# 2. Kontinuierliche Massenänderung

- Untersucht wird ein Körper, der kontinuierlich Masse ausstößt.
- Es sollen zunächst keine äußeren Kräfte auf den Körper wirken.
- Bezeichnungen:
  – Masse des ausstoßenden Körpers: $m(t)$
  – Pro Zeiteinheit ausgestoßene Masse: Massenstrom $\mu(t)$
  – Geschwindigkeit der ausgestoßenen Masse relativ zum ausstoßenden Körper: Ausstoßgeschwindigkeit $\boldsymbol{w}$

# 2. Kontinuierliche Massenänderung

- Impulserhaltungssatz für das Zeitintervall *dt* :
  - Impuls zum Zeitpunkt *t* : $\boldsymbol{p}(t) = m(t)\,\boldsymbol{v}(t)$
  - Impuls zum Zeitpunkt *t* + *dt* :

$$\boldsymbol{p}(t+dt) = \underbrace{m(t+dt)\,\boldsymbol{v}(t+dt)}_{\text{ausstoßender Körper}} + \underbrace{\mu(t)\,dt\big(\boldsymbol{v}(t+dt)+\boldsymbol{w}(t)\big)}_{\text{ausgestoßene Masse}}$$

  - Größen zum Zeitpunkt *t* + *dt* :

$$m(t+dt) = m(t) - \mu(t)\,dt\,, \quad \boldsymbol{v}(t+dt) = \boldsymbol{v}(t) + d\,\boldsymbol{v}$$

# 2. Kontinuierliche Massenänderung

- Damit:

$$\boldsymbol{p}(t+dt)=\left(m(t)-\mu(t)\,dt\right)\left(\boldsymbol{v}(t)+d\,\boldsymbol{v}\right)+\mu(t)\,dt\left(\boldsymbol{v}(t)+d\,\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}(t)\right)$$
$$=m(t)\,\boldsymbol{v}(t)+m(t)\,d\,\boldsymbol{v}+\mu(t)\,\boldsymbol{w}(t)\,dt$$
$$+\text{Glieder höherer Ordnung}$$

- Impulserhaltung (keine äußeren Kräfte): $\boldsymbol{p}(t)=\boldsymbol{p}(t+dt)$

$$m(t)\,\boldsymbol{v}(t)=m(t)\,\boldsymbol{v}(t)+m(t)\,d\,\boldsymbol{v}+\mu(t)\,\boldsymbol{w}(t)\,dt$$

$$\rightarrow\quad m(t)\frac{d\,\boldsymbol{v}}{dt}(t)+\mu(t)\,\boldsymbol{w}(t)=\boldsymbol{0}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{m(t)\frac{d\,\boldsymbol{v}(t)}{dt}(t)=-\mu(t)\,\boldsymbol{w}(t)}$$

# 2. Kontinuierliche Massenänderung

– Mit der Schubkraft $\boldsymbol{S} = -\mu\, \boldsymbol{w}$

folgt schließlich

$$\boxed{m(t) \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{S}}$$

– Die Schubkraft ist proportional zum Massenstrom und zur Ausstoßgeschwindigkeit.

– Sie wirkt entgegengesetzt zu ***w*** auf den ausstoßenden Körper.

# 2. Kontinuierliche Massenänderung

- Beispiel:
  - Zur Bahnkorrektur eines Satelliten wird vom Zeitpunkt $t_1$ bis zum Zeitpunkt $t_2$ ein Triebwerk eingeschaltet.
  - Das Triebwerk hat eine konstante Ausstoßgeschwindigkeit $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{c}_S$ (Strahlgeschwindigkeit ) und einen konstanten Massenstrom $\mu$.
  - Gesucht ist die Geschwindigkeitsänderung $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$ .

# 2. Kontinuierliche Massenänderung

– Für die Masse des Satelliten gilt

$$m(t) = m(t_1) - \mu(t - t_1) = m_1 - \mu(t - t_1)$$

– Aus dem Impulssatz folgt:

$$m(t)\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \left(m_1 - \mu(t - t_1)\right)\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\mu\,\boldsymbol{c}_S$$

– Trennung der Veränderlichen führt auf

$$d\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{c}_S \frac{\mu\,dt}{m_1 - \mu(t - t_1)}$$

# 2. Kontinuierliche Massenänderung

– Integration ergibt:

$$\int_{\boldsymbol{v}_1}^{\boldsymbol{v}_2} d\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{c}_S \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mu\, dt}{m_1 - \mu\left(t - t_1\right)}$$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{c}_S \left[\ln\left(m_1 - \mu\left(t - t_1\right)\right)\right]_{t_1}^{t_2} = \boldsymbol{c}_S \ln\left(\frac{m_1 - \mu\left(t_2 - t_1\right)}{m_1}\right)$$

– Mit $m_2 = m_1 - \mu\left(t_2 - t_1\right)$ folgt daraus:

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{c}_S \ln\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}$$

– Diese Gleichung wird als Raketenformel von Ziolkowsky bezeichnet.

