2. Methode der Randelemente

- Bei allgemeinen Schall abstrahlenden Flächen lässt sich der Schalldruck an einem beliebigen Punkt im Raum aus einem Integral über auf der Fläche definierte Funktionen berechnen.
- Die Funktionen auf der Fläche müssen eine Integralglei-chung erfüllen, die numerisch gelöst wird.
- Je nach Wahl der Funktionen auf der Fläche wird zwi-schen direkten und indirekten Methoden unterschieden.

2. Methode der Randelemente

2.1 Indirekte Methode

2.2 Direkte Methode

2.3 Bewertung

2.1 Indirekte Methode

- Fundamentallösung:
  - Die Funktion

$$P(r)=\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}$$

    ist eine Lösung der Helmholtz-Gleichung, die die Abstrahl-bedingung von Sommerfeld erfüllt.
  - Sie beschreibt das Schallfeld einer Punktquelle, die sich im Ursprung des Koordinatensystems befindet.
  - Befindet sich die Punktquelle im Punkt *P* mit den Koordinaten $\boldsymbol{y}$, so gilt für das Schallfeld:

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \quad \text{mit} \quad r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$$

2.1 Indirekte Methode

- Die Funktion $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ wird als Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung bezeichnet.

- Einfachschicht-Potenzial:
  - Da die Helmholtz-Gleichung linear ist, ist auch jede Linear-kombination

$$P(\boldsymbol{x}) = -\sum_k \sigma_k G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_k)$$

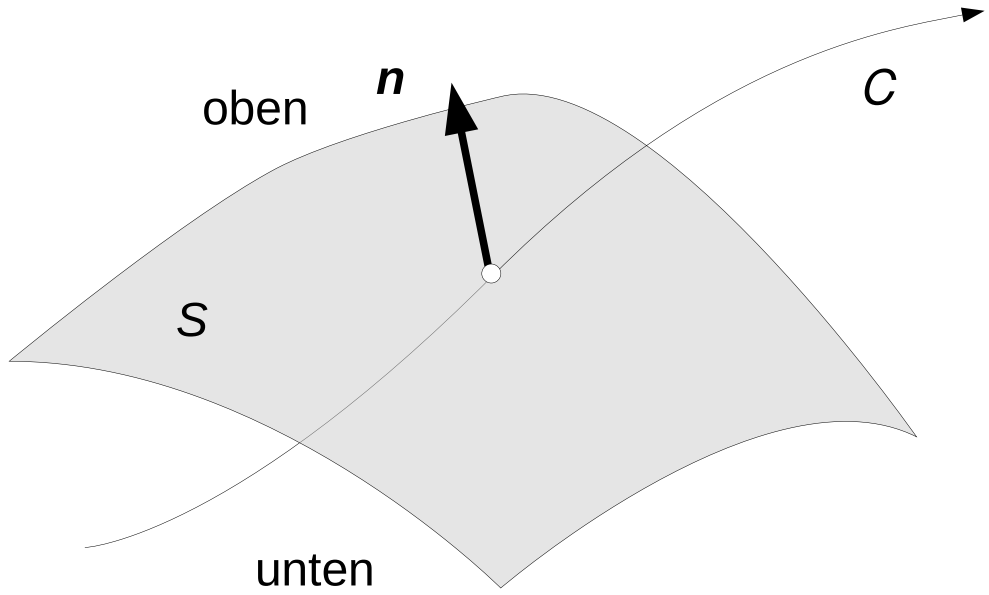
    eine Lösung der Helmholtz-Gleichung.
  - Der Grenzübergang auf unendlich viele infinitesimale Punktquellen, die auf einer Fläche *S* angeordnet sind, führt auf

$$P_1(\boldsymbol{x}) = -\int_S \sigma(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, dS_y$$

2.1 Indirekte Methode

- Für alle Werte von $\boldsymbol{x}$, die nicht auf der Fläche *S* liegen, ist $P_1(\boldsymbol{x})$ eine Lösung der Helmholtz-Gleichung, die als *Einfach-schicht-Potenzial* bezeichnet wird.

