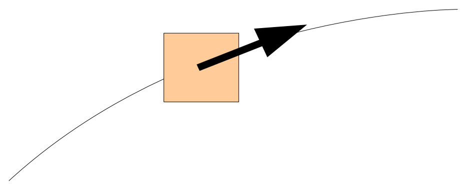
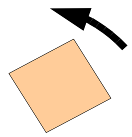
1. Impuls- und Drallsatz

- Impulssatz
  - Bewegung des Schwer-punkts des Körpers auf-grund vorgegebener Kräf-te



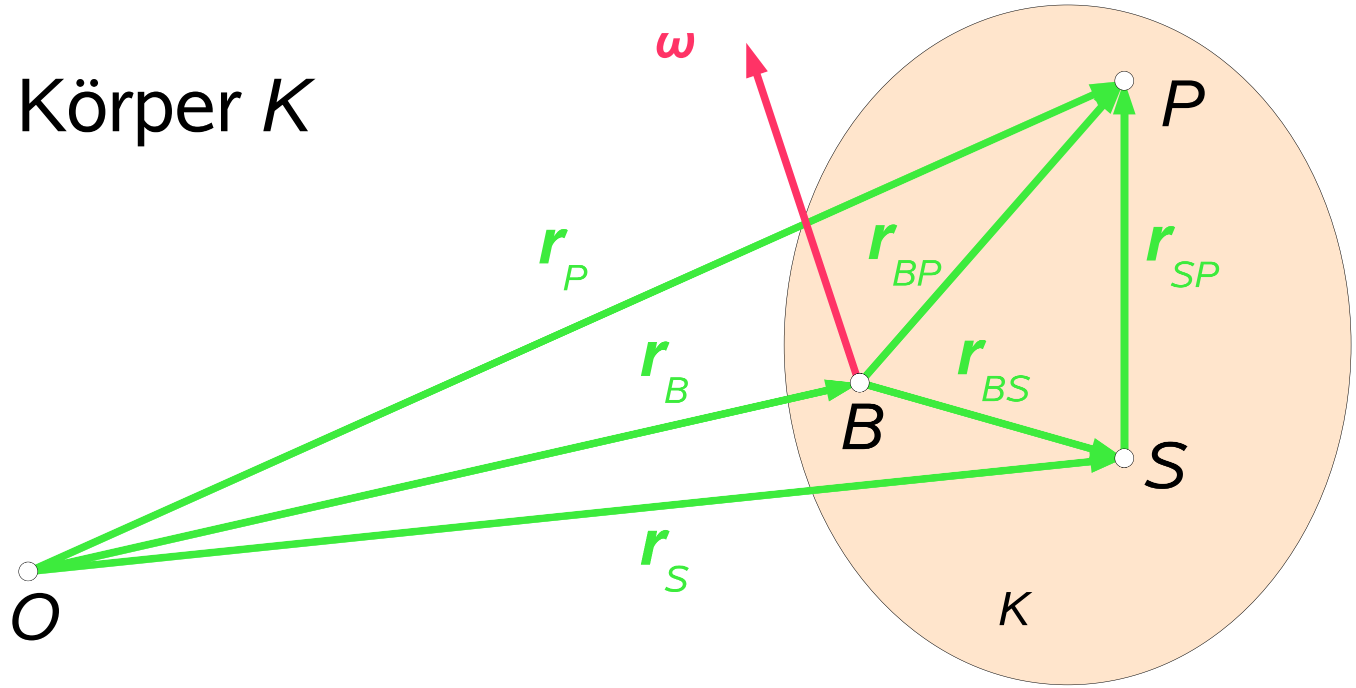
- Drallsatz
  - Drehung des Körpers aufgrund vorgegebener Momente



1. Impuls- und Drallsatz

1.1 Bezeichnungen

Körper *K*



1.1 Bezeichnungen

- Punkt *O* ist der Ursprung des ortsfesten Bezugssystems.
- Punkt *B* ist ein körperfester Punkt, der als Ursprung eines körperfesten Bezugssystems dient.
- Punkt *S* ist der Schwerpunkt des Körpers.
- Punkt *P* ist ein allgemeiner Punkt des Körpers.

