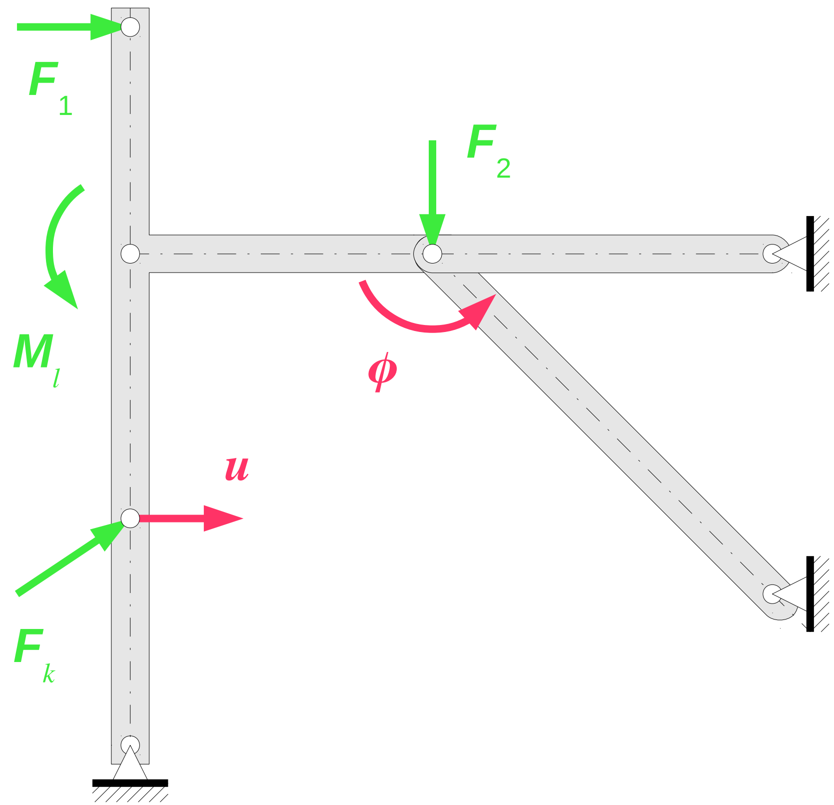
3. Prinzip der virtuellen Arbeit

- Mit dem Satz von Castigliano können Verschiebungen für Freiheitsgrade berechnet werden, an denen Lasten angreifen.
- Dabei werden nicht immer alle Terme der Formänderungsenergie benötigt.
- Durch eine einfache Erweiterung können Verschiebungen an beliebigen Stellen und in beliebiger Richtung ermittelt werden.
- Das erweiterte Verfahren wird so formalisiert, dass nur die benötigten Ausdrücke berechnet werden.

3. Prinzip der virtuellen Arbeit

3.1 Virtuelle Kräfte

- Mit Hilfe von virtuellen Kräften können Verschiebungen an beliebigen Freiheitsgraden berechnet werden.
- Aufgabenstellung:

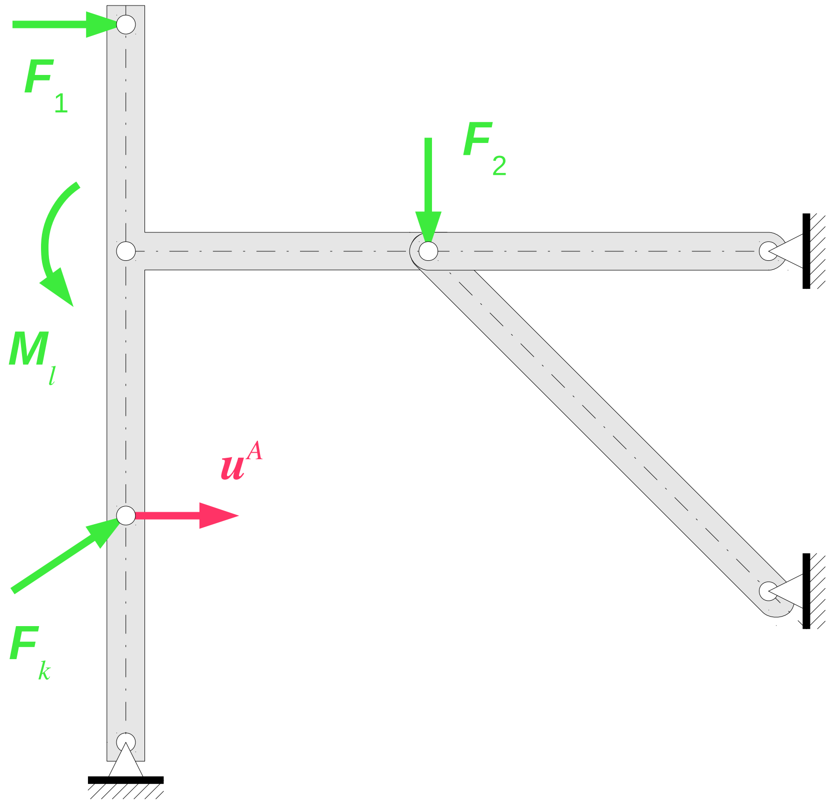


3.1 Virtuelle Kräfte

- Die am Körper angreifenden Lasten sowie die zugehörigen Spannungen im Körper werden als bekannt vorausgesetzt.
- Gesucht sind die Verschiebungen oder Verdrehungen an Punkten, an denen keine Lasten angreifen.
- Die Lösung kann durch Superposition gefunden werden.