- Eigenschaften des Einfachschicht-Potenzials:



2.1 Indirekte Methode

- Entlang jeder Kurve *C*, die die Fläche *S* schneidet, ist $P_1(\boldsymbol{x})$ beim Durchgang durch die Fläche stetig.
- Die Ableitung in Richtung der Flächennormalen $\boldsymbol{n}$ macht beim Durchgang durch die Fläche einen Sprung.
- Ist P_1^o der Schalldruck oberhalb der Fläche und P_1^u der Schalldruck unterhalb, so gilt:

$$\frac{\partial P_1^o}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{\partial P_1^u}{\partial \boldsymbol{n}} = \sigma$$

- Für den Mittelwert der Ableitungen gilt:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_1^o}{\partial \boldsymbol{n}} + \frac{\partial P_1^u}{\partial \boldsymbol{n}}\right) = -\int_S \sigma(\boldsymbol{y}) \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}}} dS_y$$

2.1 Indirekte Methode

- Doppelschicht-Potenzial:
  - Da die Helmholtz-Gleichung linear ist, ist auch jede Richtungsableitung der Fundamentallösung eine Lösung.
  - Damit ist aber auch

$$P_2(\boldsymbol{x})=\int_S \mu(\boldsymbol{y})\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{y}}}dS_y$$

    eine Lösung der Helmholtz-Gleichung, solange $\boldsymbol{x}$ nicht auf *S* liegt.
  - Diese Lösung wird als *Doppelschicht-Potenzial* bezeichnet.

2.1 Indirekte Methode

- Eigenschaften des Doppelschicht-Potenzials:
  - Entlang jeder Kurve *C*, die die Fläche *S* schneidet, macht der Schalldruck beim Durchgang durch die Fläche einen Sprung, für den gilt:

$$P_2^o - P_2^u = \mu$$

  - Die Ableitung in Richtung der Flächennormalen ist stetig.
  - Für den Mittelwert des Schalldrucks gilt:

$$\frac{1}{2}\left(P_2^o + P_2^u\right) = \int_S \mu(\boldsymbol{y}) \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{y}}} dS_y$$

2.1 Indirekte Methode

- Randbedingungen:
  - Auf der Fläche S_p ist der Schalldruck vorgeschrieben:

$$P^o = P^u = P_S \rightarrow \mu = 0 \text{ auf } S_p$$

  - Auf der Fläche S_v ist die Schallschnelle vorgeschrieben:

$$\frac{\partial P^o}{\partial \boldsymbol{n}} = \frac{\partial P^u}{\partial \boldsymbol{n}} = -i\omega\rho_0 V_{Sn} \rightarrow \sigma = 0 \text{ auf } S_v$$

  - Für jeden Punkt, der nicht auf der Fläche liegt, gilt:

$$P(\boldsymbol{x}) = -\int_{S_p} \sigma(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, dS_y + \int_{S_v} \mu(\boldsymbol{y}) \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{y}}} \, dS_y$$

2.1 Indirekte Methode

- Wenn die Funktionen σ und μ bekannt sind, kann der Schalldruck an jedem Punkt im Raum berechnet werden.
- Liegt $\boldsymbol{x}$ auf S_p, so muss gelten:

$$P_S(\boldsymbol{x}) = -\int_{S_p} \sigma(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, dS_y + \int_{S_v} \mu(\boldsymbol{y}) \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{y}}} \, dS_y$$

- Liegt $\boldsymbol{x}$ auf S_v, so muss gelten:

$$-i\omega\rho_0 V_{Sn}(\boldsymbol{x}) = -\int_{S_p} \sigma(\boldsymbol{y}) \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}}} \, dS_y + \int_{S_v} \mu(\boldsymbol{y}) \frac{\partial^2 G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{y}}} \, dS_y$$

