Exzentrischer Stoß

- Allgemeine Stoßvorgänge zwischen zwei Körpern in der Ebene können mit Hilfe des integrierten Impulssatzes und des integrierten Drallsatzes behandelt werden.
- Während des Stoßes treten kurzzeitig große Kräfte auf, die zu einer Änderung der Geschwindigkeiten führen.
- Bekannt sind die Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten vor dem Stoß.
- Gesucht sind die Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoß.
- Der genaue zeitliche Verlauf der Kraft ist nicht bekannt.

Exzentrischer Stoß

1. Idealisierungen
2. Definitionen
3. Integrierter Impuls- und Drallsatz
4. Stoß zwischen freien Körpern
5. Stoß auf gelagerten Körper
6. Rauer Stoß

1. Idealisierungen

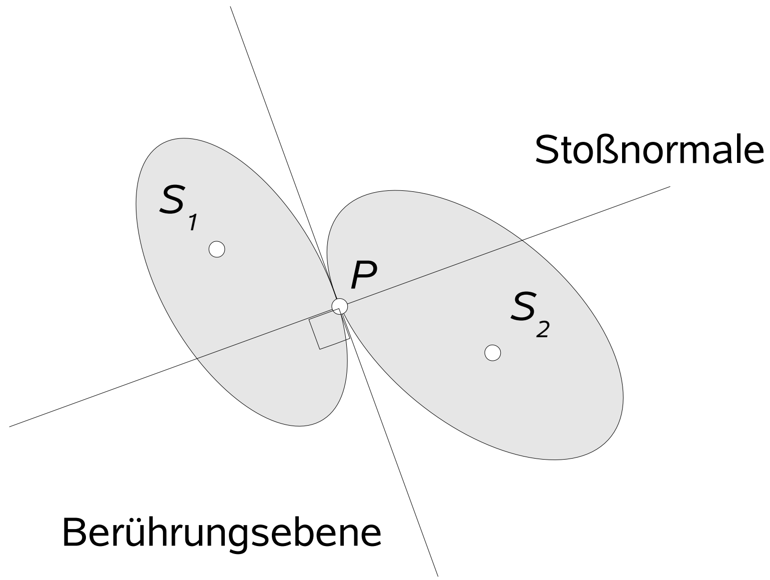
- Idealisierungen sind vereinfachende Annahmen, die getroffen werden, damit ein Problem rechnerisch untersucht werden kann.
- Bei Stoßvorgängen werden folgende Annahmen getroffen:
  - Die Stoßdauer t_s ist so klein, dass Lageänderungen der beiden Körper während der Stoßdauer vernachlässigt werden können.
  - Die an der Berührstelle der Körper auftretenden Kräfte sind so groß, dass während der Stoßdauer alle anderen Kräfte vernachlässigt werden können.

1. Idealisierungen

- Die Verformungen der beiden Körper sind so klein, dass die Bewegungsgesetze für starre Körper angewendet werden können.

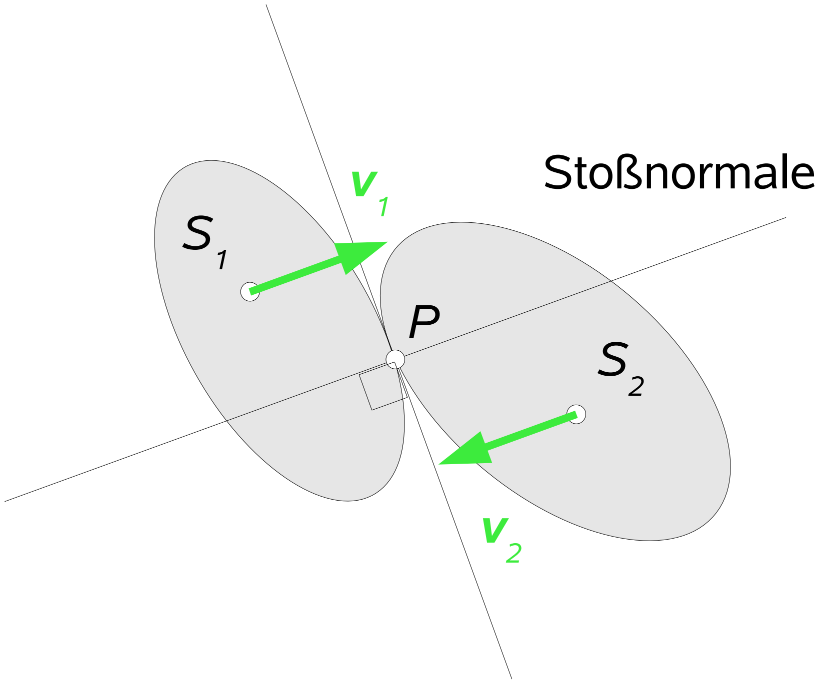
2. Definitionen

- Die Berührungsebene liegt tangential zu den beiden Körpern.
- Der Stoßpunkt *P* liegt in der Berührungsebene.
- Die Stoßnormale geht durch den Stoßpunkt *P* und steht senkrecht auf der Berührungsebene.