1.1 Bezeichnungen

- Vektor $\boldsymbol{r}_{BP}$ ist der Ortsvektor des Punktes P im körperfesten Bezugssystem.
- Vektor $\boldsymbol{r}_{BS}$ ist der Ortsvektor des Schwerpunktes S im körperfesten Bezugssystem.
- Vektor $\boldsymbol{r}_{SP}$ ist der Vektor vom Schwerpunkt S zum Punkt P.
- Da der Körper starr ist, ändern sich die Vektoren $\boldsymbol{r}_{BP}$, $\boldsymbol{r}_{BS}$ und $\boldsymbol{r}_{SP}$ für einen körperfesten Beobachter nicht.

1.1 Bezeichnungen

- Geschwindigkeit des Punktes *P*:
  - Für einen körperfesten Beobachter ist Punkt *P* in Ruhe:
    $^{B}\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{0}$
  - Für einen Beobachter im ortsfesten Bezugssystem hat Punkt *P* die Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BP}$$

1.1 Bezeichnungen

- Schwerpunkt *S* :
  - Im ortsfesten Bezugssystem gilt laut Definition

$$m\boldsymbol{r}_S = \int_K \boldsymbol{r}_P \, dm$$

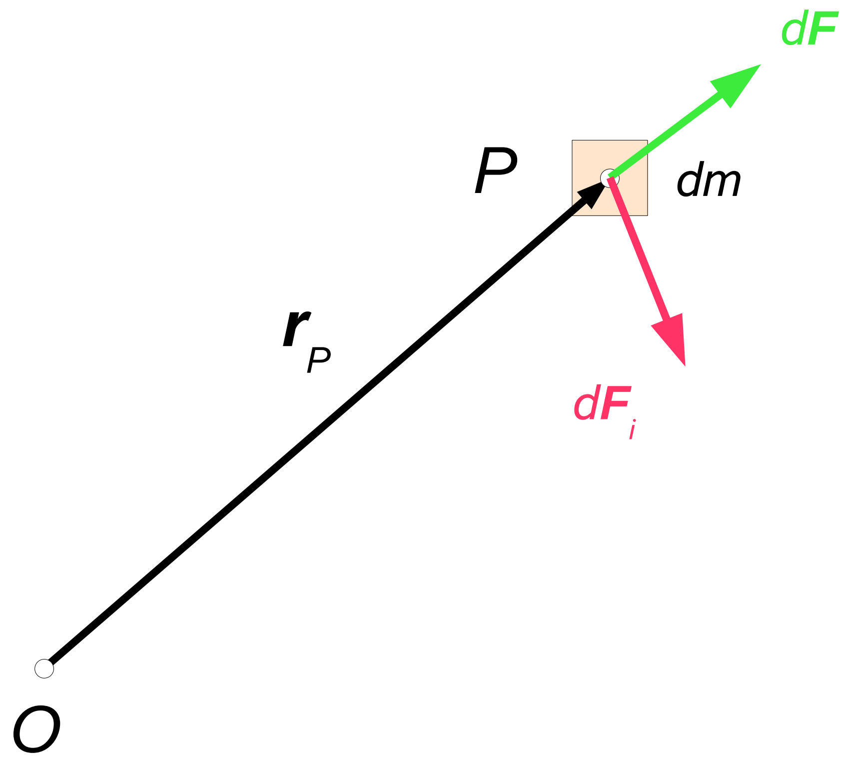
  - Daraus folgt für den Vektor $\boldsymbol{r}_{SP} = \boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_S$:

$$\int_K \boldsymbol{r}_{SP} \, dm = \int_K \boldsymbol{r}_P \, dm - \int_K \boldsymbol{r}_S \, dm = m\boldsymbol{r}_S - \boldsymbol{r}_S m = \boldsymbol{0}$$

  - Aus $\boldsymbol{r}_{BS} = \boldsymbol{r}_{BP} - \boldsymbol{r}_{SP}$

    folgt weiter: $m\boldsymbol{r}_{BS} = \int_K \boldsymbol{r}_{BP} \, dm$

1.2 Impulssatz



- Kräfte am freigeschnittenen Massenelement *dm* :
  - äußere Kräfte $d\boldsymbol{F}$
  - innere Kräfte $d\boldsymbol{F}_i$
  - Die inneren Kräfte sind die Kräfte, die die benachbarten Massenelemente auf das betrachtete Massenelement ausüben.

