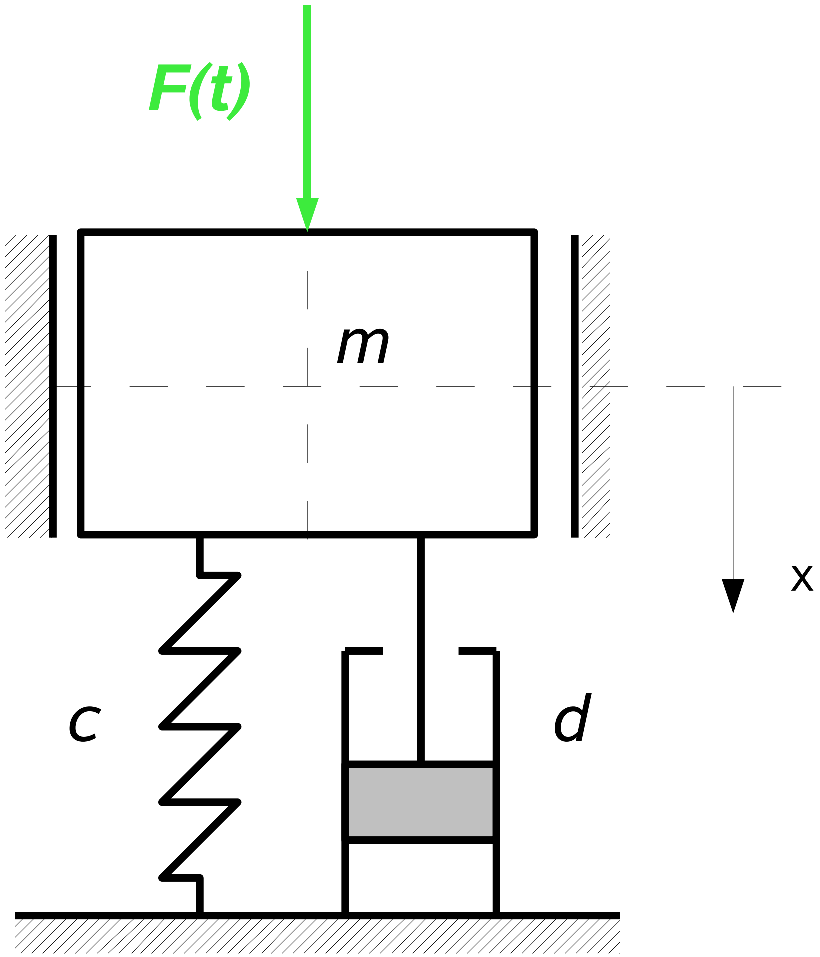
3. Erzwungene gedämpfte Schwingungen

3.1 Schwingungsgleichung



- Bei einer erzwungenen gedämpften Schwingung wird das System durch eine harmonische Last angeregt.
- Erregerkraft:

$$F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$$

- Erregerfrequenz Ω

3.1 Schwingungsgleichung

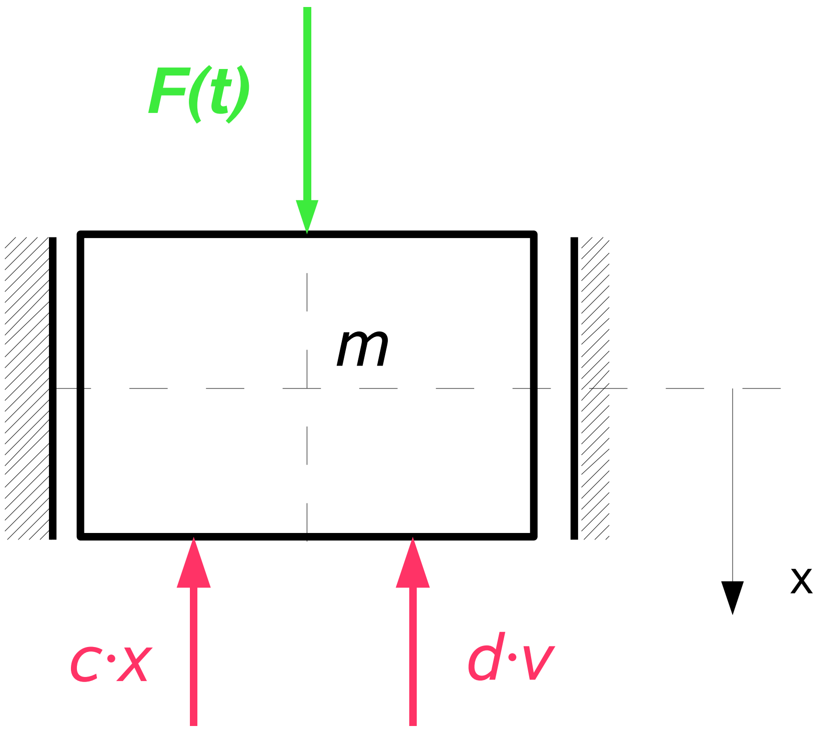
3.1.1 Aufstellen der Gleichung

3.1.2 Lösung der Gleichung

3.1.3 Diskussion der Lösung

3.1.4 Beispiel

3.1.1 Aufstellen der Gleichung



$$v = \dot{x}$$

- Bewegungsgleichung:
  - Impulssatz:

$$m\ddot{x} = F_0 \sin(\Omega t) - d\dot{x} - cx$$

$$\downarrow$$

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = F_0 \sin(\Omega t)$$

  - Division durch *m*:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

3.1.2 Lösung der Gleichung

- Vorbereitung:
  - Mit $m = \frac{c}{\omega^2}$ folgt: $\frac{F_0}{m} = \omega^2 \frac{F_0}{c} = \omega^2 x_s$
  - Dabei ist $x_s = \frac{F_0}{c}$ die statische Lösung.
  - Damit lautet die Schwingungsgleichung:

$$\ddot{x} + 2\delta\,\dot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_s \sin(\Omega t)$$