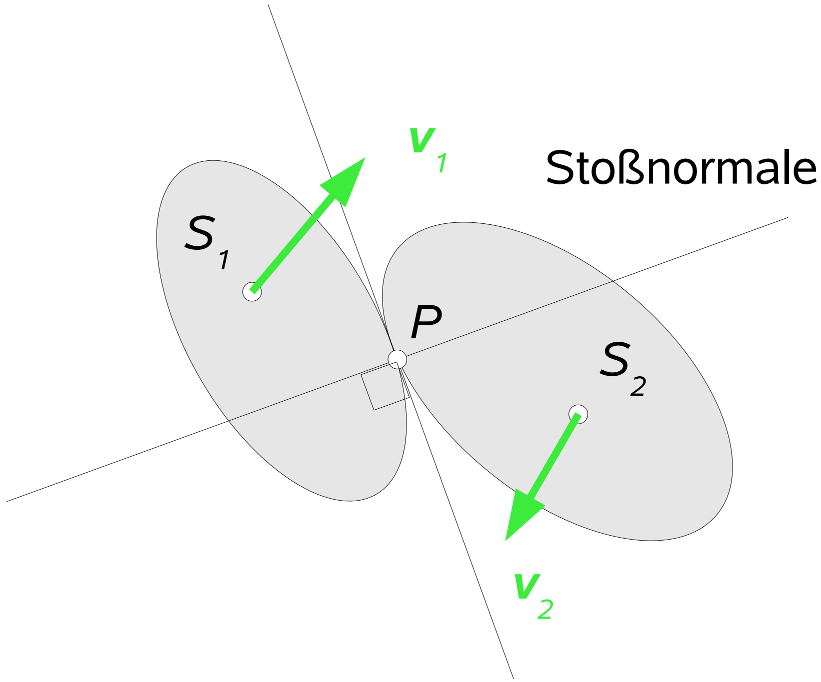


2. Definitionen

- Gerader Stoß:



- Schiefer Stoß:

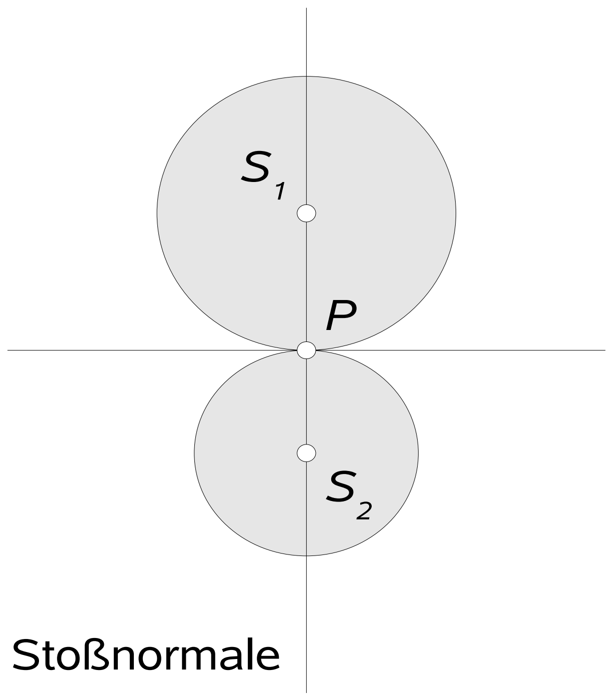


2. Definitionen

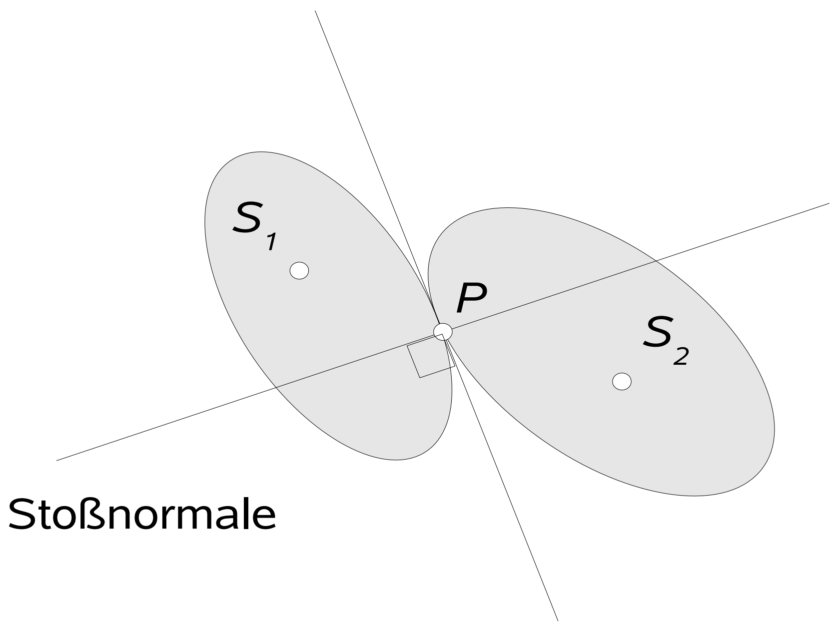
- Beim geraden Stoß haben die Geschwindigkeiten unmittelbar vor dem Stoß die Richtung der Stoßnormalen.
- Beim schiefen Stoß stimmen die Richtungen der Geschwindigkeiten unmittelbar vor dem Stoß nicht mit der Stoßnormalen überein.

2. Definitionen

- Zentrischer Stoß:



- Exzentrischer Stoß:



2. Definitionen

- Beim zentrischen Stoß geht die Stoßnormale durch die beiden Schwerpunkte.
- Beim exzentrischen Stoß geht die Stoßnormale nicht durch die beiden Schwerpunkte.

2. Definitionen

- Glatter Stoß:
  - Reibungskräfte werden vernachlässigt.
  - Die Stoßkräfte wirken in Richtung der Stoßnormalen.
- Rauer Stoß:
  - Reibungskräfte werden berücksichtigt.
  - Es wirken auch Kräfte in der Berührungsebene.