1.2 Impulssatz

- Der Impulssatz für das Massenelement lautet:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_P \, dm = d\boldsymbol{F} + d\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}$$

- Integration über den Körper ergibt

$$\int_K \ddot{\boldsymbol{r}}_P \, dm = \int_K d\boldsymbol{F} + \int_K d\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}$$

- Wegen Actio = Reactio verschwindet das Integral der inneren Kräfte:

$$\int_K d\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{0}$$

- Das Integral über die äußeren Kräfte ergibt die resultierende Kraft:

$$\int_K d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}$$

- Aus der Definition des Schwerpunkts folgt:

$$m\,\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{S}} = \int_K \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{P}} \, dm$$

$$\rightarrow \quad m\,\ddot{\boldsymbol{r}}_S = \int_K \ddot{\boldsymbol{r}}_P \, dm$$

1.2 Impulssatz

- Damit lautet der Impulssatz für den Körper:

$$\boxed{m\ddot{\boldsymbol{r}}_S = \boldsymbol{F}}$$

- Der Schwerpunkt eines starren Körpers bewegt sich so, als ob alle Kräfte an ihm angriffen und die gesamte Masse in ihm vereinigt wäre.

1.3 Drallsatz

- Aus dem Impulssatz für das Massenelement,

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_P \, dm = d\,\boldsymbol{F} + d\,\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}$$

folgt mit $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{P}} = \dot{\boldsymbol{r}}_P$: $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}} \times \dot{\boldsymbol{v}}_P \, dm = \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}} \times d\,\boldsymbol{F} + \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}} \times d\,\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}$

- Integration über den Körper ergibt:

$$\int_K \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}} \times \dot{\boldsymbol{v}}_P \, dm = \int_K \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}} \times d\,\boldsymbol{F} + \int_K \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}} \times d\,\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}$$

- Die Beiträge der inneren Kräfte heben sich wegen Actio = Reactio auf:

$$\int_K \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{BP}} \times \boldsymbol{d}\, F_i = \boldsymbol{0}$$

1.3 Drallsatz

- Die Beiträge der äußeren Kräfte summieren sich zu dem resultierenden Moment der äußeren Kräfte um den Punkt *B*:

$$\int_K \boldsymbol{r}_{BP} \times \boldsymbol{d}\, F = \boldsymbol{M}_B$$

- Damit bleibt: $\int_K \boldsymbol{r}_{BP} \times \dot{\boldsymbol{v}}_P\, dm = \boldsymbol{M}_B$

1.3 Drallsatz

- Das Integral lässt sich weiter umformen:
  - Zunächst gilt: $\boldsymbol{r}_{BP} \times \dot{\boldsymbol{v}}_P = \dfrac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}_{BP} \times \boldsymbol{v}_P\right) - \dot{\boldsymbol{r}}_{BP} \times \boldsymbol{v}_P$
  - Wegen ${}^{B}\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{0}$ gilt außerdem:

    $\dot{\boldsymbol{r}}_{BP} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BP}$ und $\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BP}$
  - Damit folgt:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{BP} \times \boldsymbol{v}_P = \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BP}\right) \times \left(\boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BP}\right) = \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BP}\right) \times \boldsymbol{v}_B$$

1.3 Drallsatz

- Für das Integral gilt also:

$$\int_K \boldsymbol{r}_{BP} \times \dot{\boldsymbol{v}}_P \, dm = \int_K \frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{r}_{BP} \times \boldsymbol{v}_P \right) dm - \left(\boldsymbol{\omega} \times \int_K \boldsymbol{r}_{BP} \, dm \right) \times \boldsymbol{v}_B$$

$$= \frac{d}{dt} \int_K \left(\boldsymbol{r}_{BP} \times \boldsymbol{v}_P \right) dm - \left(\boldsymbol{\omega} \times m \, \boldsymbol{r}_{BS} \right) \times \boldsymbol{v}_B$$

- Definition: Die Größe

$$\boxed{\boldsymbol{L}_B = \int_K \left(\boldsymbol{r}_{BP} \times \boldsymbol{v}_P \right) dm}$$

wird als Drall oder Drehimpuls bezüglich des Punktes *B* bezeichnet.