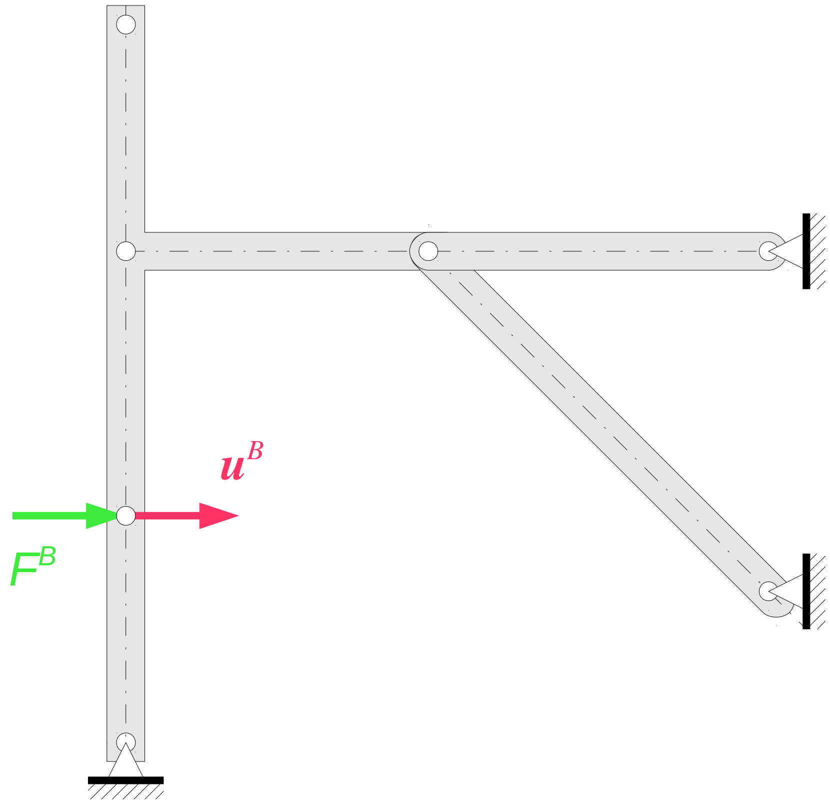
3.1 Virtuelle Kräfte

- Lastfall *A*:
  - Am Körper greifen die gegebenen Kräfte und Momente an.
  - Sie verursachen die gesuchte Verschiebung u^A.



3.1 Virtuelle Kräfte

- Lastfall *B*:
  - An dem Punkt, an dem die Verschiebung gesucht wird, wird eine fiktive Kraft F^B in Richtung der gesuchten Verschiebung aufgebracht.
  - Die fiktive Kraft wird als *virtuelle Kraft* bezeichnet.
  - Sie verursacht die Verschiebung u^B.



3.1 Virtuelle Kräfte

- Überlagerung:
  - Die Verschiebungen für Lastfall *B* und für den überlagerten Lastfall können mit dem zweiten Satz von Castigliano berechnet werden:

$$u^B = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial F^B} \int_V \left\{ \boldsymbol{\sigma}^B \right\}^T \left\{ \boldsymbol{\epsilon}^B \right\} dV$$

$$u^A + u^B = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial F^B} \int_V \left\{ \boldsymbol{\sigma}^A + \boldsymbol{\sigma}^B \right\}^T \left\{ \boldsymbol{\epsilon}^A + \boldsymbol{\epsilon}^B \right\} dV$$

  - Dabei sind $\boldsymbol{\sigma}^A$ und $\boldsymbol{\varepsilon}^A$ die Spannungen bzw. die Verzerrungen für Lastfall *A* und $\boldsymbol{\sigma}^B$ und $\boldsymbol{\varepsilon}^B$ für Lastfall *B*.