3. Integrierter Impuls- und Drallsatz

- Integrierter Impulssatz:
  - Die Bewegung des Schwerpunktes eines starren Körpers wird durch den Impulssatz beschrieben:

$$m\dot{\boldsymbol{v}}_S = \boldsymbol{F}$$

  - Integration bezüglich der Zeit liefert: $\int_{t_1}^{t_2} m\dot{\boldsymbol{v}}_S \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} \, dt$
  - Mit dem Kraftstoß $\hat{\boldsymbol{F}} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} \, dt$

    lautet der integrierte Impulssatz: $\boxed{m\left(\boldsymbol{v}_S(t_2) - \boldsymbol{v}_S(t_1)\right) = \hat{\boldsymbol{F}}}$

  - Für ebene Probleme folgen daraus die beiden Gleichungen:

$$m\left(v_{Sx}(t_2) - v_{Sx}(t_1)\right) = \hat{F}_x, \quad m\left(v_{Sy}(t_2) - v_{Sy}(t_1)\right) = \hat{F}_y$$

3. Integrierter Impuls- und Drallsatz

- Integrierter Drallsatz:
  - Die Drehung eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt wird durch den Drallsatz beschrieben:

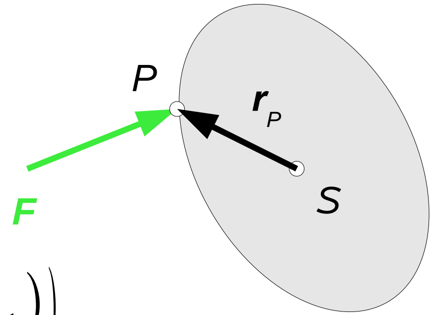
$$\dot{\boldsymbol{L}}_S = \boldsymbol{M}_S$$

  - Integration bezüglich der Zeit liefert: $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \dot{\boldsymbol{L}}_S \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_S \, dt$
  - Für einen Stoß ist die Zeit $t_S = t_2 - t_1$ so klein, dass die Lageänderung des Körpers während dieser Zeit vernachlässigt werden kann.

3. Integrierter Impuls- und Drallsatz

– Daher gilt:

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_S \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{r}_P \times \boldsymbol{F} \, dt = \boldsymbol{r}_P \times \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} \, dt = \boldsymbol{r}_P \times \hat{\boldsymbol{F}}$$



– Mit $\int_{t_1}^{t_2} \dot{\boldsymbol{L}}_S \, dt = \boldsymbol{L}_S(t_2) - \boldsymbol{L}_S(t_1) = \boldsymbol{J}_S \left(\boldsymbol{\omega}(t_2) - \boldsymbol{\omega}(t_1) \right)$

lautet der integrierte Drallsatz:

$$\boxed{\boldsymbol{J}_S \left(\boldsymbol{\omega}(t_2) - \boldsymbol{\omega}(t_1) \right) = \boldsymbol{r}_P \times \hat{\boldsymbol{F}}}$$

– Für eine Drehung um die *z*-Achse folgt daraus:

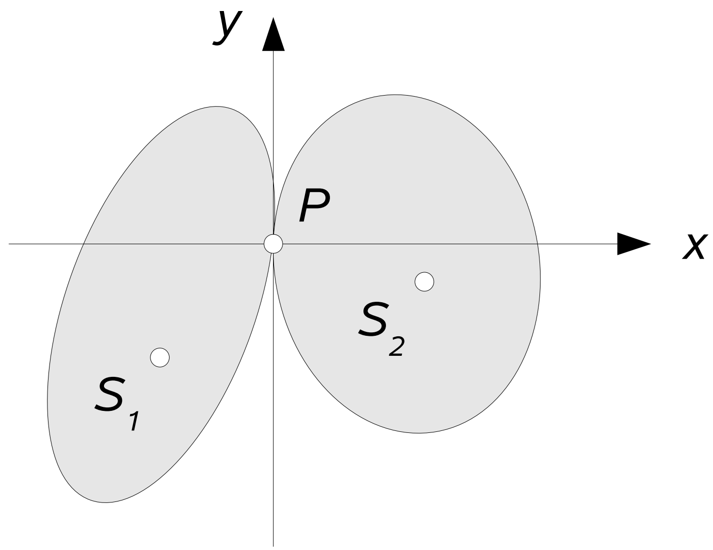
$$J_{Sz} \left(\omega(t_2) - \omega(t_1) \right) = x_P \hat{F}_y - y_P \hat{F}_x$$

4. Stoß zwischen freien Körpern

- Aufgabenstellung:
  - Zwei glatte Körper stoßen aufeinander.
  - Bekannt sind die Massen m_1 und m_2, die Massenträgheitsmomente J_{S1} und J_{S2} , die Schwerpunktsgeschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ sowie die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 vor dem Stoß.
  - Gesucht sind die Schwerpunktsgeschwindigkeiten $\boldsymbol{V}_1$ und $\boldsymbol{V}_2$ sowie die Winkelgeschwindigkeiten Ω_1 und Ω_2 nach dem Stoß.