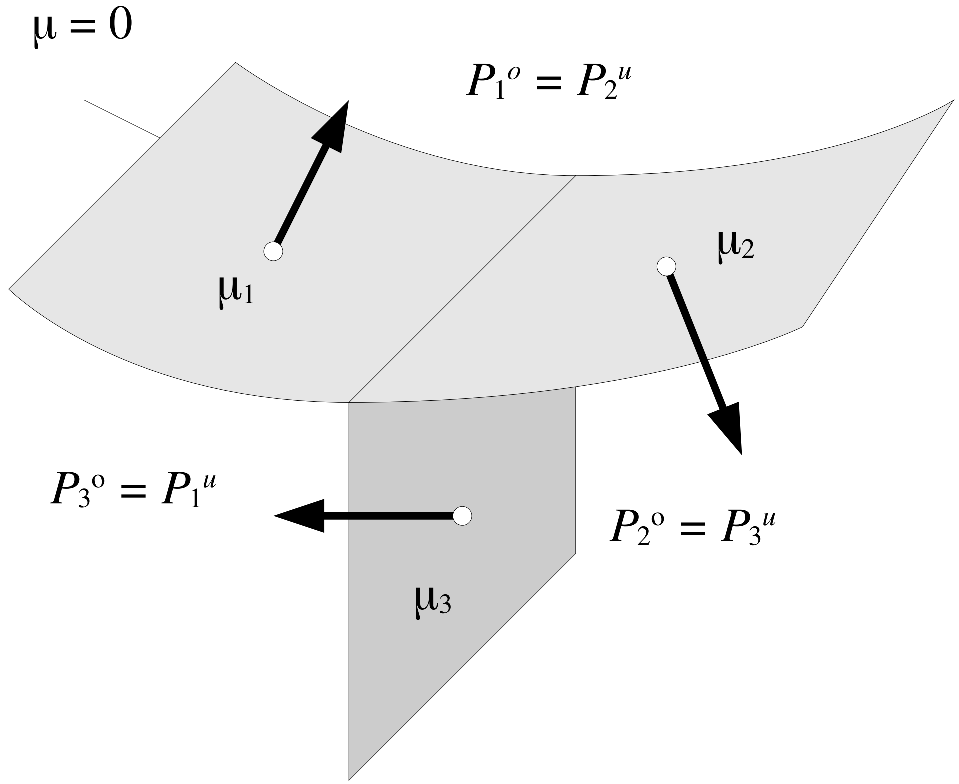
- Aus diesen beiden gekoppelten Integralgleichungen können die Funktionen σ und μ berechnet werden.

- Freie Ränder und Verzweigungen:
  - Freier Rand:

    $$P^o = P^u \rightarrow \mu = 0$$

  - Verzweigung:

    $$\mu_1 + \mu_2 + \mu_2$$
    $$= P_1^o - P_1^u + P_2^o - P_2^u + P_3^o - P_3^u$$
    $$= P_1^o - P_2^u + P_2^o - P_3^u + P_3^o - P_1^u$$
    $$= 0$$



2.1 Indirekte Methode

- Numerische Lösung des Integralgleichungssystems:
  - Die gekoppelten Integralgleichungen können mit einem Bubnow-Galerkin-Verfahren numerisch gelöst werden.
  - Schwache Formulierung der Integralgleichungen:

$$\int_{S_p} \tilde{\sigma}(\boldsymbol{x}) P_S(\boldsymbol{x})\, dS_x = -\int_{S_p}\int_{S_p} \tilde{\sigma}(\boldsymbol{x}) \sigma(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, dS_y\, dS_x + \int_{S_p}\int_{S_v} \tilde{\sigma}(\boldsymbol{x}) \mu(\boldsymbol{y}) \frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n_y}}\, dS_y\, dS_x$$

$$-i\omega\rho_0 \int_{S_v} \tilde{\mu}(\boldsymbol{x}) V_{Sn}(\boldsymbol{x})\, dS_x = -\int_{S_v}\int_{S_p} \tilde{\mu}(\boldsymbol{x}) \sigma(\boldsymbol{y}) \frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n_x}}\, dS_y\, dS_x + \int_{S_v}\int_{S_v} \tilde{\mu}(\boldsymbol{x}) \mu(\boldsymbol{y}) \frac{\partial^2 G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n_x}\partial \boldsymbol{n_y}}\, dS_y\, dS_x$$

2.1 Indirekte Methode

- Diskretisierung:

$$\sigma(\boldsymbol{x})=\sum N_k(\boldsymbol{x})\,s_k=[N(\boldsymbol{x})][s],\quad \tilde{\sigma}(\boldsymbol{x})=[N(\boldsymbol{x})][\tilde{s}]$$

$$\mu(\boldsymbol{x})=\sum M_k(\boldsymbol{x})\,d_k=[M(\boldsymbol{x})][d],\quad \tilde{\mu}(\boldsymbol{x})=[M(\boldsymbol{x})][\tilde{d}]$$

- Finite Elemente:
  - Die Flächen werden in finite Elemente unterteilt.
  - Die Koeffizienten s_k bzw. d_k entsprechen den Werten von σ bzw. μ an den Knotenpunkten der finiten Elemente.
  - Die Interpolationsfunktionen $N_k(\boldsymbol{x})$ bzw. $M_k(\boldsymbol{x})$ werden aus den Interpolationsfunktionen der finiten Elemente aufgebaut.

