

1. Diskrete Massenänderung

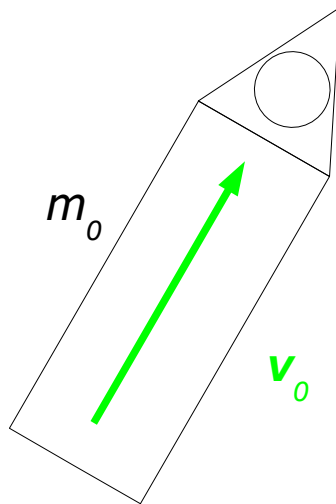
- Betrachtet wird ein Körper K , der einen Teil seiner Masse abstößt:
 - Anfangsmasse des Körpers: m_0
 - Geschwindigkeit des Körpers vor dem Abstoß: \mathbf{v}_0
 - Geschwindigkeit des Körpers nach dem Abstoß: \mathbf{v}_1
 - Abgestoßene Masse: Δm
 - Geschwindigkeit der abgestoßenen Masse relativ zum Körper nach dem Abstoß: \mathbf{w}

1. Diskrete Massenänderung

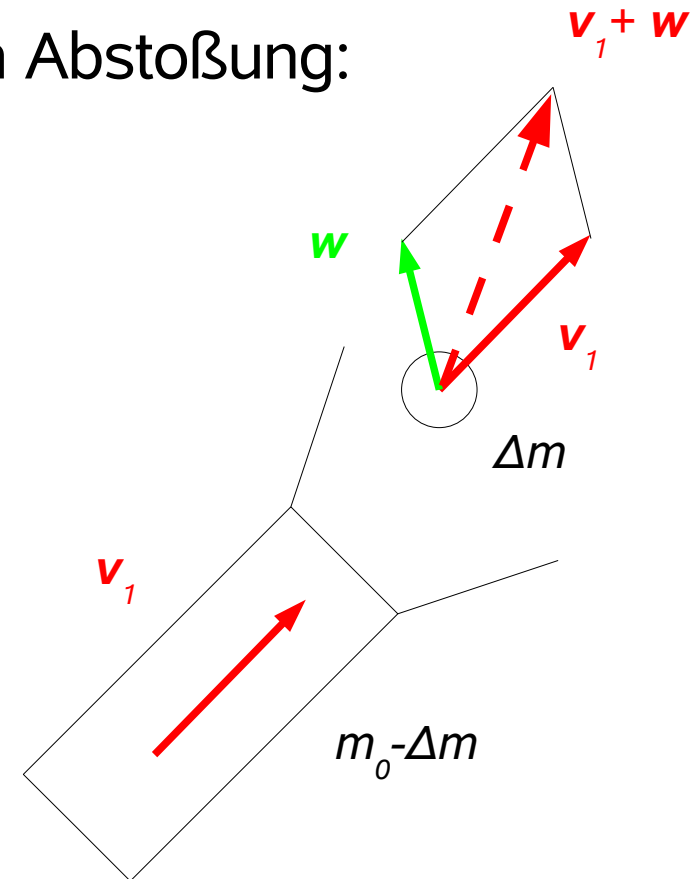
- Die Ausstoßgeschwindigkeit \boldsymbol{w} ist die Geschwindigkeit relativ zum Körper K , mit der die abgestoßene Masse Δm den abstoßenden Körper verlässt.
- Zum Zeitpunkt des Verlassens hat der Körper K die Geschwindigkeit \boldsymbol{v}_1 .

1. Diskrete Massenänderung

Vor Abstoßung:



Nach Abstoßung:



1. Diskrete Massenänderung

- Bekannt sind m_0 , \mathbf{v}_0 , Δm und \mathbf{w} .
- Gesucht ist \mathbf{v}_1 .
- Die gesuchte Geschwindigkeit \mathbf{v}_1 kann aus dem Impulserhaltungssatz ermittelt werden.
- Dazu werden beide Massen zusammen als ein System betrachtet.
- Auf dieses System wirken keine äußeren Kräfte.

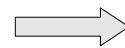
1. Diskrete Massenänderung

- Impuls vor dem Abstoßen: $\mathbf{p}_0 = m_0 \mathbf{v}_0$
- Impuls nach dem Abstoßen: $\mathbf{p}_1 = (m_0 - \Delta m) \mathbf{v}_1 + \Delta m (\mathbf{v}_1 + \mathbf{w})$
- Da keine äußeren Kräfte wirken, ist der Impuls vor dem Abstoßen gleich dem Impuls nach dem Abstoßen:

$$m_0 \mathbf{v}_0 = (m_0 - \Delta m) \mathbf{v}_1 + \Delta m (\mathbf{v}_1 + \mathbf{w})$$

- Daraus:

$$m_0 \mathbf{v}_0 = m_0 \mathbf{v}_1 + \Delta m \mathbf{w}$$



$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 - \frac{\Delta m}{m_0} \mathbf{w}$$

1. Diskrete Massenänderung

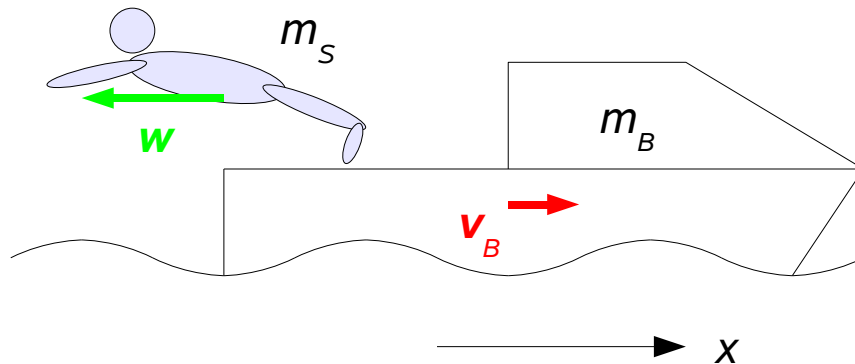
– Geschwindigkeitsänderung:

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0 = -\frac{\Delta m}{m_0} \mathbf{w}$$

- Die Geschwindigkeitsänderung ist proportional zur ausgestoßenen Masse und zur Ausstoßgeschwindigkeit.
- Sie ist entgegengesetzt zur Ausstoßgeschwindigkeit gerichtet.