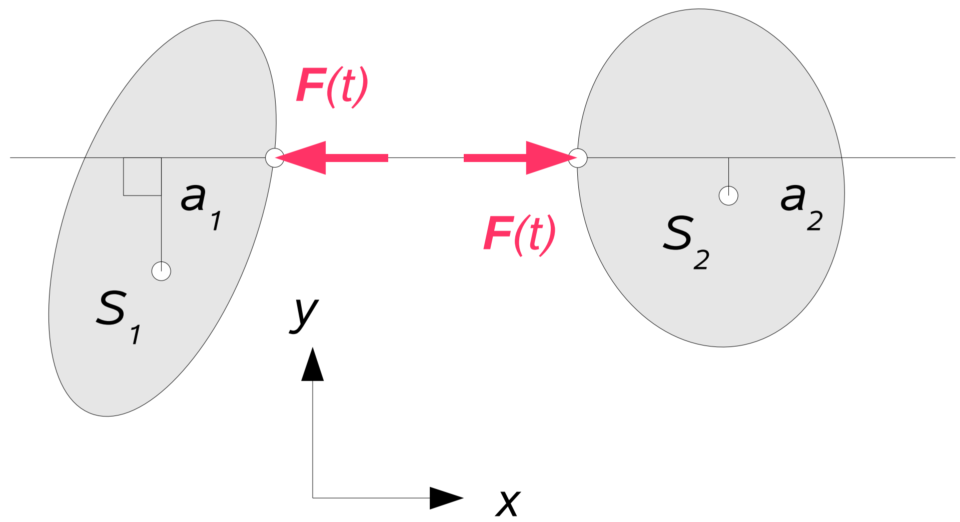
4. Stoß zwischen freien Körpern

- Koordinatensystem:
  - Die *x*-Achse zeigt entlang der Stoßnormalen.
  - Die *y*-Achse liegt in der Berührungsebene.



4. Stoß zwischen freien Körpern

- Aufstellen der Gleichungen:



4. Stoß zwischen freien Körpern

- Integrierter Impulssatz für Körper 1:

$$\begin{aligned} m_1\left(V_{1x}-v_{1x}\right) &= -\hat{F}_x \\ m_1\left(V_{1y}-v_{1y}\right) &= 0 \end{aligned}$$

- Integrierter Drallsatz für Körper 1:

$$J_{S1}\left(\Omega_1-\omega_1\right)=a_1\hat{F}_x$$

- Integrierter Impulssatz für Körper 2:

$$\begin{aligned} m_2\left(V_{2x}-v_{2x}\right) &= \hat{F}_x \\ m_2\left(V_{2y}-v_{2y}\right) &= 0 \end{aligned}$$

- Integrierter Drallsatz für Körper 2:

$$J_{S2}\left(\Omega_2-\omega_2\right)=-a_2\hat{F}_x$$

4. Stoß zwischen freien Körpern

- Damit stehen sechs Gleichungen zur Ermittlung der sieben unbekannten Größen V_{1x}, V_{1y}, V_{2x}, V_{2y}, Ω_1, Ω_2 und $\hat{F}_x$ zur Verfügung.
- Die fehlende Gleichung folgt aus der Stoßbedingung, die zwischen den Geschwindigkeiten im Punkt P besteht:

$$k=-\frac{V_{P1x}-V_{P2x}}{v_{P1x}-v_{P2x}}$$

- Dabei ist k die Stoßzahl.
- Für die Geschwindigkeiten im Punkt P gelten die kinematischen Beziehungen

$$\begin{aligned} v_{P1x} &= v_{1x}-a_1\omega_1 & \qquad v_{P2x} &= v_{2x}-a_2\omega_2 \\ V_{P1x} &= V_{1x}-a_1\Omega_1 & \qquad V_{P2x} &= V_{2x}-a_2\Omega_2 \end{aligned}$$

4. Stoß zwischen freien Körpern

- Auflösen der Gleichungen:
  - Aus dem integrierten Impulssatz in *y*-Richtung folgt:

$$V_{1y} = v_{1y}, \quad V_{2y} = v_{2y}$$

  - Aus dem integrierten Impulssatz in *x*-Richtung folgt:

$$V_{1x} = v_{1x} - \frac{\hat{F}_x}{m_1}, \quad V_{2x} = v_{2x} + \frac{\hat{F}_x}{m_2}$$

  - Aus dem integrierten Drallsatz folgt:

$$\Omega_1 = \omega_1 + \frac{a_1 \hat{F}_x}{J_{S1}}, \quad \Omega_2 = \omega_2 - \frac{a_2 \hat{F}_x}{J_{S2}}$$

  - Damit lassen sich die gesuchten Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten berechnen, wenn der Kraftstoß bekannt ist.

4. Stoß zwischen freien Körpern

- Aus der Stoßbedingung folgt: $k\left(v_{P1x}-v_{P2x}\right)+V_{P1x}-V_{P2x}=0$

- Mit den kinematischen Beziehungen ergibt sich:

$$k\left(v_{1x}-a_1\omega_1-v_{2x}+a_2\omega_2\right)+V_{1x}-a_1\Omega_1-V_{2x}+a_2\Omega_2=0$$

$$\rightarrow\ V_{1x}-V_{2x}-a_1\Omega_1+a_2\Omega_2=-k\left(v_{1x}-v_{2x}-a_1\omega_1-a_2\omega_2\right)$$

- Einsetzen der Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten und dem Kraftstoß führt auf:

$$v_{1x}-v_{2x}-\hat{F}_x\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)-a_1\omega_1+a_2\omega_2-\hat{F}_x\left(\frac{a_1^2}{J_{S1}}+\frac{a_2^2}{J_{S2}}\right)$$
$$=-k\left(v_{1x}-v_{2x}-a_1\omega_1+a_2\omega_2\right)$$

4. Stoß zwischen freien Körpern

- Daraus folgt:

$$\left(1+k\right)\left(v_{1x}-v_{2x}-a_1\omega_1+a_2\omega_2\right)=\hat{F}_x\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{a_1^2}{J_{S1}}+\frac{a_2^2}{J_{S2}}\right)$$