1.3 Drallsatz

- Damit lautet der Drallsatz in allgemeiner Form:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{L}}_B - m\left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BS}\right) \times \boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{M}_B}$$

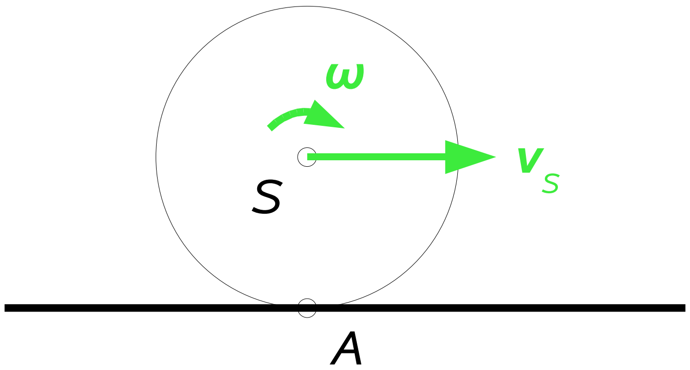
- Der Drallsatz wird auch als Drehimpulssatz oder Momentensatz bezeichnet.

1.3 Drallsatz

- Speziell: Schwerpunkt als Bezugspunkt
  - Wird der Bezugspunkt *B* in den Schwerpunkt *S* gelegt, so gilt $\boldsymbol{r}_{BS} = \boldsymbol{0}$.
  - Damit vereinfacht sich der Drallsatz zu $\boxed{\dot{\boldsymbol{L}}_S = \boldsymbol{M}_S}$
  - Die Änderung des Dralls bezüglich des Schwerpunkts ist gleich dem Moment der äußeren Kräfte.
- Speziell: Bezugspunkt *B* ist ortsfest
  - Für einen ortsfesten Bezugspunkt *B* gilt $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{0}$.
  - Der Drallsatz vereinfacht sich ebenfalls zu $\dot{\boldsymbol{L}}_B = \boldsymbol{M}_B$.

1.3 Drallsatz

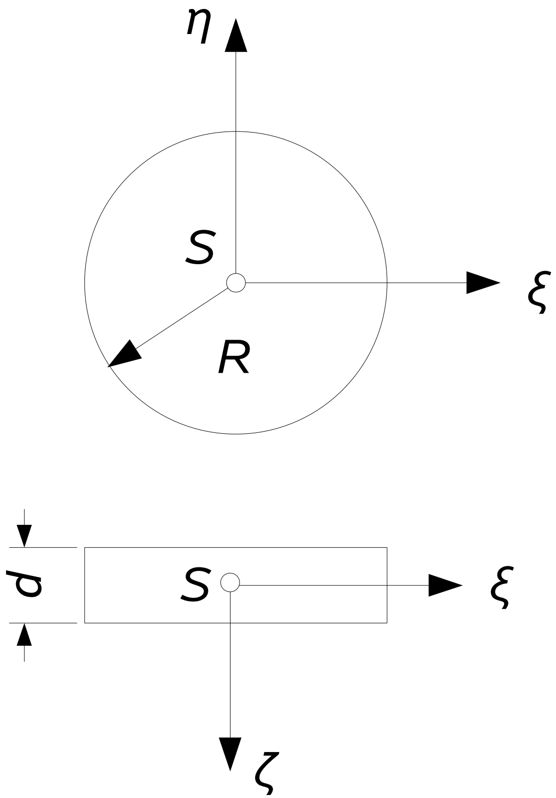
- Beispiel: Drall der rollenden Scheibe



- Die Scheibe rollt mit der konstanten Schwerpunktsgeschwindigkeit v_S und der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω.
- Gesucht ist der Drall bezüglich des Schwerpunkts.

1.3 Drallsatz

– Geometrie:



- Radius *R*
- Dicke *d*
- Die Mittelebene der Scheibe liegt in der *ξη*-Ebene des körperfesten Koordinatensystems.
- Der Ursprung des körperfesten Koordinatensystems ist der Schwerpunkt.