# 2. Kontinuierliche Massenänderung

- Zusätzliche äußere Kraft:
  - Wenn zusätzlich eine äußere Kraft ***F*** auf den Körper wirkt, dann gilt für die Änderung des Impulses

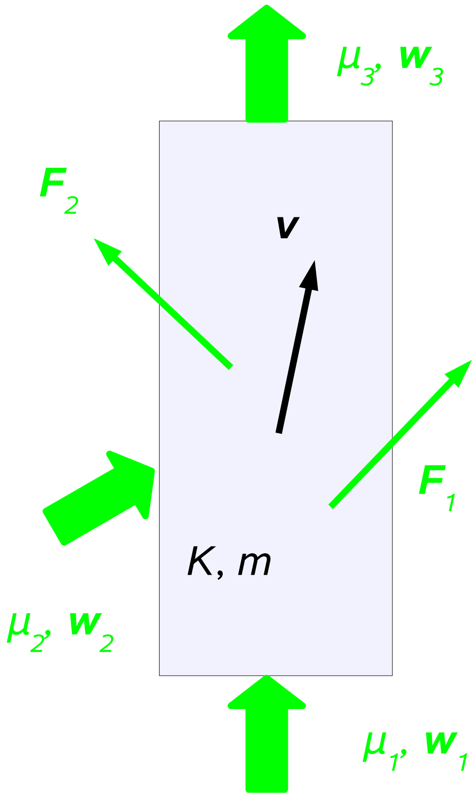
$$\boldsymbol{p}(t+dt)-\boldsymbol{p}(t)=\boldsymbol{F}\,dt \;\rightarrow\; m(t)\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}(t)+\mu(t)\boldsymbol{w}(t)=\boldsymbol{F}$$

  - Daraus folgt:

$$\boxed{m(t)\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{S}}$$

# 2. Kontinuierliche Massenänderung

- Systeme mit mehreren Massenströmen:




- Einströmen: $\boldsymbol{S}_E = \mu_E \boldsymbol{w}_E$
- Ausströmen: $\boldsymbol{S}_A = -\mu_A \boldsymbol{w}_A$

- Die Massenströme $\mu_E$ und $\mu_A$ sind immer positiv.
- Die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{w}_E$ und $\boldsymbol{w}_A$ sind Geschwindigkeiten relativ zur Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ des Körpers.

# 2. Kontinuierliche Massenänderung

– Mit diesen Vereinbarungen gilt:

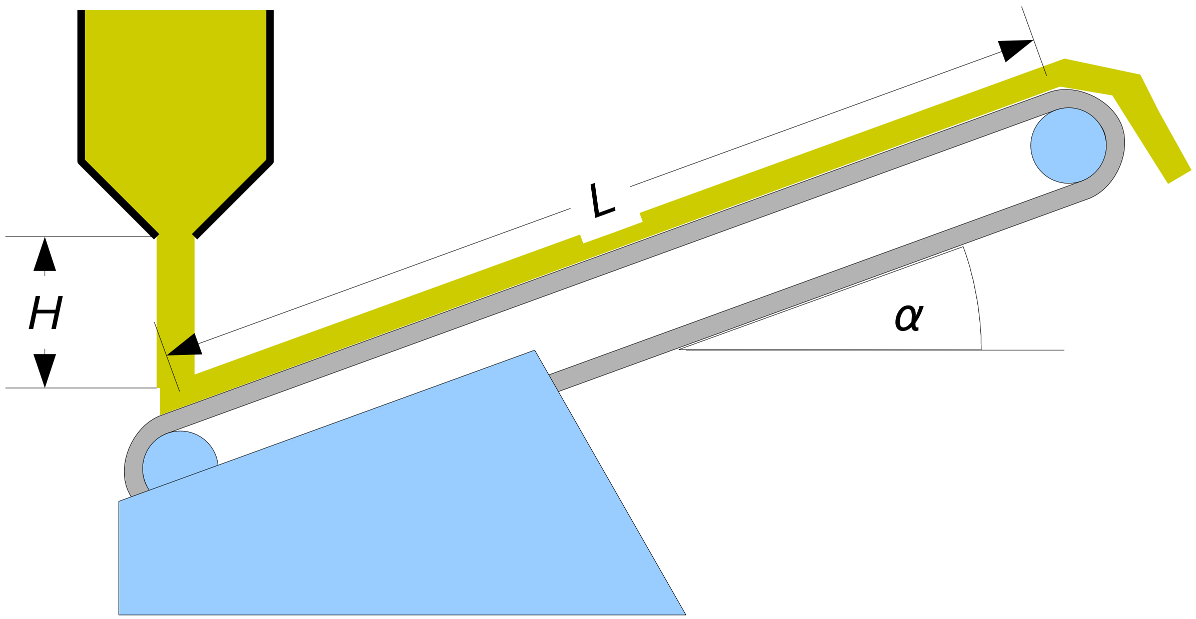
$$\boxed{m\dot{\boldsymbol{v}} = \sum \boldsymbol{S} + \sum \boldsymbol{F}}$$