2.1 Indirekte Methode

- Matrizen:

$$[S]=\int_{S_p}\int_{S_p}[N(\boldsymbol{x})]^T[N(\boldsymbol{y})]G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,dS_y\,dS_x$$

$$[C]=\int_{S_p}\int_{S_v}[N(\boldsymbol{x})]^T[M(\boldsymbol{y})]\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}}}\,dS_y\,dS_x$$

$$=-\int_{S_p}\int_{S_v}[N(\boldsymbol{x})]^T[M(\boldsymbol{y})]\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{y}}}\,dS_y\,dS_x$$

$$[B]=-\int_{S_v}\int_{S_v}[M(\boldsymbol{x})]^T[M(\boldsymbol{y})]\frac{\partial^2 G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}}\partial \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{y}}}\,dS_y\,dS_x$$

$$[F_s]=-\int_{S_p}[N(\boldsymbol{x})]^T P_S(\boldsymbol{x})\,dS_x$$

$$[F_d]=i\omega\rho_0\int_{S_v}[M(\boldsymbol{x})]^T V_{Sn}(\boldsymbol{x})\,dS_x$$

2.1 Indirekte Methode

- Alle Matrizen sind komplex, voll besetzt und hängen von der Erregerfrequenz ab.
- Die Matrizen $[S]$ und $[B]$ sind symmetrisch.

– Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} [S] & [C] \\ [C]^T & [B] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [s] \\ [d] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_s] \\ [F_d] \end{bmatrix}$$

- Dieses symmetrische Gleichungssystem muss für jede Erregerfrequenz gelöst werden.
- Mit $[s]$ und $[d]$ sind σ und μ bekannt, so dass der Schalldruck in jedem Punkt des Raumes berechnet werden kann.

2.1 Indirekte Methode

- Geschlossene Flächen:
  - Im mathematischen Modell befindet sich immer auf beiden Seiten der Fläche das gleiche akustische Medium
  - In von geschlossenen Flächen begrenzten Raumgebieten existieren Eigenschwingungen.
  - Wenn die Erregerfrequenz mit einer der zugehörigen Resonanzfrequenzen übereinstimmt, haben die Integralgleichungen keine eindeutige Lösung.
  - Dieses Problem tritt auch dann auf, wenn sich in dem inneren Raumgebiet gar keine Luft befindet.

2.1 Indirekte Methode

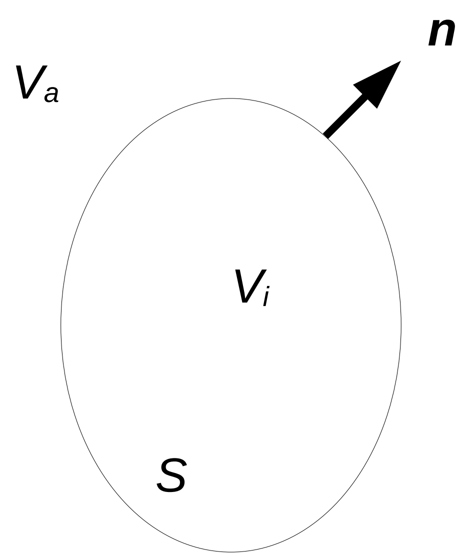
- Beispiel: Schallabstrahlung eines Motorblocks
  - Im mathematischen Modell befindet sich auch im Innern des Motorblocks Luft.
  - Für jede Resonanzfrequenz des Innenraums kann das Gleichungssystem nicht eindeutig gelöst werden.
  - Die Anzahl der Resonanzfrequenzen des Innenraums nimmt mit steigender Erregerfrequenz stark zu.
- Abhilfe:
  - Im Innenraum wird eine zusätzliche absorbierende Fläche modelliert.