1.3 Drallsatz

– Vektoren:

- Allgemeiner Ortsvektor:

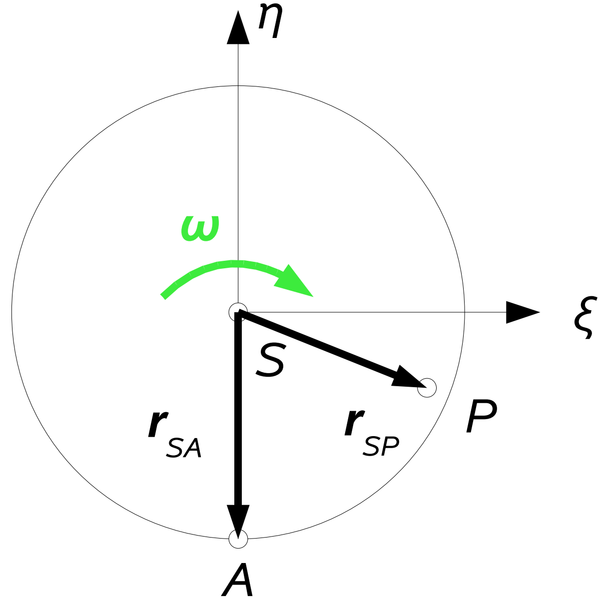
$$\boldsymbol{r}_{SP} = \xi\,\boldsymbol{b}_\xi + \eta\,\boldsymbol{b}_\eta + \zeta\,\boldsymbol{b}_\zeta$$

- Ortsvektor von Punkt *A*:

$$\boldsymbol{r}_{SA} = -R\,\boldsymbol{b}_\eta$$

- Winkelgeschwindigkeit:

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega\,\boldsymbol{b}_\zeta$$



3.1 Drallsatz

– Kinematik:

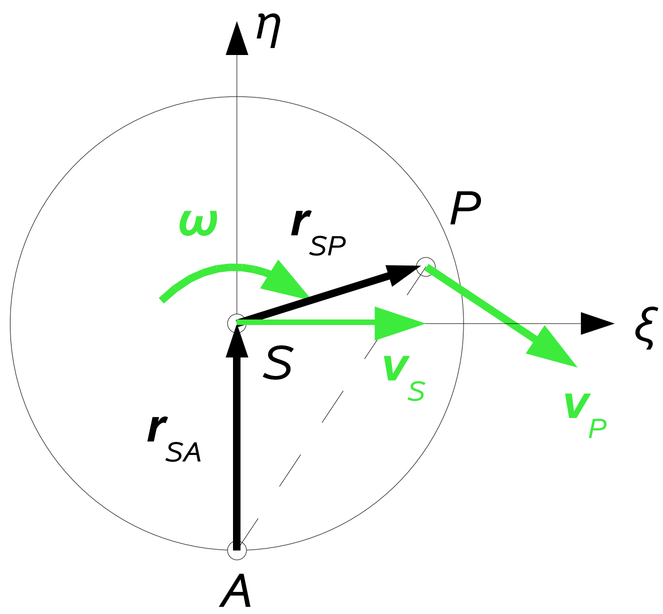
$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SP}$$

– Rollbedingung:

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SA} = \boldsymbol{0}$$

$$\downarrow$$

$$\boldsymbol{v}_S = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SA}$$
$$= -\omega R \boldsymbol{b}_\zeta \times \boldsymbol{b}_\eta = \omega R \boldsymbol{b}_\xi$$



1.3 Drallsatz

- Drall bezüglich Schwerpunkt: $\boldsymbol{L}_S = \int_K \left(\boldsymbol{r}_{SP} \times \boldsymbol{v}_P \right) dm$
  - Geschwindigkeit:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{SP} = \omega R \boldsymbol{b}_\xi + \left(-\omega \boldsymbol{b}_\zeta \right) \times \left(\xi \boldsymbol{b}_\xi + \eta \boldsymbol{b}_\eta + \zeta \boldsymbol{b}_\zeta \right)$$

$$= \omega R \boldsymbol{b}_\xi - \omega \xi \boldsymbol{b}_\eta + \omega \eta \boldsymbol{b}_\xi = \omega \left[\left(R + \eta \right) \boldsymbol{b}_\xi - \xi \boldsymbol{b}_\eta \right]$$