3.1 Virtuelle Kräfte

- Ausrechnen ergibt:

$$u^A = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial F^B}\left(\int_V \{\boldsymbol{\sigma}^A\}^T\{\boldsymbol{\epsilon}^A\}\,dV + \int_V \left(\{\boldsymbol{\sigma}^A\}^T\{\boldsymbol{\epsilon}^B\} + \{\boldsymbol{\sigma}^B\}^T\{\boldsymbol{\epsilon}^A\}\right)dV\right)$$

- Das erste Integral hängt nicht von F^B ab. Seine partielle Ableitung nach F^B ist daher null.
- Mit

$$\{\boldsymbol{\sigma}^B\}^T\{\boldsymbol{\epsilon}^A\} = \{\boldsymbol{\epsilon}^B\}^T\{\boldsymbol{E}\}\{\boldsymbol{\epsilon}^A\} = \{\boldsymbol{\epsilon}^B\}^T\{\boldsymbol{\sigma}^A\} = \{\boldsymbol{\sigma}^A\}^T\{\boldsymbol{\epsilon}^B\}$$

folgt für das zweite Integral:

$$\int_V \left(\{\boldsymbol{\sigma}^A\}^T\{\boldsymbol{\epsilon}^B\} + \{\boldsymbol{\sigma}^B\}^T\{\boldsymbol{\epsilon}^A\}\right)dV = 2\int_V \{\boldsymbol{\sigma}^A\}^T\{\boldsymbol{\epsilon}^B\}\,dV$$

3.1 Virtuelle Kräfte

- Da $\boldsymbol{\sigma}^A$ nicht von F^B abhängt, gilt: $$u^A = \int_V \left\{ \boldsymbol{\sigma}^A \right\}^T \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}^B}{\partial F^B} \right\} dV$$
- Da die Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}^B$ linear von F^B abhängen, gilt für die Ableitung:
$$\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}^B}{\partial F^B} = \frac{1}{F^B} \boldsymbol{\epsilon}^B$$
- Damit ist gezeigt:
$$\boxed{u^A = \frac{1}{F^B} \int_V \left\{ \boldsymbol{\sigma}^A \right\}^T \left\{ \boldsymbol{\epsilon}^B \right\} dV}$$

3.1 Virtuelle Kräfte

- Da für das praktische Rechnen oft $F^B = 1$ verwendet wird, wird diese Gleichung auch als *Einheitslastgesetz* bezeichnet.
- Für Verdrehungen folgt entsprechend:

$$\boxed{\varphi^A = \frac{1}{M^B} \int_V \{\boldsymbol{\sigma}^A\}^T \{\boldsymbol{\epsilon}^B\} \, dV}$$

3.1 Virtuelle Kräfte

- Anwendung auf Balken:
  - Im Hauptachsensystem gilt:

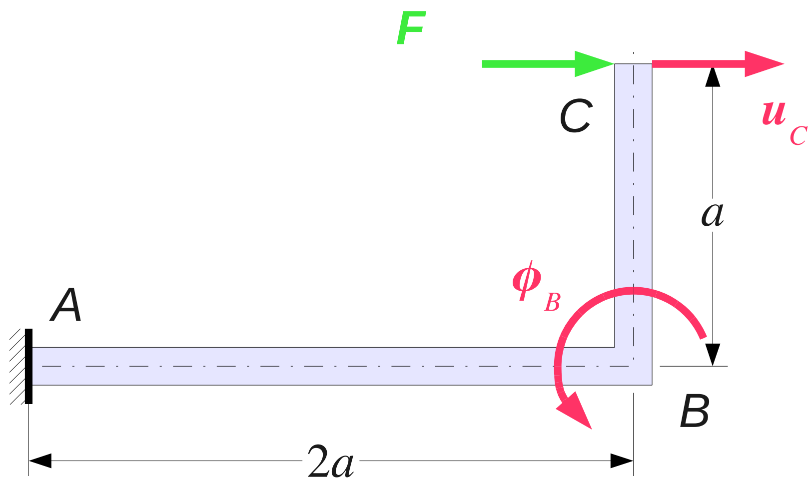
$$u^A = \frac{1}{F^B} \int_0^L \left(\frac{N^A N^B}{E A} + \frac{M_y^A M_y^B}{E I_y} + \frac{M_z^A M_z^B}{E I_z} + k_z \frac{Q_z^A Q_z^B}{G A} + k_y \frac{Q_y^A Q_y^B}{G A} + \frac{M_x^A M_x^B}{G I_T} \right) dx$$

$$\varphi^A = \frac{1}{M^B} \int_0^L \left(\frac{N^A N^B}{E A} + \frac{M_y^A M_y^B}{E I_y} + \frac{M_z^A M_z^B}{E I_z} + k_z \frac{Q_z^A Q_z^B}{G A} + k_y \frac{Q_y^A Q_y^B}{G A} + \frac{M_x^A M_x^B}{G I_T} \right) dx$$

  - Bei langen schlanken Balken ($L > 5h$) kann der Beitrag des Querkraftschubs vernachlässigt werden.