  - Division durch ω^2 führt mit $\frac{\delta}{\omega} = D$ auf:

$$\frac{1}{\omega^2}\ddot{x} + \frac{2D}{\omega}\dot{x} + x = x_s \sin(\Omega t)$$

3.1.2 Lösung der Gleichung

- Es handelt sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung.
- Die zugehörige homogene Gleichung lautet

$$\frac{1}{\omega^2}\ddot{x}+\frac{2D}{\omega}\dot{x}+x=0$$

- Die allgemeine Lösung setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung x_h der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung x_p der inhomogenen Gleichung.

3.1.2 Lösung der Gleichung

- Homogene Lösung:
  - Die homogene Gleichung ist die Gleichung für eine freie gedämpfte Schwingung.
  - Die homogene Lösung $x_h(t)$ hängt von den Anfangsbedingungen ab und klingt exponentiell mit der Zeit ab.
  - Nach Beendigung dieses Einschwingvorgangs kann $x_h(t)$ gegenüber der partikulären Lösung $x_p(t)$ vernachlässigt werden.
  - $x_p(t)$ wird auch als eingeschwungener Zustand bezeichnet.

3.1.2 Lösung der Gleichung

- Partikuläre Lösung:
  - Ansatz:
$$x_p(t)=x_s V_1 \sin(\Omega t-\phi)$$
$$\dot{x}_p(t)=\Omega x_s V_1 \cos(\Omega t-\phi)$$
$$\ddot{x}_p(t)=-\Omega^2 x_s V_1 \sin(\Omega t-\phi)$$
  - Dynamischer Überhöhungsfaktor V_1 und Phasenwinkel ϕ werden durch Einsetzen bestimmt:

$$-x_s V_1 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 \sin(\Omega t-\phi)+2 D x_s V_1 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right) \cos(\Omega t-\phi)$$
$$+x_s V_1 \sin(\Omega t-\phi)=x_s \sin(\Omega t)$$

3.1.2 Lösung der Gleichung

– Mit $\sin(\Omega t-\phi)=\sin(\Omega t)\cos\phi-\cos(\Omega t)\sin\phi$

$\cos(\Omega t-\phi)=\cos(\Omega t)\cos\phi+\sin(\Omega t)\sin\phi$

folgt:

$$\left[-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\left(\sin(\Omega t)\cos\phi-\cos(\Omega t)\sin\phi\right)\right.$$
$$+2D\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\left(\cos(\Omega t)\cos\phi+\sin(\Omega t)\sin\phi\right)$$
$$\left.+\left(\sin(\Omega t)\cos\phi-\cos(\Omega t)\sin\phi\right)\right]V_1=\sin(\Omega t)$$

– Mit dem Frequenzverhältnis $\eta = \Omega / \omega$ ergibt sich durch Ordnen

$$\left[\left(-\eta^2\cos\phi+2D\eta\sin\phi+\cos\phi\right)V_1-1\right]\sin(\Omega t)$$
$$+\left(\eta^2\sin\phi+2D\eta\cos\phi-\sin\phi\right)V_1\cos(\Omega t)=0$$

3.1.2 Lösung der Gleichung

- Diese Gleichung ist nur dann für alle *t* erfüllt, wenn beide Klammerausdrücke verschwinden.
- Gleichung 1: $$V_1 \left[(1-\eta^2)\cos\phi + 2D\eta\sin\phi \right] = 1$$
- Gleichung 2: $$(\eta^2-1)\sin\phi + 2D\eta\cos\phi = 0$$
- Aus der 2. Gleichung folgt:

$$\tan\phi = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}$$

3.1.2 Lösung der Gleichung

- Aus Gleichung 1:

$$V_1\left(1-\eta^2\right)\left(1+\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\tan\phi\right)=\frac{1}{\cos\phi}=\sqrt{1+\tan^2\phi}$$

- Mit Gleichung 2:

$$V_1\left(1-\eta^2\right)\left[1+\left(\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\right)^2\right]=\sqrt{1+\left(\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\right)^2}$$

$$\rightarrow\quad V_1=\frac{1}{1-\eta^2}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+4D^2\eta^2}}$$