– In Komponenten:

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= \sum S_x + \sum F_x \\ m\dot{v}_y &= \sum S_y + \sum F_y \\ m\dot{v}_z &= \sum S_z + \sum F_z \end{aligned}$$

# 2. Kontinuierliche Massenänderung

- Beispiel: Förderband



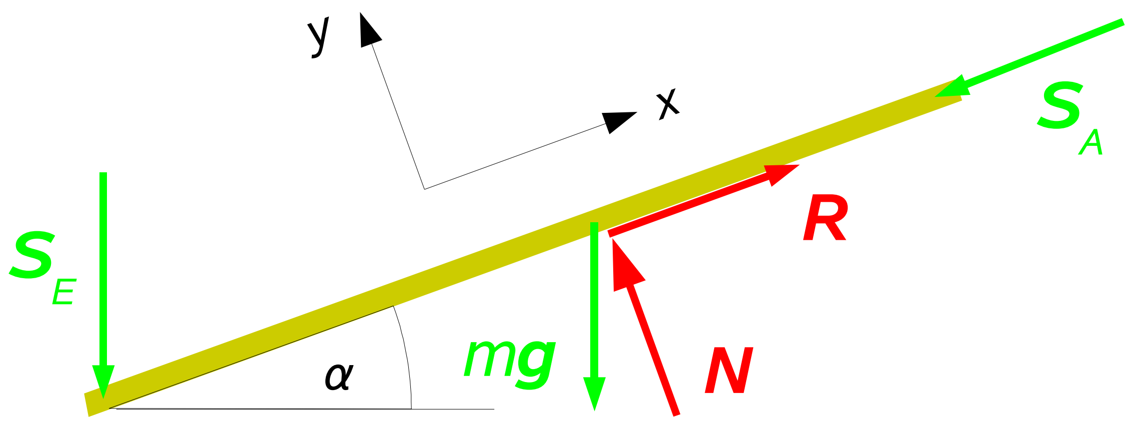
# 2. Kontinuierliche Massenänderung

- Auf das dargestellte Förderband, das mit der Geschwindigkeit $v_B$ umläuft, fällt Sand frei aus der Höhe $H$. Die wirksame Bandlänge ist $L$, der Steigungswinkel $\alpha$.
- Zu bestimmen ist die für den Transport notwendige Zugkraft im Band.

- Daten:
  - Bandlänge $L = 10m$
  - Höhe $H = 1m$
  - Winkel $\alpha = 20°$
  - Bandgeschwindigkeit $v_B = 1{,}20 m/s$
  - Massenstrom des Sandes: $\mu = 300 kg/s$

# 2. Kontinuierliche Massenänderung

– Sand auf Band freigeschnitten:



# 2. Kontinuierliche Massenänderung

- Der Schwerpunkt des auf dem Band befindlichen Sandes bleibt in Ruhe.
- Schubkräfte durch Massenströme:
  - Einströmend: Die Schubkraft wirkt in Richtung der Einströmgeschwindigkeit und hat die Größe

$$S_E = \mu v_S \quad \text{mit} \quad v_S = \sqrt{2 g H}$$

  - Ausströmend: Die Schubkraft wirkt entgegen der Ausströmgeschwindigkeit und hat die Größe

$$S_A = \mu v_B$$

# 2. Kontinuierliche Massenänderung

- Kräfte:
  - Gewichtskraft $m\boldsymbol{g}$
  - Reibkraft $\boldsymbol{R}$, die das Band auf den Sand ausübt
  - Normalkraft $\boldsymbol{N}$, die das Band auf den Sand ausübt
- Da sich die Geschwindigkeit des Schwerpunktes nicht ändert, müssen die Kräfte im Gleichgewicht sein:

$$\sum F_x = 0: \quad -\mu v_S \sin\alpha - m g \sin\alpha + R - \mu v_B = 0$$

$$\rightarrow \quad R = \mu\left(v_S \sin\alpha + v_B\right) + m g \sin\alpha$$

# 2. Kontinuierliche Massenänderung

– Masse des Sandes:

- Im Zeitintervall $\Delta t$ bewegt sich das Band um die Strecke $\Delta x = v_B \Delta t$ weiter.
- In diesem Streckenintervall befindet sich die Masse

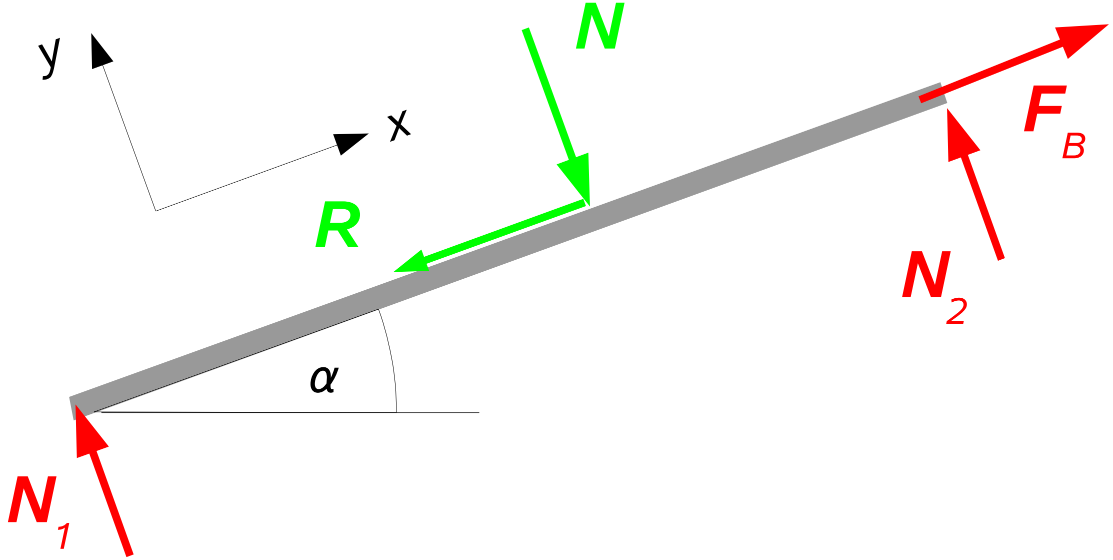
$$\Delta m = (m/L) \Delta x$$

- Diese Masse fällt im betrachteten Zeitintervall vom Band. Also gilt:

$$\frac{m}{L} \Delta x = \frac{m}{L} v_B \Delta t = \mu \Delta t \quad \rightarrow \quad m = \frac{\mu L}{v_B}$$

# 2. Kontinuierliche Massenänderung

– Band freigeschnitten:



# 2. Kontinuierliche Massenänderung

- Die gesuchte Zugkraft $\boldsymbol{F}_B$ folgt aus dem Gleichgewicht in *x*-Richtung:

$$\sum F_x = 0: \ -R + F_B = 0 \ \rightarrow \ F_B = R$$

- Zahlenwerte:
  - Einströmgeschwindigkeit:

$$v_S = \sqrt{2 g H} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\, m/s^2 \cdot 1{,}0\, m} = \underline{4{,}43\, m/s}$$

  - Masse des Sandes auf dem Band:

$$m = \frac{\mu L}{v_B} = \frac{300\, kg/s \cdot 10\, m}{1{,}2\, m/s} = \underline{2500\, kg}$$

# 2. Kontinuierliche Massenänderung

- Zugkraft im Band: $F_B = R = \mu\left(v_S \sin\alpha + v_B\right) + m\,g\sin\alpha$

$$F_B = 300\,kg/s\left(4{,}43\cdot\sin\left(20°\right)+1{,}2\right)m/s$$

$$+2500\,kg\cdot 9{,}81\,m/s^2\cdot\sin\left(20°\right)$$

$$=815\,N+8388\,N=\underline{9203\,N}$$