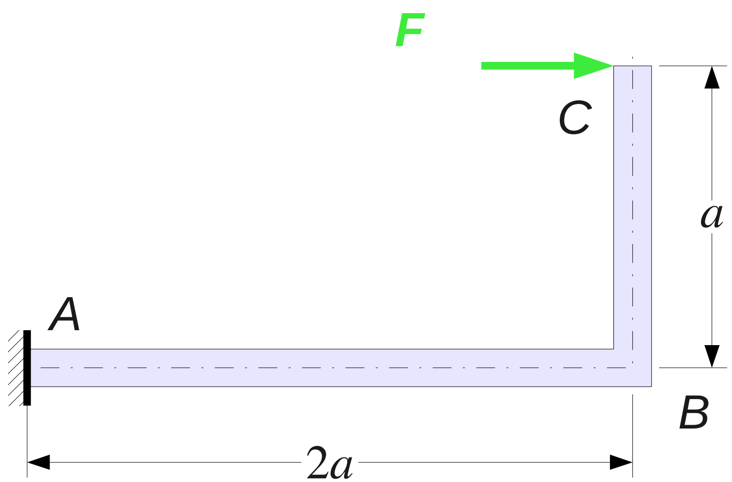
3.1 Virtuelle Kräfte

- Beispiel: Balkensystem
  - Gegeben:
    - $a = 500mm$
    - $E = 210000MPa$
    - $A = 480mm^2$
    - $I_y = 4 \cdot 10^6 mm^4$
    - $F = 10kN$
  - Gesucht:
    - Verschiebung u_C und Verdrehung ϕ_B