1. Diskrete Massenänderung

- Beispiel:
 - Ein Schwimmer springt aus einem Boot ins Wasser.



- Gegeben:
 - Masse des Bootes m_B und Masse des Schwimmers m_S
 - Absprunggeschwindigkeit w
- Gesucht:
 - Geschwindigkeit v_B des Bootes nach dem Absprung

1. Diskrete Massenänderung

- Es wird angenommen, dass das Boot reibungsfrei im Wasser gleitet.
- Mit $m_0 = m_S + m_B$, $\Delta m = m_S$ und $v_0 = 0$ folgt für $v_B = v_1$:

$$v_B = -\frac{m_S}{m_B + m_S} w$$

- Zahlenbeispiel:

$$m_S = 70 \text{ kg}$$

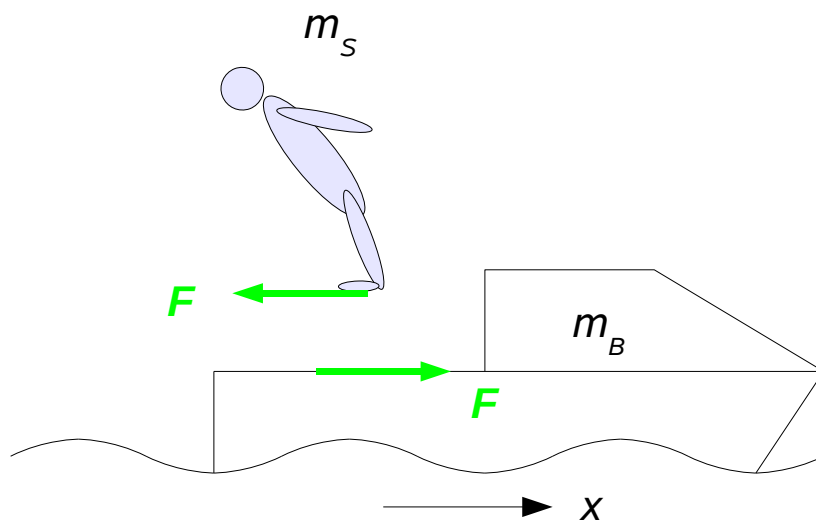
$$m_B = 420 \text{ kg}$$

$$w = -14 \text{ km/h}$$

$$\rightarrow v_B = \frac{70 \text{ kg}}{490 \text{ kg}} \cdot 14 \text{ km/h} = \underline{2 \text{ km/h}}$$

1. Diskrete Massenänderung

- Kräftebilanz, wenn der Schwimmer mit der konstanten Beschleunigung a_S anläuft:



- Der Schwimmer hat beim Absprung die Absolutgeschwindigkeit $v_S = w + v_B$.
- Anlauf mit konstanter Beschleunigung:

$$v_S = a_S t \rightarrow t = \frac{v_S}{a_S} = \frac{w + v_B}{a_S}$$

- Impulssatz für Schwimmer:

$$m_S a_S = -F$$

- Impulssatz für Boot:

$$m_B a_B = F = -m_S a_S$$

1. Diskrete Massenänderung

- Geschwindigkeit des Bootes bei Absprung:

$$v_B = a_B t = -\frac{m_S}{m_B} a_S \cdot \frac{w + v_B}{a_S}$$

$$v_B \left(1 + \frac{m_S}{m_B} \right) = -\frac{m_S}{m_B} w \rightarrow v_B = -\frac{\frac{m_S}{m_B}}{1 + \frac{m_S}{m_B}} w = -\frac{m_S}{m_B + m_S} w$$

1. Diskrete Massenänderung

- Betrachtet wird ein Körper K , der eine Masse einfängt:
 - Anfangsmasse des Körpers: m_0
 - Geschwindigkeit vor dem Einfangen: \mathbf{v}_0
 - Geschwindigkeit nach dem Einfangen: \mathbf{v}_1
 - Eingefangene Masse: Δm

- Geschwindigkeit der eingefangenen Masse relativ zum Körper vor dem Einfangen: \mathbf{w}
- Impulserhaltungssatz:

$$\begin{aligned} m_0 \mathbf{v}_0 + \Delta m (\mathbf{v}_0 + \mathbf{w}) \\ = (m_0 + \Delta m) \mathbf{v}_1 \end{aligned}$$

- Daraus:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \frac{\Delta m}{m_0 + \Delta m} \mathbf{w}$$

1. Diskrete Massenänderung

- Zusammenfassung:

	Ausstoßen	Einfangen
m_0	Masse vor Ausstoßen	Masse vor Einfangen
Δm	ausgestoßene Masse	eingefangene Masse
$\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$	Geschwindigkeit der ausstoßenden Masse vor und nach Ausstoßen	Geschwindigkeit der einfangenden Masse vor und nach Einfangen
\mathbf{w}	Geschwindigkeit der ausgestoßenen Masse relativ zu \mathbf{v}_1	Geschwindigkeit der eingefangenen Masse relativ zu \mathbf{v}_0
	$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 - \frac{\Delta m}{m_0} \mathbf{w}$	$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \frac{\Delta m}{m_0 + \Delta m} \mathbf{w}$