3.1.2 Lösung der Gleichung

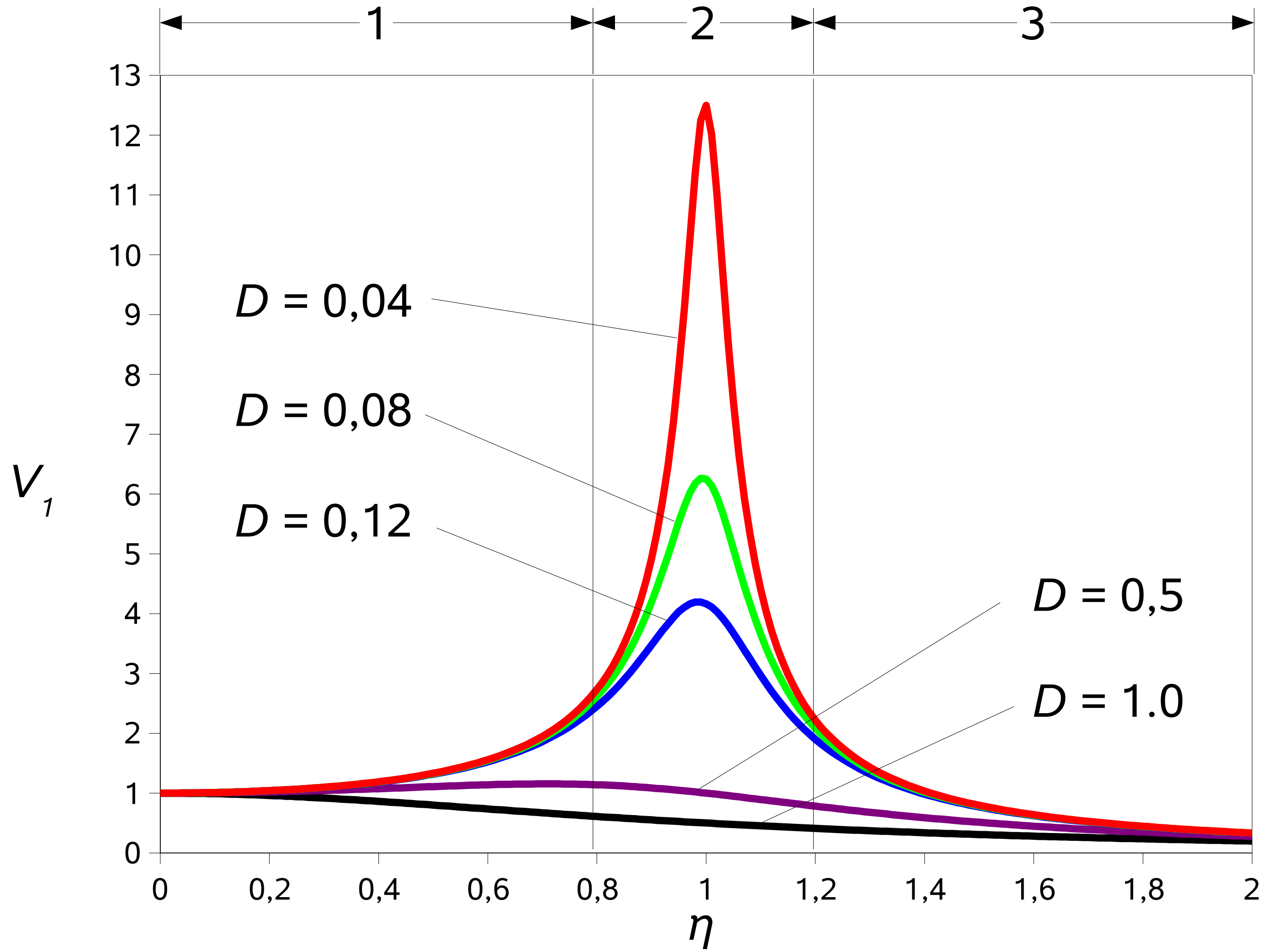
- Ergebnis:
  - Dynamischer Überhöhungsfaktor:

$$V_1(\eta)=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+4D^2\eta^2}}$$

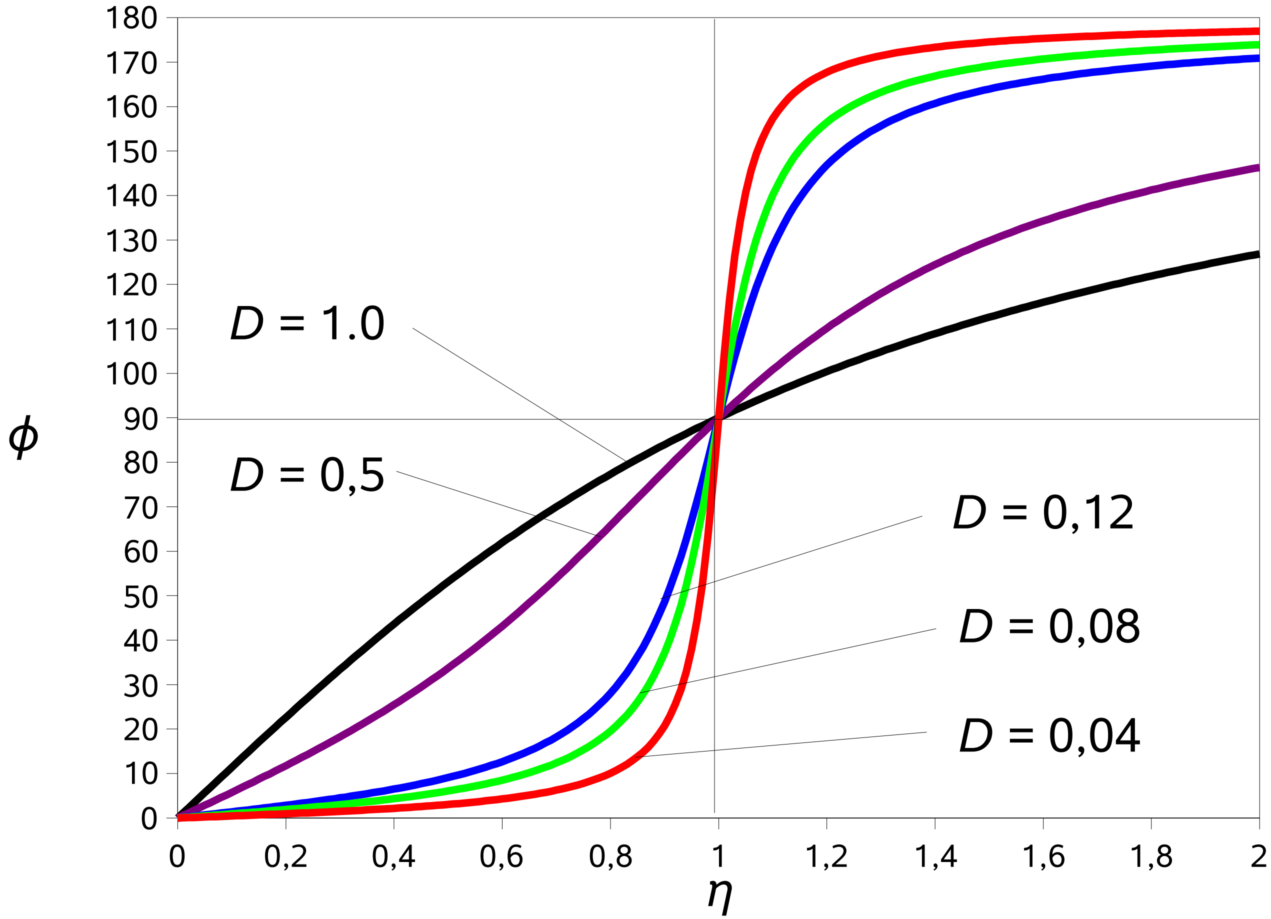
  - Phasenwinkel:

$$\phi(\eta)=\arctan\left(\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\right)$$

3.1.2 Lösung der Gleichung



3.1.2 Lösung der Gleichung



3.1.3 Diskussion der Lösung

- Bereich 1: η < 0,8: unterkritisch
  - Bei schwacher Dämpfung (*D* < 10%) hat die Dämpfung praktisch keinen Einfluss.
  - Die Verschiebung ist in Phase mit der Anregung.
  - Es gilt in guter Näherung:

$$V_1 \approx \frac{1}{1-\eta^2}$$

  - Für η < 1/3 erhält man

$$V_1 < \frac{1}{1-(1/3)^2} = \frac{1}{1-1/9} = \frac{9}{8} = 1{,}125$$

  - Für η < 0,3 können Dämpfungs- und Trägheitskraft vernachlässigt werden: Quasistatische Lösung

3.1.3 Diskussion der Lösung

$$\underbrace{-x_s V_1 \eta^2 \sin(\Omega t - \phi)}_{\text{Trägheitskraft}} + \underbrace{2 D x_s V_1 \eta \cos(\Omega t - \phi)}_{\text{Dämpferkraft}} +$$

$$\boxed{\underbrace{x_s V_1 \sin(\Omega t - \phi)}_{\text{Federkraft}} = x_s \sin(\Omega t)}$$

3.1.3 Diskussion der Lösung

- Bereich 2: 0,8 < η < 1,2: kritisch
  - Dieser Bereich wird wesentlich von der Dämpfung beeinflusst.
  - Die Verschiebung hat eine Phasenverschiebung von 90° gegenüber der Anregung.
  - Die Geschwindigkeit ist in Phase mit der Anregung.
  - Trägheits- und Federkraft sind im Gleichgewicht. Die Anregung ist im Gleichgewicht mit der Dämpfungskraft.
  - Den Zustand η = 1 nennt man Resonanz.
    - Resonanzfrequenz: $f=\omega/2\pi$

3.1.3 Diskussion der Lösung:

- Bei η = 1 sind Federkraft und Trägheitskraft entgegengesetzt gleich groß:

$$\overbrace{-x_s V_1 \sin(\Omega t-\phi)}^{\text{Trägheitskraft}}+\overbrace{x_s V_1 \sin(\Omega t-\phi)}^{\text{Federkraft}}+$$

$$\boxed{\underbrace{2 D x_s V_1 \cos(\Omega t-\pi/2)}_{\text{Dämpferkraft}}=x_s \sin(\Omega t)}$$

3.1.3 Diskussion der Lösung

– Maximum der Überhöhung: $R(\eta)=\left(1-\eta^2\right)^2+4D^2\eta^2=Min.$

$$0=\frac{dR}{d\eta}=2(1-\eta^2)\cdot(-2\eta)+4D^2\cdot(2\eta)$$

$$\eta_{max}^2-1+2D^2=0 \quad \rightarrow \quad \eta_{max}=\sqrt{1-2D^2}$$

- Die Frequenz, bei der das Maximum auftritt, ist niedriger als die Frequenz des gedämpften Schwingers.
- Für $D\geq\sqrt{(2)}/2$ kann kein Maximum auftreten.
- Für kleine Werte der Dämpfung gilt:

$$\eta_{max}\approx 1,\ \ V_{1max}\approx\frac{1}{2D}$$

3.1.3 Diskussion der Lösung

- Halbwertsbreite:
  - Gesucht werden die Erregerfrequenzen, bei denen das Quadrat des dynamischen Überhöhungsfaktors gleich der Hälfte des Quadrats des maximalen Überhöhungsfaktors ist.
  - Dabei wird vorausgesetzt, dass die Dämpfung klein ist (*D* < 10%).
  - Bedingung:

$$2 = \frac{V_{1max}^2}{V_1^2(\eta)} = \frac{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4D^2\eta^2}{4D^2}$$

$$\rightarrow \quad 8D^2 = 1 - 2\eta^2 + \eta^4 + 4D^2\eta^2$$

3.1.3 Diskussion der Lösung

- Lösung: $\eta^4 - 2\left(1-2D^2\right)\eta^2 + \left(1-8D^2\right) = 0$

$$\eta_{1/2}^2 = 1-2D^2 \pm \sqrt{\left(1-2D^2\right)^2 - \left(1-8D^2\right)} = 1-2D^2 \pm \sqrt{4D^2\left(1+D^2\right)}$$
$$= 1-2D^2 \pm 2D\sqrt{1+D^2}$$

