z} = 0$$

$$\rightarrow\; C_{2z} = -\frac{1}{2} B_z$$

$$\sum M^C = 0 \;:\; -a\,B_z - 2\,A_{2z} = 0$$

$$\rightarrow\; A_{2z} = -\frac{1}{2} B_z$$

- Schnittlasten:



2.2 Beispiele

- Formänderungsenergie:

$$E^F = \frac{1}{2}\int_0^{2a} \frac{\left(M_{y1}+M_{y2}\right)^2}{E I_y}\,dx$$

$$= \frac{1}{2 E I_y}\left(\int_a^{2a} M_{y1}^2\,dx + 2\int_0^{2a} M_{y1} M_{y2}\,dx + \int_0^{2a} M_{y2}^2\,dx\right)$$

- Berechnung der Integrale:

$$\int_0^{2a} M_{y1}^2\,dx = q_0^2 a^4 \int_0^{2a}\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^2 dx = q_0^2 a^5 \int_0^{2}\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)\right)^2 d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{4}{15} q_0^2 a^5$$

2.2 Beispiele

$$\int_0^{2a} M_{y1} M_{y2}\, dx = 2\int_0^{a} M_{y1} M_{y2}\, dx = -2\cdot\frac{5}{12}a\cdot\frac{1}{2}q_0 a^2\cdot\frac{1}{2}a B_z$$

$$= -\frac{5}{24} q_0 a^4 B_z$$

$$\int_0^{2a} M_{y2}^2\, dx = 2\int_0^{a} M_{y2}^2\, dx = \frac{2}{3}a\left(\frac{1}{2}a B_z\right)^2 = \frac{1}{6}a^3 B_z^2$$

- Ergebnis:

$$E^F = \frac{1}{2 E I_y}\left(\frac{4}{15}q_0^2 a^5 - \frac{5}{12} q_0 a^4 B_z + \frac{1}{6} a^3 B_z^2\right)$$

2.2 Beispiele

- Lagerkräfte:
  - Die Kraft B_z berechnet sich aus

$$0=\frac{\partial E^F}{\partial B_z}=\frac{1}{2EI_y}\left(-\frac{5}{12}q_0a^4+\frac{1}{3}a^3B_z\right)$$

zu $B_z=\frac{5}{4}q_0a$.

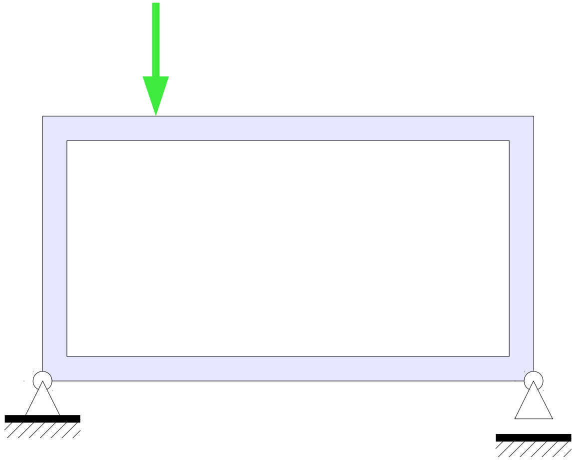
  - Für die übrigen Kräfte folgt:

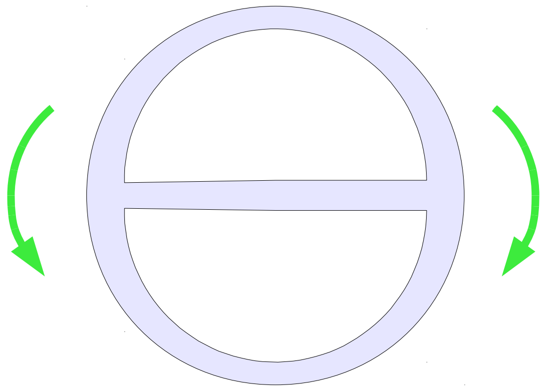
$$A_z=A_{1z}+A_{2z}=q_0a-\frac{5}{8}q_0a=\frac{3}{8}q_0a$$

$$C_z=C_{1z}+C_{2z}=q_0a-\frac{5}{8}q_0a=\frac{3}{8}q_0a$$

2.3 Rahmen

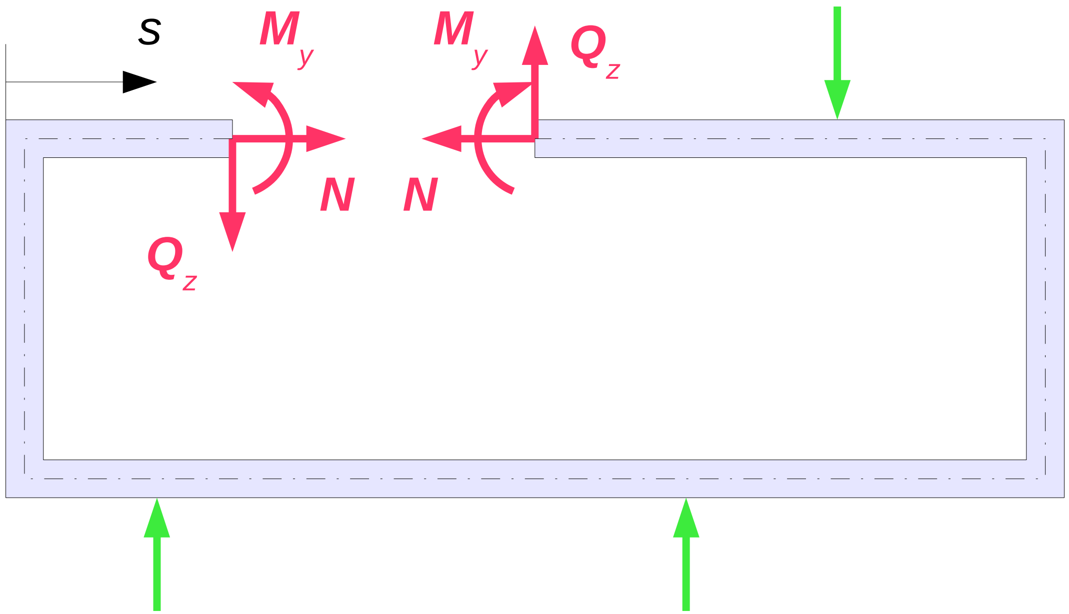
- Problem:
  - Bei geschlossenen Rahmen können die Schnittlasten nicht aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden.
  - Geschlossene Rahmen sind statisch unbestimmt.
  - Beispiele:





2.3 Rahmen

- Lösung:
  - Zur Ermittlung der Schnittlasten wird der Rahmen an einer beliebigen Stelle geschnitten:



2.3 Rahmen

- Nun kann die Formänderungsenergie in Abhängigkeit von den noch unbekannten Schnittlasten ermittelt werden.
- Die Schnittlasten an den beiden Schnittufern sind gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet.
- Die Verschiebungen und die Verdrehung sind an beiden Schnittufern gleich.
- Daher ist die äußere Arbeit der Schnittlasten null.
- Daraus folgt: $$\frac{\partial E^F}{\partial N}=0,\quad \frac{\partial E^F}{\partial Q_z}=0,\quad \frac{\partial E^F}{\partial M_y}=0$$
- Aus diesen drei Gleichungen können die drei Schnittlasten bestimmt werden.