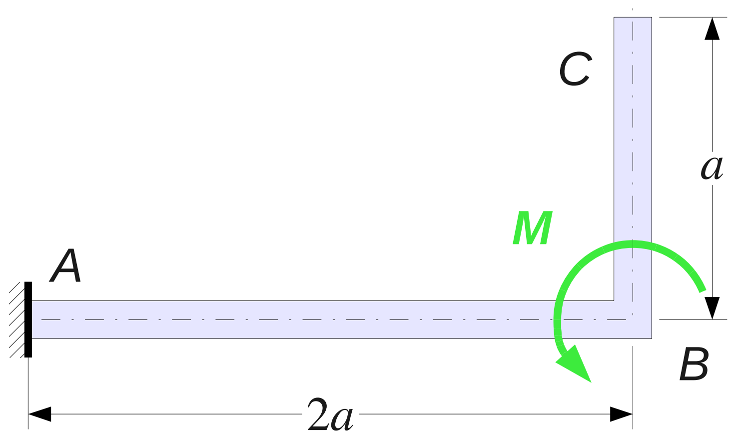


3.1 Virtuelle Kräfte

- Lastfall *A*:
  - Gegebene Kraft

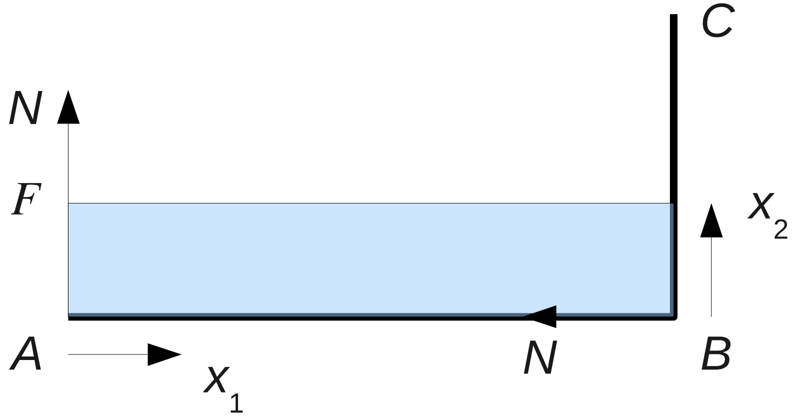


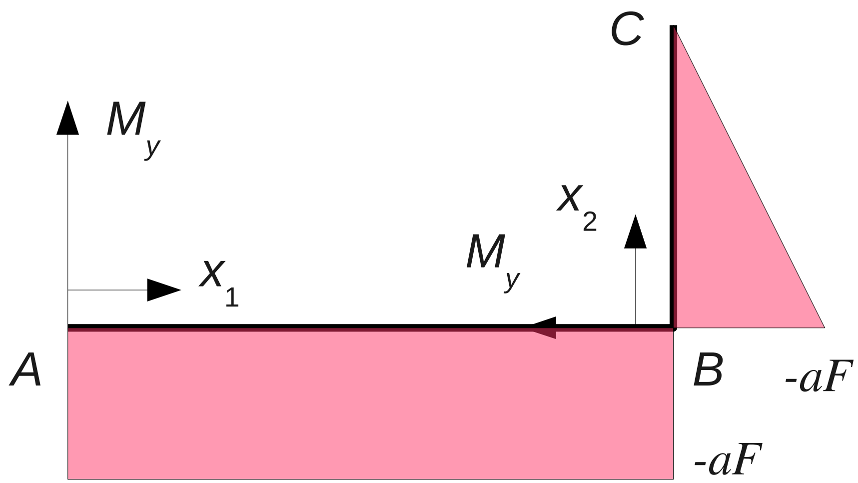
- Lastfall *B*:
  - Fiktives Moment



3.1 Virtuelle Kräfte

- Lastfall *A*:
  - Normalkraft
  - Biegemoment





Balken *AB*: $N^A(x_1) = F$

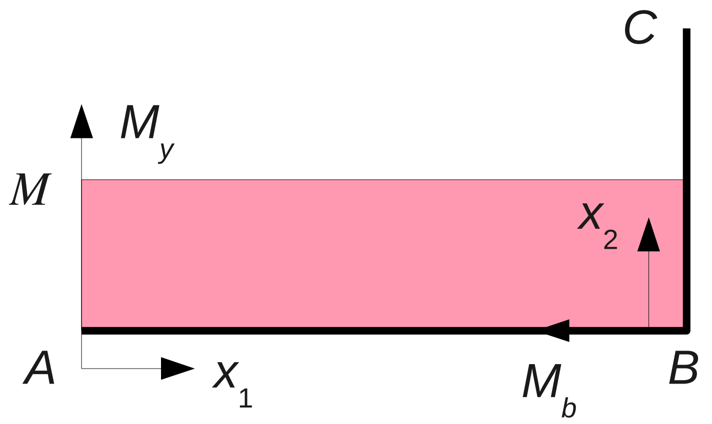
Balken *BC*: $N^A(x_2) = 0$

Balken *AB*: $M_y^A(x_1) = -a\,F$

Balken *BC*: $M_y^A(x_2) = -a\,F\left(1 - \dfrac{x_2}{a}\right)$

3.1 Virtuelle Kräfte

- Lastfall *B*:
  - Normalkraft: $N^B = 0$
  - Biegemoment:



Balken *AB*: $M_y^B = M$

Balken *BC*: $M_y^B = 0$

- Verschiebung u_C:
  - Der zur Berechnung von u_C erforderliche Lastfall *B* entspricht dem Lastfall *A*.
  - Es gilt:

$$u_C = \frac{1}{F} \frac{2a(N^A)^2}{EA} + \frac{1}{F} \int_A^B \frac{(M_y^A)^2}{EI_y} dx + \frac{1}{F} \int_B^C \frac{(M_y^A)^2}{EI_y} dx$$

3.1 Virtuelle Kräfte

- Ausrechnen ergibt:

$$u_C = \frac{1}{F}\frac{2aF^2}{EA} + \frac{1}{F}\frac{2a(aF)^2}{EI_y} + \frac{1}{F}\frac{a(aF)^2}{3EI_y} = \frac{a^3F}{EI_y}\left(\frac{7}{3} + \frac{2I_y}{Aa^2}\right)$$

– Verdrehung φ_B:

- Die Normalkraft liefert keinen Beitrag. Es bleibt:

$$\varphi_B = \frac{1}{M}\int_A^B \frac{M_y^A M_y^B}{EI_y}dx + \frac{1}{M}\int_B^C \frac{M_y^A M_y^B}{EI_y}dx = \frac{1}{M}\frac{2a(-aFM)}{EI_y} = -\frac{2a^2F}{EI_y}$$

- Das gleiche Ergebnis folgt auch aus der in Kapitel 2.2 gewonnenen Formel, wenn dort am Ende $M=0$ gesetzt wird.

3.1 Virtuelle Kräfte

- Zahlenwerte:

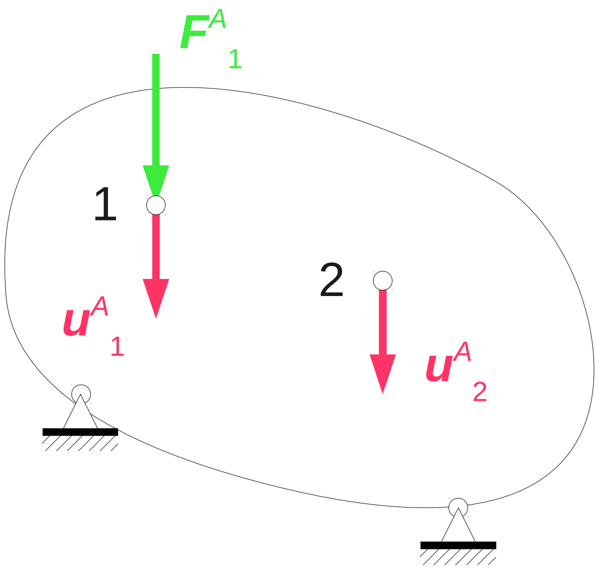
$$u_C = \frac{500^3\, mm^3 \cdot 10 \cdot 10^3\, N}{210000\, N/mm^2 \cdot 4 \cdot 10^6\, mm^4}\left(\frac{7}{3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^6\, mm^4}{480\, mm^2 \cdot 500^2\, mm^2}\right)$$

$$= 1{,}488\, mm \cdot \left(\frac{7}{3} + \frac{1}{15}\right) = \underline{3{,}571\, mm}$$