- Näherung für $D^2 \ll 1$:

$$\eta_{1/2}^2 \approx 1 \pm 2D \;\rightarrow\; \eta_1 \approx 1-D, \;\; \eta_2 \approx 1+D$$

- Der Bereich zwischen η_1 und η_2 wird als Halbwertsbreite bezeichnet.
- Die Halbwertsbreite erlaubt eine genauere Eingrenzung des kritischen Bereichs.

3.1.3 Diskussion der Lösung

- Bereich 3: η > 1,2: überkritisch
  - Bei schwacher Dämpfung (D < 10%) hat die Dämpfung praktisch keinen Einfluss.
  - Die Verschiebung hat eine Phasenverschiebung von 180° gegenüber der Anregung.
  - Die Beschleunigung ist in Phase mit der Anregung.
  - Es gilt in guter Näherung: $V_1 \approx \dfrac{1}{\eta^2 - 1}$
  - Für η > 3 erhält man: $V_1 < \dfrac{1}{9-1} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$
  - Für η > 3 ist die Trägheitskraft groß gegenüber der Feder- und der Dämpferkraft.

3.1.3 Diskussion der Lösung

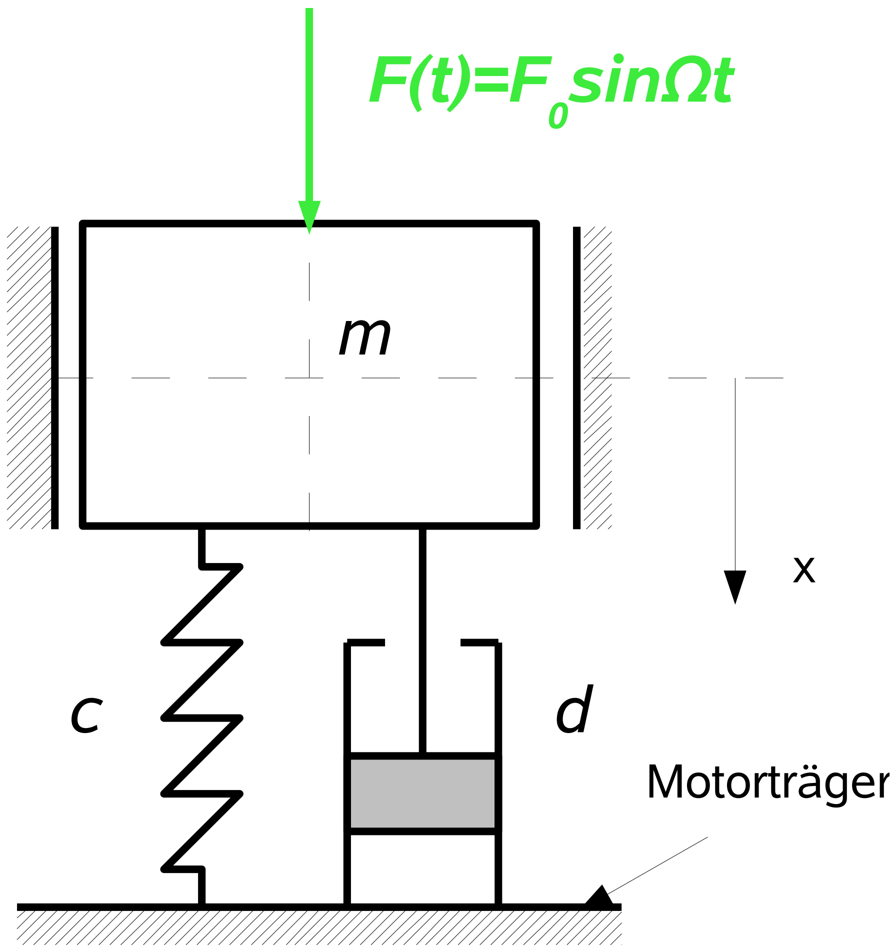
$$\overbrace{x_s V_1 \sin(\Omega t - \phi)}^{\text{Federkraft}} + \overbrace{2 D x_s V_1 \eta \cos(\Omega t - \phi)}^{\text{Dämpferkraft}}$$

$$\boxed{\underbrace{- x_s V_1 \eta^2 \sin(\Omega t - \phi)}_{\text{Trägheitskraft}} = x_s \sin(\Omega t)}$$

3.1.3 Diskussion der Lösung

- Bei Vernachlässigung der Dämpfung gelten folgende Vereinfachungen:
  - Überhöhungsfaktor: $V_1(\eta) = \frac{1}{\left|1-\eta^2\right|}$
  - Phasenwinkel: $\phi(\eta) = \begin{cases} 0° & \text{für} \quad \eta < 1 \\ 180° & \text{für} \quad \eta > 1 \end{cases}$
  - Außerhalb des kritischen Bereichs kann bei sehr schwach gedämpften Systemen (*D* < 5%) die Dämpfung in der Regel vernachlässigt werden.