2.1 Indirekte Methode

- Bewertung:
  - Die indirekte Methode kann für beliebige abstrahlende Flächen eingesetzt werden.
  - Im mathematischen Modell befindet sich auf beiden Seiten der Fläche immer das gleiche akustische Medium.
  - Probleme, bei denen sich auf den beiden Seiten einer Fläche unterschiedliche akustische Medien befinden, können mit der indirekten Methode nicht berechnet werden.
  - Bei geschlossenen Flächen wird immer das Außenraumproblem zusammen mit dem Innenraumproblem gelöst.

2.2 Direkte Methode

- Aufgabenstellung:
  - Für eine geschlossene Fläche *S* soll entweder das Schallfeld im Innern V_i oder das Schallfeld im Äußeren V_a berechnet werden.
  - Der Normalenvektor wird so gewählt, dass er in das akustische Medium zeigt.
  - Der Schalldruck im Raum soll in Abhängigkeit von Schalldruck und Schallschnelle auf der Fläche dargestellt werden.



2.2 Direkte Methode

- Lösung für das Außenraumproblem:
  - Für einen beliebigen Punkt in V_a gilt:

$$P(\boldsymbol{x}) = \int_S \left(\mu(\boldsymbol{y}) \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{y}}} - \sigma(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right) dS_y$$

  - Auf der Fläche S_p ist der Schalldruck vorgegeben:

$$P^o = P_S$$

  - Auf der Fläche S_v ist die Schallschnelle vorgegeben:

$$\frac{\partial P^o}{\partial \boldsymbol{n}} = -i\omega\rho_0 V_{Sn}$$

2.2 Direkte Methode

- Aus den Eigenschaften des Einfachschicht-Potenzials und des Doppelschicht-Potenzials folgt für Punkte auf *S*:

$$\frac{1}{2}\left(P^o + P^u\right) = \int_S \left(\mu(\boldsymbol{y}) \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{y}}} - \sigma(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right) dS_y$$

- Mit $\mu = P^o - P^u$ und $\sigma = \frac{\partial P^o}{\partial \boldsymbol{n}} - \frac{\partial P^u}{\partial \boldsymbol{n}}$ folgt daraus:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(P^o + P^u\right) \\
&= \int_{S_p} \left(P_S(\boldsymbol{y}) - P^u(\boldsymbol{y}) \right) \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{y}}} dS_y + \int_{S_v} \mu(\boldsymbol{y}) \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{y}}} dS_y \\
&\quad - \int_{S_p} \sigma(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) dS_y + i \omega \rho_0 \int_{S_v} \left(V_{Sn}(\boldsymbol{y}) - V_n^u \right) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) dS_y
\end{aligned}$$

2.2 Direkte Methode

- Für den Innenraum wird gefordert:

$$\frac{\partial P^u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \quad \text{auf} \quad S_p, \quad P^u = 0 \quad \text{auf} \quad S_v$$

- Wenn die Erregerfrequenz nicht mit einer Resonanzfrequenz des Innenraums zusammen fällt, ist $P^u = 0$ die einzige Lösung.
- Dann gilt auf dem gesamten Rand *S*:

$$P^u = 0 \;\rightarrow\; \mu = P^o = P, \quad \frac{\partial P^u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \;\rightarrow\; \sigma = \frac{\partial P^o}{\partial \boldsymbol{n}} = -i\,\omega\,\rho_0\,V_n$$

2.2 Direkte Methode

- Damit gilt auf der gesamten Fläche *S*:

$$\frac{1}{2}P(\boldsymbol{x})=\int_S \left(P(\boldsymbol{y})\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{y}}}+i\,\omega\,\rho_0\,V_n(\boldsymbol{y})\,G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right) dS_y$$

- Aus dieser Integralgleichung kann der Druck P auf der Fläche S_v und die Schallschnelle V_n auf der Fläche S_p bestimmt werden.
- Anschließend kann der Schalldruck an jedem Punkt im Außenraum V_a berechnet werden:

$$P(\boldsymbol{x})=\int_S \left(P(\boldsymbol{y})\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_y}+i\,\omega\,\rho_0\,V_n(\boldsymbol{y})\,G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right) dS_y$$

2.2 Direkte Methode

- Wenn die Erregerfrequenz nicht mit einer Resonanzfrequenz des Innenraums V_i zusammenfällt, gilt im Innenraum:

$$\int_S \left(P(\boldsymbol{y}) \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_y} + i\,\omega\,\rho_0\, V_n(\boldsymbol{y})\, G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right) dS_y = 0$$

- Irreguläre Frequenzen:
  - Wenn die Erregerfrequenz mit einer Innenraumresonanz zusammenfällt, gibt es keine eindeutige Lösung.
  - Eine Möglichkeit, die Lösung eindeutig zu machen, besteht darin, zusätzlich zur Integralgleichung zu fordern, dass an einigen Punkten im Innenraum der Schalldruck null wird.
  - Diese Punkte dürfen nicht an Stellen liegen, an denen der Schalldruck einer Eigenschwingung null ist.