- Ergebnis:

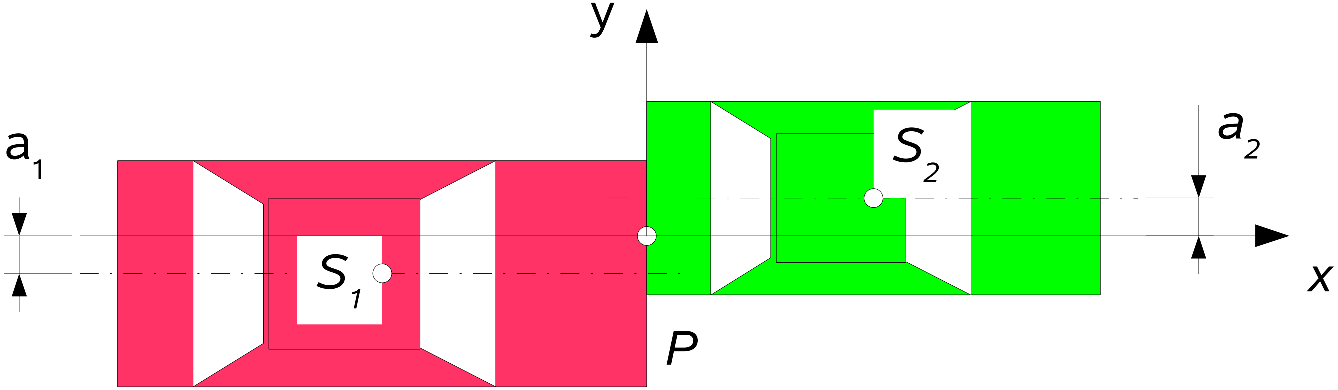
$$\hat{F}_x=\left(1+k\right)\frac{v_{1x}-v_{2x}-a_1\omega_1+a_2\omega_2}{\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}+\dfrac{a_1^2}{J_{S1}}+\dfrac{a_2^2}{J_{S2}}}$$

$$V_{1x}=v_{1x}-\frac{\hat{F}_x}{m_1},\quad V_{1y}=v_{1y},\quad \Omega_1=\omega_1+\frac{a_1\hat{F}_x}{J_{S1}}$$

$$V_{2x}=v_{2x}+\frac{\hat{F}_x}{m_2},\quad V_{2y}=v_{2y},\quad \Omega_2=\omega_2-\frac{a_2\hat{F}_x}{J_{S2}}$$

4. Stoß zwischen freien Körpern

- Beispiel:
  - Ein Fahrzeug fährt seitlich versetzt auf ein langsameres Fahrzeug auf.



4. Stoß zwischen freien Körpern

- Daten für Fahrzeug 1:
  - Masse $m_1 = 2000 kg$
  - Massenträgheitsmoment $J_{S1} = 1500 kgm^2$
  - Geschwindigkeit $v_1 = 180 km/h$
  - Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = 0 s^{-1}$
  - Abstand $a_1 = 0{,}5 m$

- Daten für Fahrzeug 2:
  - Masse $m_2 = 1000 kg$
  - Massenträgheitsmoment $J_{S2} = 500 kgm^2$
  - Geschwindigkeit $v_2 = 140 km/h$
  - Winkelgeschwindigkeit $\omega_2 = 0 s^{-1}$
  - Abstand $a_2 = -0{,}3 m$

4. Stoß zwischen freien Körpern

- Stoßzahl: $k = 0,4$

– Bemerkung:

- Der Wert des Abstandes a_2 ist negativ, da sich der Stoßpunkt P unterhalb des Schwerpunktes S_2 befindet.

– Ergebnisse:

- Kraftstoß: $\hat{F}_x = 8423,6\, Ns$
- Geschwindigkeiten: $V_1 = 164,84\, km/h$, $V_2 = 170,32\, km/h$
- Winkelgeschwindigkeiten: $\Omega_1 = 2,81\, s^{-1}$, $\Omega_2 = 5,05\, s^{-1}$

5. Stoß auf gelagerten Körper

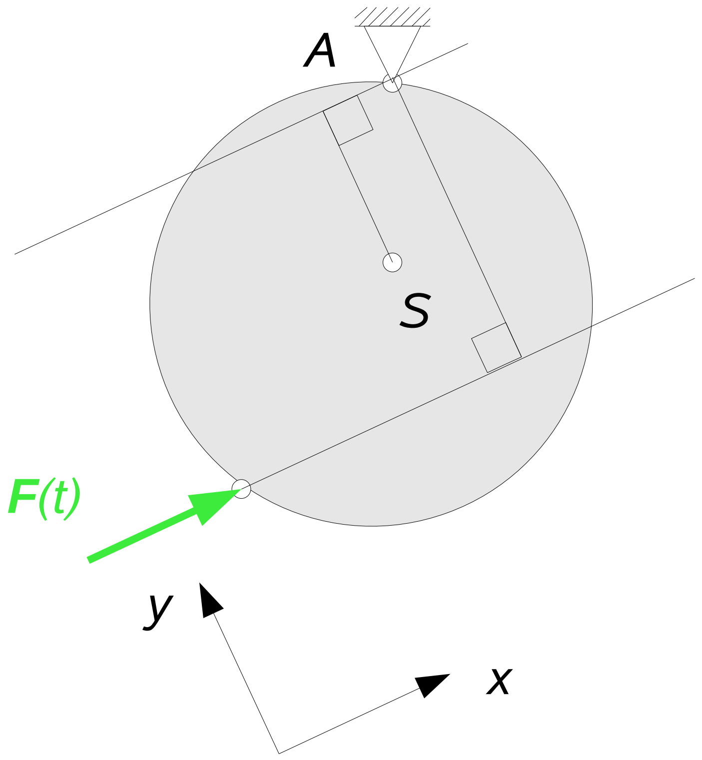
- Beim Stoß auf einen gelagerten Körper treten auch am Lager Stoßkräfte auf.
- Die Stoßkräfte am Lager haben die gleiche Größenordnung wie die Stoßkräfte am Stoßpunkt.
- Alle anderen Kräfte können gegenüber den Stoßkräften vernachlässigt werden.