3.1.4 Beispiel



- Motormodell:
  - Gegeben:
    - Masse m
    - Lehrsches Dämpfungsmaß
    - statische Einfederung x_G unter Eigengewicht
    - Lastamplitude F_0

3.1.4 Beispiel

- Für den eingeschwungenen Zustand sollen für zwei Drehzahlen n_1 und n_2 bestimmt werden:
  - Maximale Verschiebung des Motors
  - Maximale Beschleunigung des Motors
  - Maximale Kraft auf den Motorträger
- Zahlenwerte:
  - Motormasse $m = 1000kg$
  - Einfederung unter Eigengewicht $x_G = 10mm$
  - Lehrsches Dämpfungsmaß $D = 2\%$
  - Drehzahlen $n_1 = 150U/min$, $n_2 = 1000U/min$
  - Lastamplitude: $F_0(n_1) = 500N$, $F_0(n_2) = 5000N$

3.1.4 Beispiel

- Eigenkreisfrequenzen:
  - Ungedämpfte Schwingung: $\omega=\sqrt{\frac{g}{x_G}}=\sqrt{\frac{9810\,mm}{10\,mm\cdot s^2}}=31{,}32\,\frac{1}{s}$
  - Gedämpfte Schwingung:

$$\omega_d=\omega\sqrt{1-D^2}=31{,}32\frac{1}{s}\sqrt{1-0{,}02^2}=31{,}31\,\frac{1}{s}$$

- Federsteifigkeit:

$$c=\omega^2 m=981\,\frac{1}{s^2}\cdot 1000\,kg=981\,\frac{N}{mm}$$

3.1.4 Beispiel

- Erregerfrequenzen:
  - Drehzahl n = Frequenz in 1/*min* : $\Omega = 2\pi \frac{n}{60} = \frac{\pi}{30} \cdot n$
  - Damit: $\Omega_1 = \frac{\pi}{30} \cdot 150 \frac{1}{s} = 15{,}71 \frac{1}{s}$

    $\Omega_2 = \frac{\pi}{30} \cdot 1000 \frac{1}{s} = 104{,}7 \frac{1}{s}$
  - Frequenzverhältnisse: $\eta_1 = \frac{\Omega_1}{\omega} = \frac{15{,}71}{31{,}32} = 0{,}5016$

    $\eta_2 = \frac{\Omega_2}{\omega} = \frac{104{,}7}{31{,}32} = 3{,}343$

3.1.4 Beispiel

- Überhöhungsfaktoren:
  - exakt:

$$V_1(\eta_1)=\frac{1}{\sqrt{(1-0{,}5016^2)^2+4\cdot(0{,}02\cdot 0{,}5016)^2}}=\underline{1{,}336}$$

$$V_1(\eta_2)=\frac{1}{\sqrt{(1-3{,}343^2)^2+4\cdot(0{,}02\cdot 3{,}343)^2}}=\underline{0{,}09827}$$

  - aus Näherung:

$$V_1(\eta_1)\approx\frac{1}{1-0{,}5016^2}=\underline{1{,}336}\,,\quad V_1(\eta_2)\approx\frac{1}{3{,}343^2-1}=\underline{0{,}09827}$$

3.1.4 Beispiel

- Maximale Verschiebung des Motors:

$$x(\eta, t) = x_s V_1(\eta) \sin(\Omega t - \phi) \rightarrow x_{max}(\eta) = x_s V_1(\eta)$$

  - Drehzahl n_1 :

$$x_{s1} = \frac{500\, N \cdot mm}{981\, N} = \underline{0{,}5097\, mm}$$

$$x_{max}(\eta_1) = 0{,}5097\, mm \cdot 1{,}336 = \underline{0{,}6809\, mm}$$

  - Drehzahl n_2 :

$$x_{s2} = \frac{5000\, N \cdot mm}{981\, N} = \underline{5{,}097\, mm}$$

$$x_{max}(\eta_2) = 5{,}097\, mm \cdot 0{,}09827 = \underline{0{,}5009\, mm}$$

3.1.4 Beispiel

- Maximale Beschleunigung des Motors:

$$\ddot{x}(\eta, t) = -x_s V_1(\eta)\, \Omega^2 \sin(\Omega t - \phi)$$

$$\rightarrow \quad \ddot{x}_{max}(\eta) = x_s V_1(\eta)\, \Omega^2 = x_{max}(\eta)\, \Omega^2$$

  - Drehzahl n_1 :