2.2 Direkte Methode

- Dieses Verfahren wird als CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation) bezeichnet (Schenk, 1968).
- Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Integralgleichung mit ihrer Ableitung in Richtung der Flächennormalen zu kombinieren (Burton und Miller, 1971).
- Das Verfahren von Burton und Miller ist rechnerisch aufwändiger, aber numerisch stabiler.

- Lösung für das Innenraumproblem:
  - Für das Innenraumproblem ergeben sich die gleichen Gleichungen wie für das Außenraumproblem, wenn die Richtung des Normalenvektors auf dem Rand umgedreht wird.

2.2 Direkte Methode

- Numerische Lösung der Integralgleichung:
  - Die Integralgleichung wird meist mit einem Kollokationsverfahren gelöst.
  - Dazu wird zunächst die Fläche in finite Elemente unterteilt.
  - Für Schalldruck und Schallschnelle auf der Fläche wird ein Interpolationsansatz gemacht:

$$P(\boldsymbol{x}) = \sum N_k(\boldsymbol{x}) P_k = [N(\boldsymbol{x})][P], \quad V_n(\boldsymbol{x}) = \sum N_k V_{kn} = [N(\boldsymbol{x})][V]$$

  - Schalldruck $[P]$ und Schallschnelle $[V]$ werden bestimmt, indem der Ansatz in die Integralgleichung eingesetzt wird und gefordert wird, dass die entstehende Gleichung an geeigneten Punkten der finiten Elemente erfüllt ist.

2.2 Direkte Methode

- Dieses *Kollokationsverfahren* führt auf das Gleichungssystem

$$\sum_k \left(\frac{1}{2} N_k(\boldsymbol{x}_l) - \int_S N_k(\boldsymbol{y}) \frac{\partial G(\boldsymbol{x}_l, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{y}}} dS_y \right) P_k$$

$$= i\omega\rho_0 \sum_k \int_S N_k(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}_l, \boldsymbol{y}) dS_y V_k, \quad l = 1, \dots, n$$

- Daraus können die unbekannten Größen auf der Fläche bestimmt werden.
- Die Matrizen dieses Gleichungssystem sind komplex, voll besetzt, unsymmetrisch und hängen von der Erregerfrequenz ab.

2.2 Direkte Methode

- Bewertung:
  - Die direkte Methode kann nur angewendet werden, wenn die abstrahlende Fläche geschlossen ist und keine Verzweigungen hat.
  - Es kann entweder das Innenraumproblem oder das Außenraumproblem gelöst werden.
  - Beim Außenraumproblem sind zusätzliche Maßnahmen erforderlich, damit das Gleichungssystem auch gelöst werden kann, wenn die Erregerfrequenz mit einer Innenraumresonanz übereinstimmt.

2.3 Bewertung

- Im Vergleich zur Methode der Finiten Elemente ist der Modellierungsaufwand geringer, da nur Flächen vernetzt werden müssen.
- Da die entstehenden Matrizen komplex, voll besetzt und frequenzabhängig sind, ist der Rechenaufwand größer.
- Eigenschwingungen lassen sich nur mit sehr großem Aufwand berechnen, da dazu ein nichtlineares Eigenwert-problem gelöst werden muss.
- Bei hohen Erregerfrequenzen ergeben sich die gleichen Schwierigkeiten wie bei der Methode der Finiten Elemente.

2.3 Bewertung

- Fast Multipole Method:
  - Moderne Randelement-Methoden basieren auf der Fast Multipole Method (FMM). Sie werden auch als FastBEM bezeichnet.
  - Die Gleichungen werden iterativ gelöst, ohne dass die Matrizen explizit aufgestellt werden.
  - Der Einfluss eines Flächenstückes auf Punkte, die weit davon entfernt liegen, wird über Multipole approximiert.