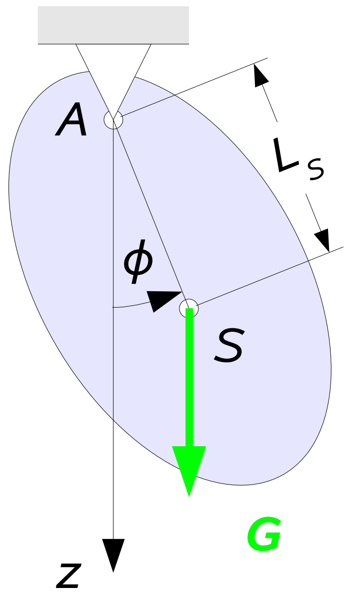
2. Physikalisches Pendel

- Ein physikalisches Pendel besteht aus einem starren Körper, der um eine Achse drehbar gelagert ist.



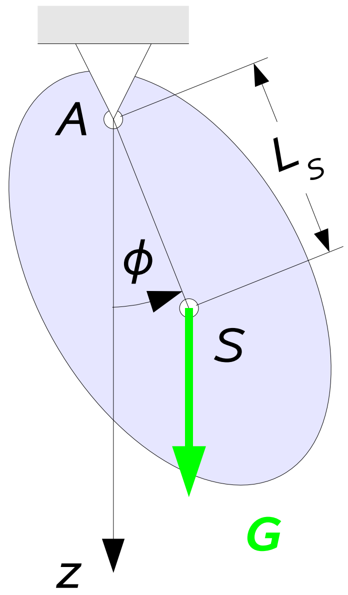
2. Physikalisches Pendel

2.1 Bewegungsgleichung

- Drallsatz bezüglich des ortsfesten Bezugspunktes *A*:

$$J_A \ddot{\phi} = M_A = -G\, L_S \sin\phi = -mg\, L_S \sin\phi$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\ddot{\phi} + \frac{mg\, L_S}{J_A} \sin\phi = 0}$$



2.1 Bewegungsgleichung

- Reduzierte Pendellänge:
  - Die Länge

$$L_r = \frac{J_A}{m L_S}$$

    wird als reduzierte Pendellänge bezeichnet.
  - Ein Fadenpendel mit der Länge L_r hat die gleiche Bewegungsgleichung und damit das gleiche Schwingungsverhalten wie das physikalische Pendel.

2.1 Bewegungsgleichung

– Mit $J_A = J_S + L_S^2 m$

folgt für die reduzierte Pendellänge:

$$L_r = \frac{J_S + L_S^2 m}{m L_S} = \frac{J_S}{m L_S} + L_S$$

– Mit dem Trägheitsradius

$$i_S^2 = \frac{J_S}{m}$$

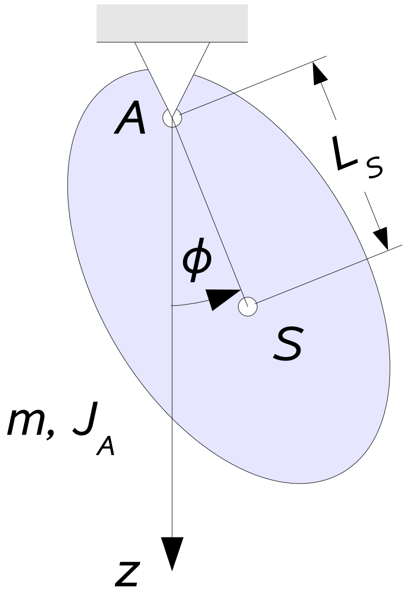
wird daraus

$$\boxed{L_r = L_S + \frac{i_S^2}{L_S}}$$

2.1 Bewegungsgleichung

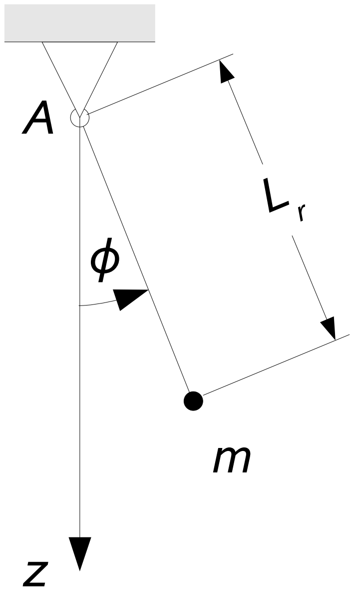
– Physikalisches Pendel:

– Fadenpendel:



$$L_r = L_S + \frac{i_S^2}{L_S}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{L_r} \sin\phi = 0$$



2.2 Kleine Ausschläge

- Linearisierung:
  - Für kleine Winkel ϕ gilt: $\sin\phi \approx \phi$
  - Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{L_r}\phi = 0$$

  - Die Lösung der Schwingungsgleichung ist

$$\phi(t) = \phi_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

2.2 Kleine Ausschläge

- Schwingungskennwerte:
  - Kreisfrequenz: $$\omega=\sqrt{\frac{g}{L_r}}$$
  - Frequenz: $$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L_r}}$$
  - Schwingungsdauer: $$T=\frac{1}{f}=2\pi\sqrt{\frac{L_r}{g}}$$

2.2 Kleine Ausschläge

- Anfangsbedingungen:
  - Die Amplitude ϕ_0 und die Phase α werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \phi_0 \sin\alpha \\ \dot{\phi}(0) &= \omega\,\phi_0 \cos\alpha \end{aligned} \longrightarrow \tan\alpha = \omega\,\frac{\phi(0)}{\dot{\phi}(0)}$$

$$\phi_0 = \sqrt{\phi^2(0) + \frac{1}{\omega^2}\,\dot{\phi}^2(0)}$$

2.2 Kleine Ausschläge

- Bestimmung des Massenträgheitsmoments:
  - Das Massenträgheitsmoment eines Körpers kann durch einen Pendelversuch bestimmt werden, bei dem die Schwingungsdauer gemessen wird.
  - Zunächst berechnet sich die reduzierte Pendellänge zu

$$L_r = \frac{g T^2}{4\pi^2}$$

  - Damit folgt für das Massenträgheitsmoment J_A bezüglich des Aufhängepunktes

$$J_A = m L_S L_r = \frac{m L_S g T^2}{4\pi^2}$$

2.2 Kleine Ausschläge

- Für das Massenträgheitsmoment J_S bezüglich des Schwerpunktes gilt

$$J_S = J_A - m L_S^2 = m L_S \left(\frac{g T^2}{4 \pi^2} - L_S \right)$$

2.2 Kleine Ausschläge

- Minimale Schwingungsdauer:
  - In welchem Abstand vom Schwerpunkt muss ein starrer Körper aufgehängt werden, damit seine Schwingungsdauer minimal wird?
  - Aus

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_r}{g}}$$

folgt, dass die Schwingungsdauer minimal wird, wenn die reduzierte Pendellänge minimal wird.

2.2 Kleine Ausschläge

- Die reduzierte Pendellänge hat ein Minimum für

$$\frac{dL_r}{dL_S}=\frac{d}{dL_S}\left(L_S+\frac{i_S^2}{L_S}\right)=1-\frac{i_S^2}{L_S^2}=0$$

- Die Schwingungsdauer wird also minimal für $L_S=i_S$, d.h. wenn der Abstand des Aufhängepunktes vom Schwerpunkt gleich dem Trägheitsradius ist.
- Die minimale reduzierte Pendellänge ist $L_{rmin}=2i_S$.
- Die minimale Schwingungsdauer ist $T_{min}=2\pi\sqrt{\frac{2i_S}{g}}$.

2.3 Große Ausschläge

- Für große Winkel ϕ kann die Gleichung

$$\ddot{\phi}+\frac{mg\,L_S}{J_A}\sin\phi=0$$

  nicht linearisiert werden.
- Die Lösung dieser Differentialgleichung führt auf ein elliptisches Integral, das nicht in geschlossener Form integriert werden kann.

2.3 Große Ausschläge

- Phasendiagramm:
  - Das Phasendiagramm zeigt die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ in Abhängigkeit vom Winkel ϕ.
  - Diese Abhängigkeit lässt sich aus dem Energieerhaltungssatz ermitteln, ohne dass die Differentialgleichung gelöst werden muss.
  - Für die kinetische Energie des Pendels gilt:

$$E_{kin}=\frac{1}{2}J_A\dot{\phi}^2=\frac{1}{2}m\left(i_S^2+L_S^2\right)\dot{\phi}^2=\frac{1}{2}m\,i_A^2\dot{\phi}^2$$

  - Für die potenzielle Energie bezüglich des Aufhängepunktes gilt:

$$E_{pot}=-mg\,L_S\cos\phi$$

2.3 Große Ausschläge

– Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie muss konstant sein:

$$\frac{1}{2} m \left(i_A^2 \dot{\phi}^2 - 2 g L_S \cos\phi \right) = E_0 \quad \rightarrow \quad \dot{\phi} = \pm \frac{1}{i_A} \sqrt{2 \left(\frac{E_0}{m} + g L_S \cos\phi \right)}$$

– Je nach Wert der Anfangsenergie E_0 ergeben sich unterschiedliche Kurven.