  - Integrand:

$$\boldsymbol{r}_{SP} \times \boldsymbol{v}_P = \left(\xi \boldsymbol{b}_\xi + \eta \boldsymbol{b}_\eta + \zeta \boldsymbol{b}_\zeta \right) \times \omega \left[\left(R + \eta \right) \boldsymbol{b}_\xi - \xi \boldsymbol{b}_\eta \right]$$

$$= \omega \left[-\xi^2 \boldsymbol{b}_\zeta - \eta \left(R + \eta \right) \boldsymbol{b}_\zeta + \zeta \left(R + \eta \right) \boldsymbol{b}_\eta + \xi \zeta \boldsymbol{b}_\xi \right]$$

$$= \omega \left[\xi \zeta \boldsymbol{b}_\xi + \zeta \left(R + \eta \right) \boldsymbol{b}_\eta - R \eta \boldsymbol{b}_\zeta - \left(\xi^2 + \eta^2 \right) \boldsymbol{b}_\zeta \right]$$

1.3 Drallsatz

- Integration: $dm = \rho\, dV = \rho\, d\zeta\, dA$

$$\int_K \xi\zeta\, dm = \rho \int_A \left(\int_{-d/2}^{d/2} \xi\zeta\, d\zeta \right) dA = \rho \int_A \left(\xi \int_{-d/2}^{d/2} \zeta\, d\zeta \right) dA$$

$$= \rho \int_A \xi \left[\frac{\zeta^2}{2} \right]_{\zeta=-d/2}^{\zeta=d/2} dA = \rho \int_A \xi \left[\frac{d^2}{8} - \frac{d^2}{8} \right] dA = 0$$

$$\int_K \zeta (R+\eta)\, dm = \rho \int_A \left(\int_{-d/2}^{d/2} (R+\eta)\zeta\, d\zeta \right) dA$$

$$= \rho \int_A \left[(R+\eta) \int_{-d/2}^{d/2} \zeta\, d\zeta \right] dA = 0$$

$$\int_K R\eta\, dm = R \int_K \eta\, dm = R\eta_S m = 0$$

1.3 Drallsatz

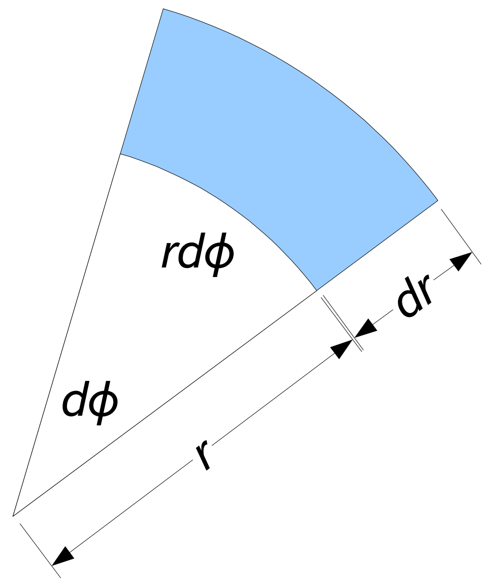
- Das einzige Integral, das nicht verschwindet ist

$$\int_K \left(\xi^2+\eta^2\right) dm = \rho \int_A \left[\int_{-d/2}^{d/2} \left(\xi^2+\eta^2\right) d\zeta \right] dA = \rho \int_A \left[\left(\xi^2+\eta^2\right) \int_{-d/2}^{d/2} d\zeta \right] dA$$

$$= \rho\, d \int_A \left(\xi^2+\eta^2\right) dA$$

- In Polarkoordinaten gilt:

$$\xi = r\cos\phi$$
$$\eta = r\sin\phi$$
$$\xi^2+\eta^2 = r^2$$
$$dA = r\, d\phi\, dr$$



1.3 Drallsatz

- Damit folgt:

$$\int_A \left(\xi^2+\eta^2\right) dA = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^3\, dr \right) d\phi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=R} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4}\, d\phi$$

$$= \frac{1}{2} \pi R^4 = \frac{1}{2} R^2 A$$

- Ergebnis:

$$\boldsymbol{L}_S = -\omega \rho d \cdot \frac{1}{2} R^2 A \, \boldsymbol{b}_\zeta = -\frac{1}{2} \omega R^2 m \, \boldsymbol{b}_\zeta$$