5. Stoß auf gelagerten Körper

- Aufgabenstellung:
  - Auf einen gelenkig gelagerten Körper wirkt ein Stoß.
  - Der gestoßene Körper ist vor dem Stoß in Ruhe.
  - Bekannt ist der Kraftstoß $\hat{\boldsymbol{F}}$, die Masse *m* und das Massenträgheitsmoment J_A des gestoßenen Körpers.
  - Gesucht sind die Lagerkräfte während des Stoßes und die Winkelgeschwindigkeit des Körpers nach dem Stoß.

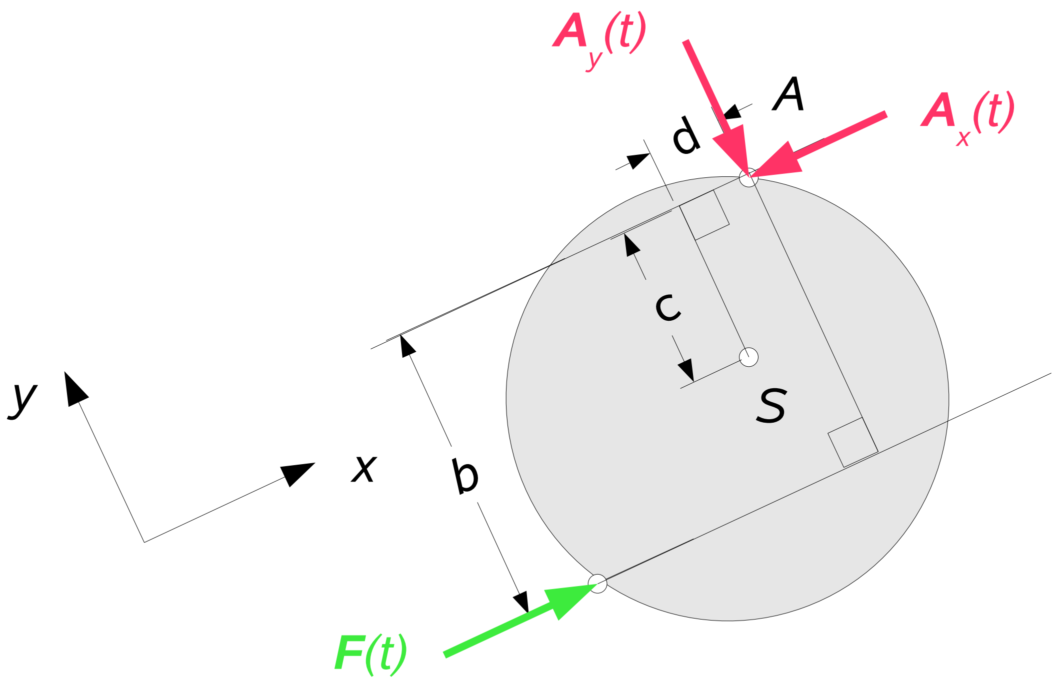
5. Stoß auf gelagerten Körper

- Koordinatensystem:
  - Die *x*-Achse wird so gewählt, dass sie in Richtung des Kraftstoßes zeigt.



5. Stoß auf gelagerten Körper

- Aufstellen der Gleichungen:



5. Stoß auf gelagerten Körper

- Integrierter Impulssatz: $$mV_x = \hat{F} - \hat{A}_x$$ $$mV_y = -\hat{A}_y$$
- Integrierter Drallsatz bezüglich des ortsfesten Punktes *A*: $$J_{Az}\Omega = b\hat{F} \;\rightarrow\; \Omega = \frac{b\hat{F}}{J_{Az}}$$
- Kinematik: $V_x = c\,\Omega\,,\quad V_y = -d\,\Omega$
- Damit lassen sich die Lagerkräfte aus dem integrierten Impulssatz berechnen:

$$\hat{A}_x = \hat{F} - mV_x = \hat{F} - mc\,\Omega$$
$$\hat{A}_y = -mV_y = md\,\Omega$$
$$\longrightarrow$$
$$\hat{A}_x = \hat{F}\left(1 - \frac{mcb}{J_{Az}}\right)$$
$$\hat{A}_y = \hat{F}\,\frac{mdb}{J_{Az}}$$