– Nullstellen: $$\frac{E_0}{m} + g L_S \cos\phi_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \cos\phi_0 = -\frac{E_0}{m g L_S}$$

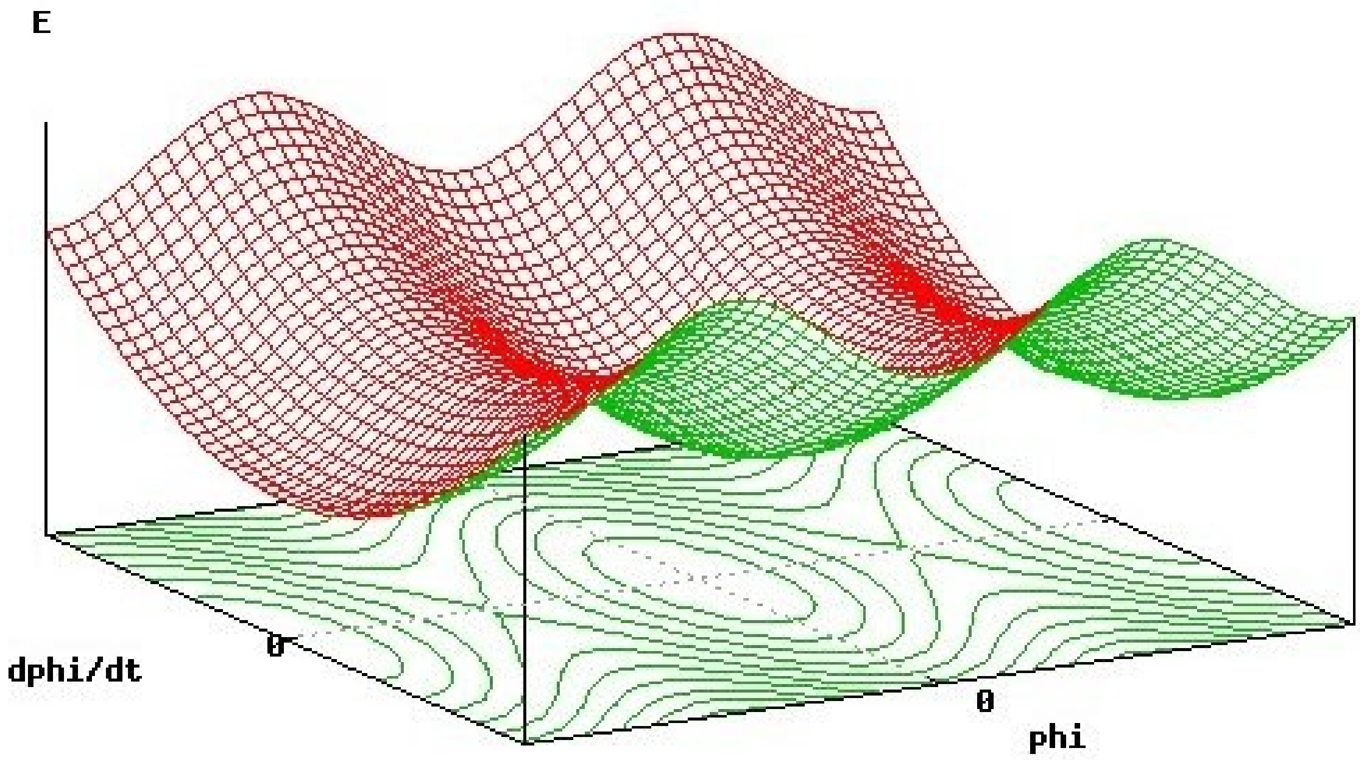
– Nullstellen existieren für

$$-1 \leq \frac{E_0}{m g L_S} < 1 \quad \rightarrow \quad -m g L_S \leq E_0 \leq m g L_S$$