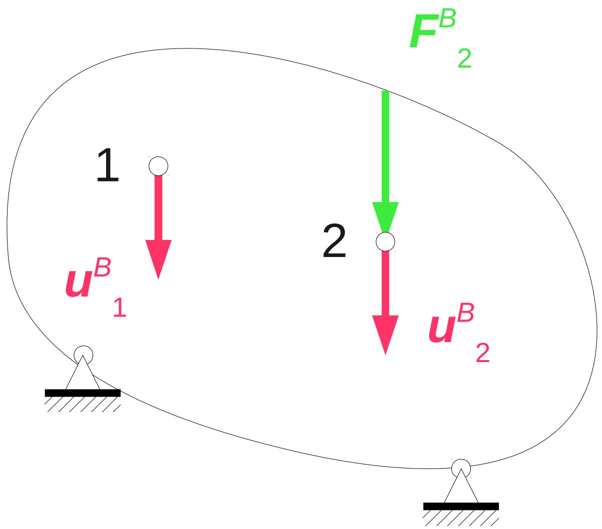
$$\varphi_B = -\frac{2 \cdot 500^2\, mm^2 \cdot 10^4\, N}{210000\, N/mm^2 \cdot 4 \cdot 10^6\, mm^4} = \underline{-5{,}952 \cdot 10^{-3}}$$

3.2 Reziprozitätsgesetz

- Herleitung:
  - Lastfall *A*:



  - Lastfall *B*:



3.2 Reziprozitätsgesetz

- Für die Verschiebung u^A_2 von Lastfall *A* gilt:

$$u_2^A F_2^B = \int_V \left\{ \boldsymbol{\sigma}^A \right\}^T \left\{ \boldsymbol{\epsilon}^B \right\} dV = \int_V \left\{ \boldsymbol{\epsilon}^A \right\}^T \left[\boldsymbol{E} \right] \left\{ \boldsymbol{\epsilon}^B \right\} dV$$

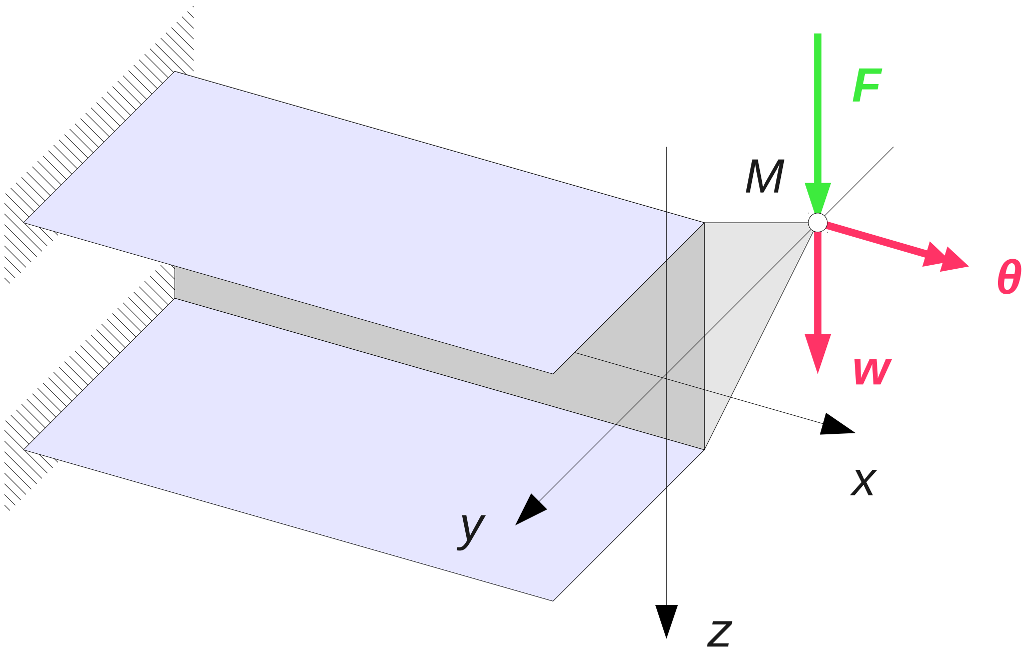
$$= \int_V \left\{ \boldsymbol{\epsilon}^A \right\}^T \left\{ \boldsymbol{\sigma}^B \right\} dV = \int_V \left\{ \boldsymbol{\sigma}^B \right\}^T \left\{ \boldsymbol{\epsilon}^A \right\} dV = u_1^B F_1^A$$