5. Stoß auf gelagerten Körper

- Stoßmittelpunkt *Π*:
  - Der Stoßmittelpunkt ist der Punkt, in dem der Körper gelagert werden muss, damit im Lager keine Kräfte auftreten.
  - Damit die *x*-Komponente der Lagerkraft verschwindet, muss gelten:

$$1-\frac{mcb}{J_{Az}}=0 \;\rightarrow\; c=\frac{J_{Az}}{mb}$$

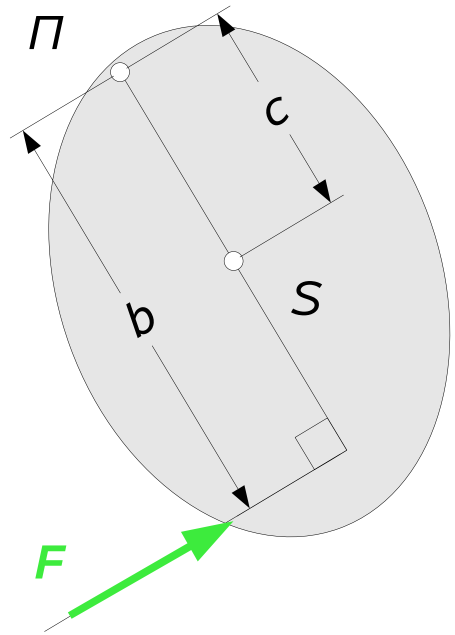
  - Mit dem Trägheitsradius $i_A=\sqrt{\frac{J_{Az}}{m}}$

    folgt: $c=\frac{i_A^2}{b}$

5. Stoß auf gelagerten Körper

- Damit die *y*-Komponente der Lagerkraft verschwindet, muss der Abstand *d* gleich Null sein.
- Der Stoßmittelpunkt liegt auf der zur Stoßkraft senkrechten Geraden durch den Schwerpunkt und hat vom Schwerpunkt den Abstand

$$c = \frac{i_A^2}{b}$$

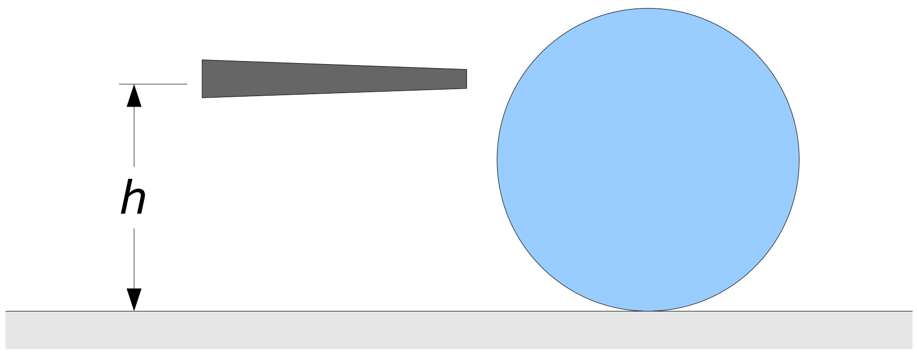


5. Stoß auf gelagerten Körper

- Bei Körpern, auf die Stöße wirken, wird versucht, den Lagerpunkt in den Stoßmittelpunkt zu legen:
  - Hammer
  - Tennisschläger
- Ein Körper, der nicht gelagert ist, dreht sich unmittelbar nach dem Stoß um den Stoßmittelpunkt. Der Stoßmittelpunkt ist der Momentanpol der freien Bewegung unmittelbar nach dem Stoß.

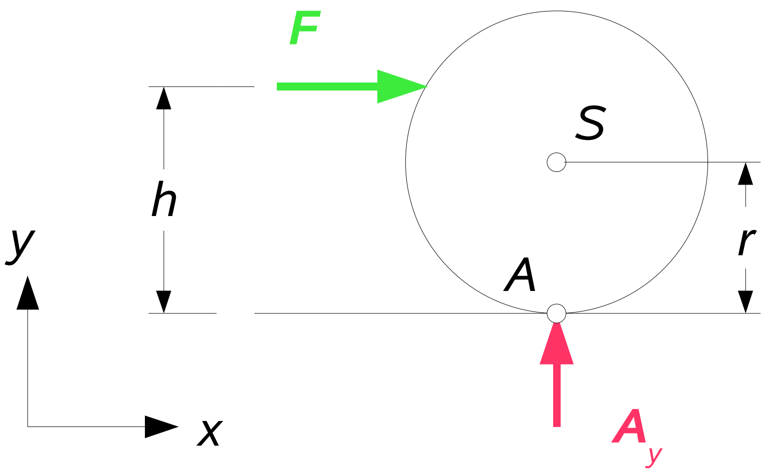
5. Stoß auf gelagerten Körper

- Beispiel:
  - In welcher Höhe *h* muss eine homogene Billardkugel horizontal angestoßen werden, damit sie auf glatter Ebene nach dem Stoß rollt?



5. Stoß auf gelagerten Körper

– Freigeschnittene Billardkugel:



– Da die Ebene glatt ist, muss die Horizontalkraft verschwinden.

5. Stoß auf gelagerten Körper

- Die Horizontalkraft verschwindet, wenn Punkt *A* der Stoßmittelpunkt ist.
- Dann muss gelten: $r = \frac{J_{Az}}{mh} \rightarrow h = \frac{J_{Az}}{mr}$
- Massenträgheitsmoment bezüglich Punkt *A*:

$$J_{Az} = J_{Sz} + m r^2 = \frac{2}{5} m r^2 + m r^2 = \frac{7}{5} m r^2$$

- Ergebnis: $h = \frac{7}{5} r$

6. Rauer Stoß

- Beim Stoß zwischen rauen Körpern wird angenommen, dass die Körper während des Stoßes aneinander haften.
- Die Geschwindigkeitskomponenten am Berührungspunkt *P* in der Berührungsebene sind während des Stoßes und damit auch unmittelbar nach dem Stoß gleich:

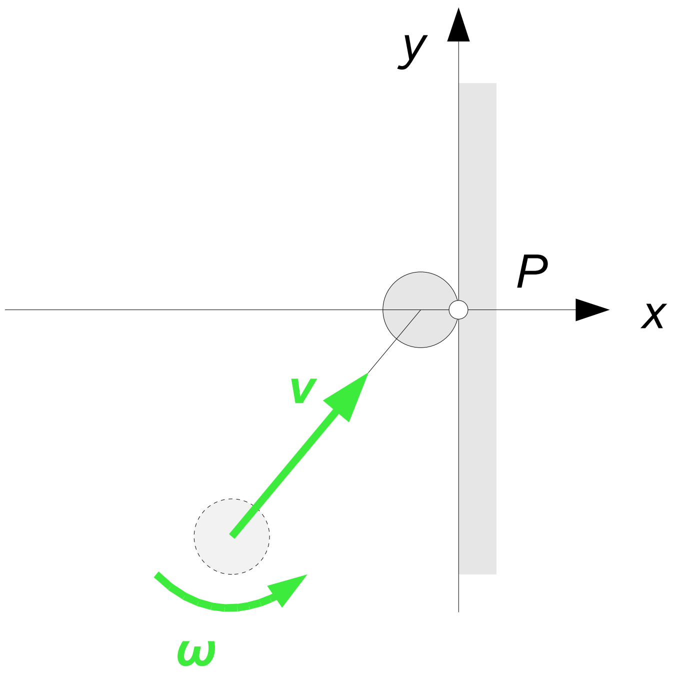
$$V_{P1y} = V_{P2y}$$

6. Rauer Stoß

- Aufgabenstellung:
  - Eine homogene Kugel stößt schief gegen eine raue Wand.
  - Bekannt ist die Masse m, das Massenträgheitsmoment J_S sowie die Schwerpunktsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ und die Winkelgeschwindigkeit ω vor dem Stoß.
  - Gesucht ist die Schwerpunktsgeschwindigkeit $\boldsymbol{V}$ und die Winkelgeschwindigkeit Ω nach dem Stoß.

6. Rauer Stoß

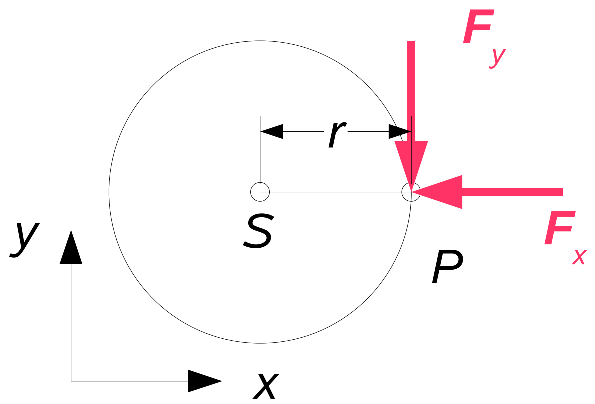
- Koordinatensystem:
  - Die x-Achse steht senkrecht auf der Wand.
  - Die y-Achse ist parallel zur Wand.



6. Rauer Stoß

- Aufstellen der Gleichungen:
  - Integrierter Impulssatz:

$$m\left(V_x - v_x\right) = -\hat{F}_x$$
$$m\left(V_y - v_y\right) = -\hat{F}_y$$



  - Integrierter Drallsatz bezüglich des Schwerpunkts:

$$J_S\left(\Omega - \omega\right) = -r\,\hat{F}_y$$

  - Stoßbedingung: $k = -\dfrac{V_{Px}}{v_{Px}} = -\dfrac{V_x}{v_x} \rightarrow V_x = -k\,v_x$

  - Haftbedingung: $V_{Py} = 0 \rightarrow V_y + r\,\Omega = 0 \rightarrow V_y = -r\,\Omega$

6. Rauer Stoß

- Aus dem integrierten Impulssatz in *y*-Richtung folgt:

$$\hat{F}_y = -m\left(V_y - v_y\right) = m\left(r\,\Omega + v_y\right)$$

- Damit folgt aus dem integrierten Drallsatz:

$$J_S\left(\Omega - \omega\right) = -r\,m\left(r\,\Omega + v_y\right)$$

$$\rightarrow\ \left(J_S + m\,r^2\right)\Omega = J_S\,\omega - m\,r\,v_y \qquad \rightarrow\ \Omega = \frac{J_S\,\omega - m\,r\,v_y}{J_S + m\,r^2}$$

- Mit $J_S = \frac{2}{5} m\,r^2$ folgt:

$$\Omega = \frac{\frac{2}{5} m\,r^2\,\omega - m\,r\,v_y}{\frac{2}{5} m\,r^2 + m\,r^2} = \frac{2}{7}\,\omega - \frac{5}{7}\,\frac{v_y}{r}$$

6. Rauer Stoß

- Ergebnis:

$$\Omega = \frac{2}{7}\omega - \frac{5}{7}\frac{v_y}{r}, \quad V_x = -k\,v_x, \quad V_y = \frac{5}{7}v_y - \frac{2}{7}r\,\omega$$

  – Fall 1: $\omega > \frac{5}{2}\frac{v_y}{r} \rightarrow V_y < 0, \;\; \Omega > 0$

    - Die Kugel prallt nach unten zurück und behält dabei ihre Drehrichtung bei.

  – Fall 2: $\omega < \frac{5}{2}\frac{v_y}{r} \rightarrow V_y > 0, \;\; \Omega < 0$

    - Die Kugel prallt nach oben zurück und ändert dabei ihre Drehrichtung.