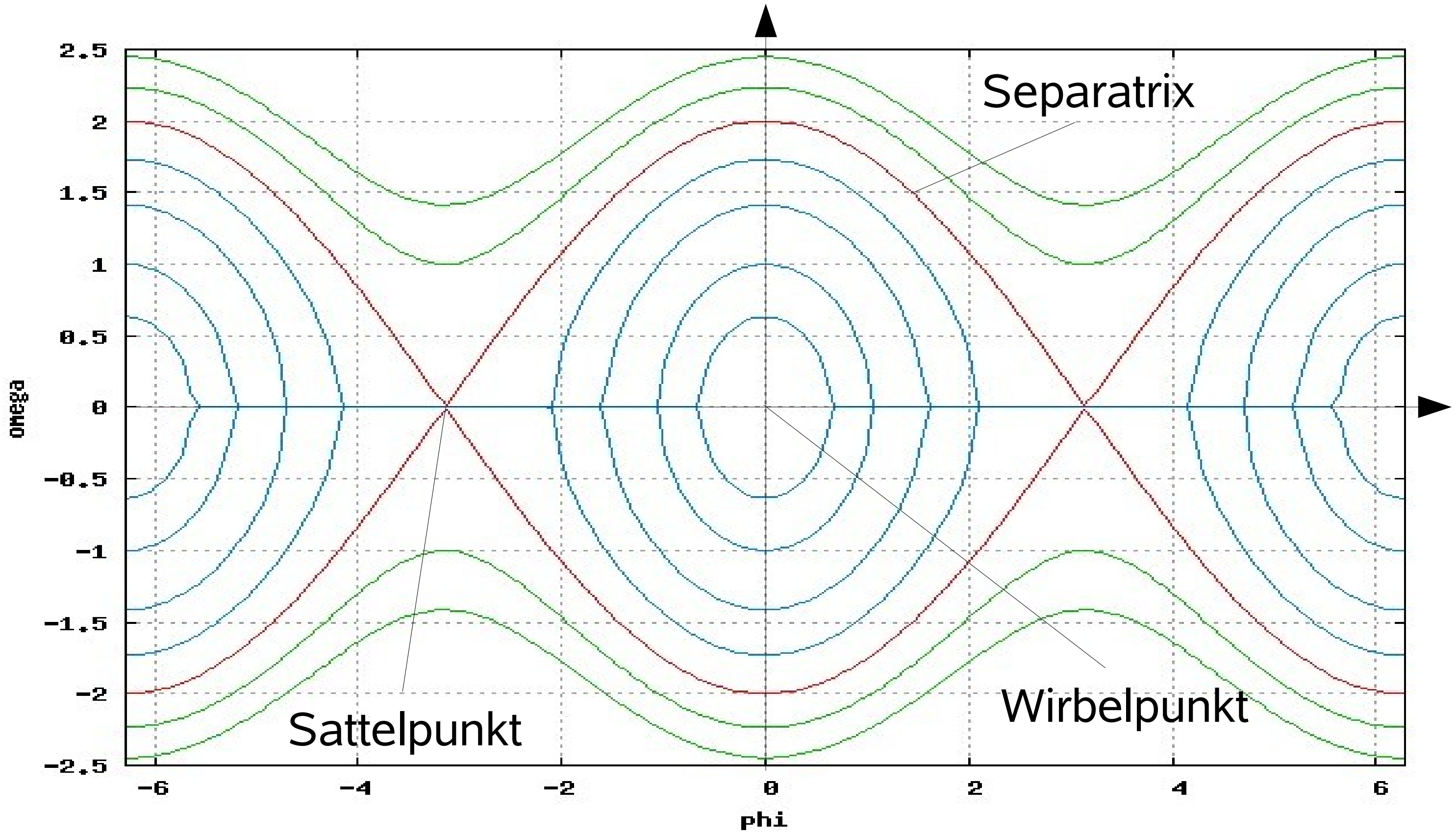
2.3 Große Ausschläge

- Für $E_0 = -mg L_S$ wird $\cos\phi_0 = 1$.
- Die zugehörigen Winkel sind $\phi_0 = 2\pi n$.
- Das Pendel bleibt in Ruhe.
- Für $E_0 = mg L_S$ wird $\cos\phi_0 = -1$.
- Die zugehörigen Winkel sind $\phi_0 = (2n-1)\pi$.
- Diese Winkel entsprechen der instabilen oberen Gleichgewichtslage.
- Für $E_0 > mg L_S$ rotiert das Pendel.

2.3 Große Ausschläge



2.3 Große Ausschläge



2.3 Große Ausschläge

- In den Wirbelpunkten hat die potenzielle Energie ein Minimum. In der Umgebung der Wirbelpunkte schwingt das Pendel.
- In den Sattelpunkten hat die potenzielle Energie ein Maximum.
- Die Sattelpunkte werden erst nach unendlich langer Zeit erreicht.
- Die Separatrix trennt die Schwingungskurven von den Rotationskurven.