- Eine entsprechende Beziehung gilt zwischen Momenten und Verdrehungen.
- Das Ergebnis ist das *Reziprozitätsgesetz* von Maxwell und Betti:

$$\boxed{u_2^A F_2^B = u_1^B F_1^A, \quad \varphi_2^A M_2^B = \varphi_1^B M_1^A, \quad u_2^A F_2^B = \varphi_1^B M_1^A}$$

3.2 Reziprozitätsgesetz

- Beispiel: Schubmittelpunkt
  - Eine im Schubmittelpunkt *M* angreifende Kraft beansprucht einen Balken nur auf Biegung, nicht auf Torsion.



3.2 Reziprozitätsgesetz

- Verdrehung θ^A des Querschnitts infolge der Kraft F:
  - Lastfall *A*: Kraft F
  - Lastfall *B*: Fiktives Torsionsoment M_x^B
  - Einheitslastgesetz: $\theta^A = \frac{1}{M_x^B} \int_0^L \frac{M_x^A M_x^B}{G I_T} dx = 0$ wegen $M_x^A = 0$
- Verschiebung des Schubmittelpunkts *M* bei Belastung durch das Torsionsmoment M_x^B:
  - Reziprozitätsgesetz: $w^B F = \theta^A M_x^B = 0 \rightarrow w^B = 0$
  - Entsprechend folgt: $v^B = 0$

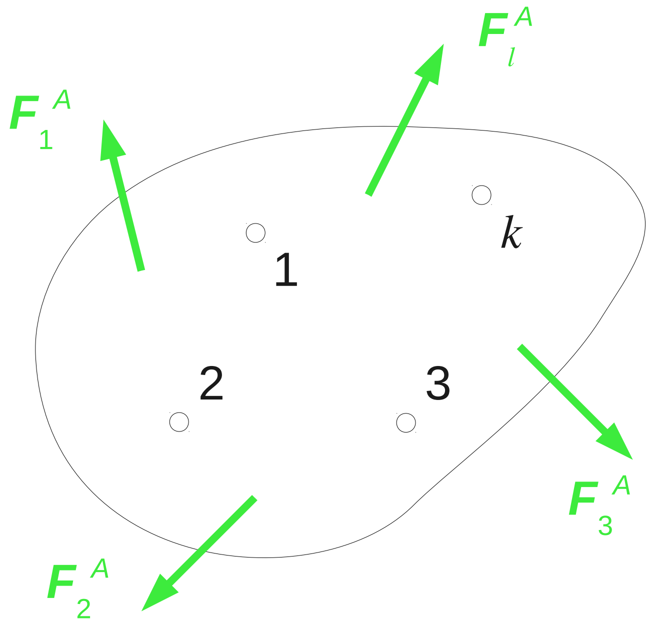
3.2 Reziprozitätsgesetz

- Ergebnis:
  - Wird ein Balken nur auf Torsion beansprucht, dann dreht sich sein Querschnitt um den Schubmittelpunkt.

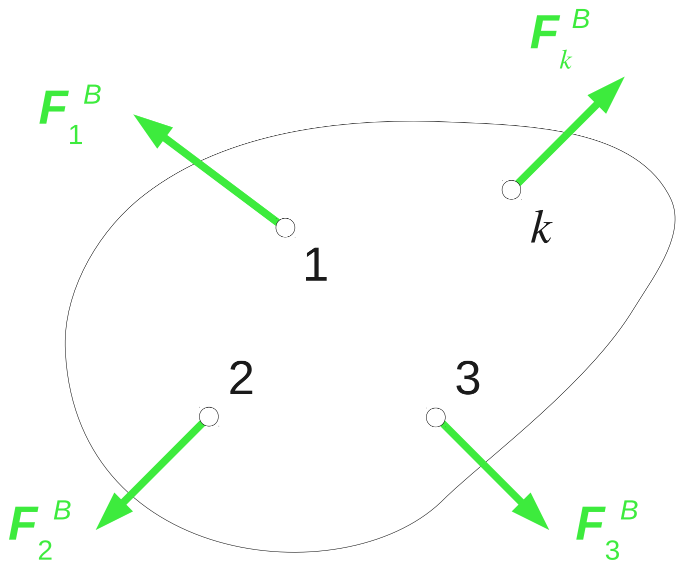
3.3 Prinzip der virtuellen Arbeit

- Ausgangspunkt:

Lastfall *A*:



Lastfall *B*:



3.3 Prinzip der virtuellen Arbeit

- Betrachtet werden zwei Lastfälle *A* und *B*.
- Mit $\boldsymbol{\sigma}^A$ werden die Spannungen für den Lastfall *A* bezeichnet.
- Mit $\boldsymbol{\varepsilon}^B$ werden die Verzerrungen für Lastfall *B* bezeichnet.
- Mit $\boldsymbol{\varepsilon}_k^B$ werden die Verzerrungen für den Lastfall bezeichnet, bei dem nur die Last F_k^B von Lastfall *B* wirkt, die am Punkt k angreift.
- Für die Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}^B$ gilt: $\boldsymbol{\epsilon}^{\boldsymbol{B}} = \sum_k \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{B}}$

3.3 Prinzip der virtuellen Arbeit

- Verschiebungen für Lastfall *A*:
  - Für jeden Punkt k gilt: $$u_k^A F_k^B = \int_V \{\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{A}}\}^T \{\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{B}}\} dV$$
  - Summation über alle Punkte ergibt:

$$\sum_k u_k^A F_k^B = \sum_k \int_V \{\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{A}}\}^T \{\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{B}}\} dV = \int_V \{\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{A}}\}^T \{\boldsymbol{\epsilon}^{\boldsymbol{B}}\} dV = \int_V \{\boldsymbol{\epsilon}^{\boldsymbol{A}}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{B}}\} dV$$

- Prinzip der virtuellen Arbeit:
  - Sei nun Lastfall *B* der tatsächliche Lastfall und Lastfall *A* ein beliebiger virtueller Lastfall.

3.3 Prinzip der virtuellen Arbeit

- Die zum Lastfall *A* gehörenden Verschiebungen sind virtuelle Verschiebungen. Virtuelle Verschiebungen können alle Verschiebungen sein, die die Lagerbedingungen erfüllen.
- Die virtuellen Verschiebungen werden im Folgenden mit $\underset{\sim}{\boldsymbol{u}}$ und die zugehörigen Verzerrungen mit $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ bezeichnet.
- Wird der obere Index *B* für den tatsächlichen Lastfall weggelassen und werden zusätzlich noch Momente berücksichtigt, dann gilt:

$$\sum_k \tilde{u}_k F_k + \sum_l \tilde{\varphi}_l M_l = \int_V \{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} \, dV$$

3.3 Prinzip der virtuellen Arbeit

- Gleichgewicht:
  - Wenn das Prinzip der virtuellen Arbeit für einen freigeschnittenen Körper betrachtet wird, dann sind als virtuelle Verschiebungen alle Starrkörperbewegungen möglich.
  - Da Starrkörperbewegungen v_R keine Verzerrungen verursachen, gilt:

$$\sum_k v_{Rk} F_k + \sum_l \varphi_{Rl} M_l = 0$$

  - Für Starrkörpertranslationen folgt daraus das Kräftegleichgewicht und für Starrkörperrotationen das Momentengleichgewicht.

3.3 Prinzip der virtuellen Arbeit

- Bei den Starrkörperrotationen ist zu beachten, dass im Rahmen der linearen Theorie die für kleine Winkel linearisierten Gleichungen zu verwenden sind.

- Verallgemeinerung:
  - Einzelkräfte und Momente sind als Resultierende von Oberflächenkräften und Volumenkräften zu verstehen.
  - Unter Verwendung von Oberflächenkräften und Volumenkräften lautet das Prinzip der virtuellen Arbeit:

$$\int_S [\tilde{\boldsymbol{u}}]^T [\boldsymbol{t}]\, dA + \int_V [\tilde{\boldsymbol{u}}]^T [\boldsymbol{f}]\, dV = \int_V \{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\}\, dV$$

3.3 Prinzip der virtuellen Arbeit

- Im Prinzip der virtuellen Arbeit sind die folgenden drei Bedingungen enthalten:
  - Globales Gleichgewicht:
    - Für den freigeschnittenen Körper ist das Kräftegleichgewicht und das Momentengleichgewicht erfüllt.
  - Lokales Gleichgewicht:
    - Für jedes infinitesimale Element des Körpers ist das Kräftegleichgewicht und das Momentengleichgewicht erfüllt.
  - Spannungsrandbedingungen:
    - Am Rand stimmt der Spannungsvektor mit den vorgegebenen Lasten überein.

3.3 Prinzip der virtuellen Arbeit

- Anmerkungen:
  - Mit etwas Höherer Mathematik (Partielle Integration, Integralsatz von Gauß) lässt sich das Prinzip der virtuellen Arbeit leicht aus den Spannungsdifferenzialgleichungen, den Randbedingungen und den kinematischen Beziehungen für die Verzerrungen herleiten. Die Herleitung ist unabhängig vom Materialgesetz.
  - Alle Energiemethoden können aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit gewonnen werden.
  - Das Prinzip der virtuellen Arbeit ist die Grundlage der Methode der finiten Elemente.