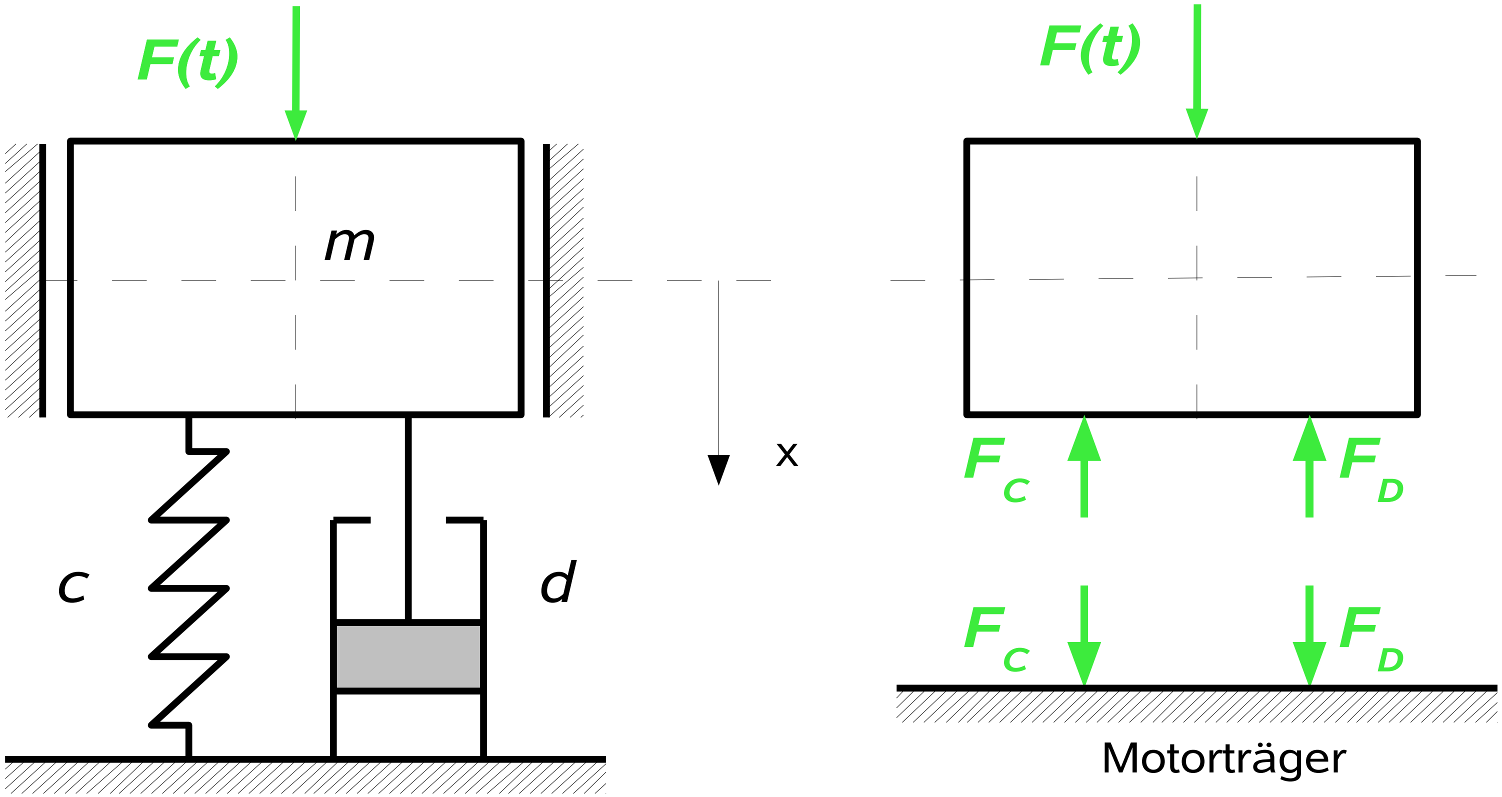
$$\ddot{x}_{max}(\eta_1) = 0{,}6809\, mm \cdot (15{,}71)^2 \frac{1}{s^2} = 168{,}0 \frac{mm}{s^2} = \underline{0{,}1680 \frac{m}{s^2}}$$

  - Drehzahl n_2 :

$$\ddot{x}_{max}(\eta_2) = 0{,}5009\, mm \cdot (104{,}7)^2 \frac{1}{s^2} = 5491 \frac{mm}{s^2} = \underline{5{,}491 \frac{m}{s^2}}$$

3.1.4 Beispiel

- Kraft auf Motorträger:



3.1.4 Beispiel

- Kraft auf Träger: $F_T = F_C + F_D = c\,x + d\,\dot{x}$

$$F_T(\eta, t) = c\,x_s V_1(\eta)\sin(\Omega t - \phi) + d\,x_s V_1(\eta)\,\Omega\cos(\Omega t - \phi)$$

- Mit $x_s = \frac{F_0}{c}, \quad d\,x_s = \frac{d}{c} F_0 = \frac{d}{\omega^2 m} F_0 = \frac{2D}{\omega} F_0$

folgt: $F_T(\eta, t) = F_0 V_1(\eta)\left(\sin(\Omega t - \phi) + 2D\eta\cos(\Omega t - \phi)\right)$

- Für die Amplitude gilt:

$$F_{T\,max} = F_0 V_1(\eta)\sqrt{1 + 4D^2\eta^2}$$

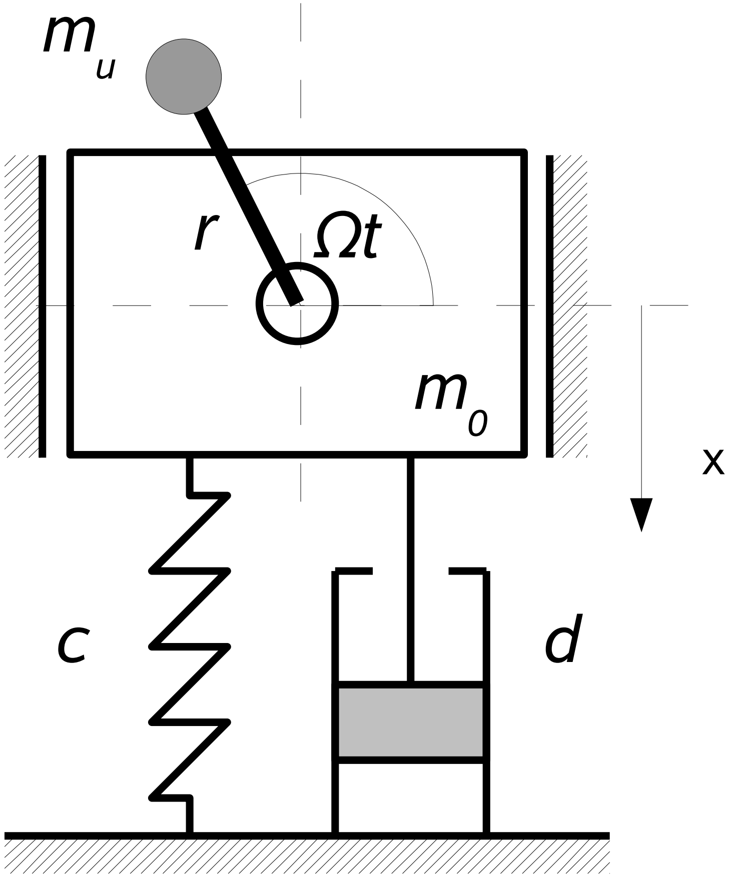
3.1.4 Beispiel

– Ergebnis:

$$F_{Tmax}(\eta_1) = 500\,N \cdot 1{,}336 \cdot \sqrt{1+4\cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}5016^2} = \underline{668{,}1\,N}$$

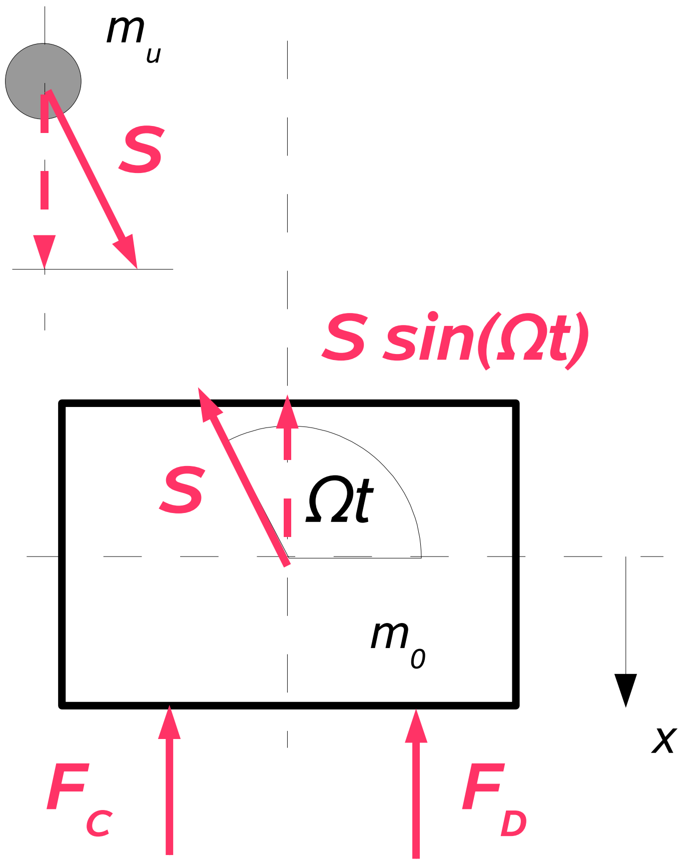
$$F_{Tmax}(\eta_2) = 5000\,N \cdot 0{,}09827 \cdot \sqrt{1+4\cdot 0{,}02^2 \cdot 3{,}343^2} = \underline{495{,}7\,N}$$

3.2 Unwuchtanregung



- Rotierende Unwucht:
  - Die Masse m_0 wird durch die Zentrifugalkraft der rotierenden Masse m_u zu Schwingungen angeregt.
  - Beispiele:
    - Motor
    - Rad
    - Rüttler

3.2 Unwuchtanregung



- Schwingungsgleichung:
  - Kinematik:

$$x_u = x - r \sin(\Omega t)$$
$$\ddot{x}_u = \ddot{x} + r\,\Omega^2 \sin(\Omega t)$$

  - Impulssatz für Unwucht:

$$m_u \ddot{x}_u = S \sin(\Omega t)$$

  - Impulssatz für Schwinger:

$$m_0 \ddot{x} = -F_C - F_D - S \sin(\Omega t)$$

  - Kraftgesetze:

$$F_C = c\,x\,, \quad F_D = d\,\dot{x}$$

3.2 Unwuchtanregung

– Impulssatz für Unwucht und Kraftgesetze in Impulssatz für Schwinger eingesetzt:

$$m_0 \ddot{x} = -c\,x - d\,\dot{x} - m_u \left(\ddot{x} + r\,\Omega^2 \sin(\Omega t) \right)$$

$$\rightarrow \quad (m_0 + m_u)\,\ddot{x} + d\,\dot{x} + c\,x = -m_u\, r\,\Omega^2 \sin(\Omega t)$$

– Mit der Gesamtmasse $m = m_0 + m_u$ folgt:

$$m\,\ddot{x} + d\,\dot{x} + c\,x = -m_u\, r\,\Omega^2 \sin(\Omega t)$$

– Division durch die Gesamtmasse ergibt:

$$\ddot{x} + 2\,\delta\,\dot{x} + \omega^2 x = -x_r\,\Omega^2 \sin(\Omega t)$$

mit

$$x_r = \frac{m_u}{m} r$$

3.2 Unwuchtanregung

- Lösung:
  - Diese Schwingungsgleichung unterscheidet sich nur durch die rechte Seite von der bereits behandelten Schwingungsgleichung.
  - Mit $$x_s(\Omega) = -x_r \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 = -x_r \eta^2$$

    lautet die partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} x_p(\eta, t) &= -x_r \eta^2 V_1(\eta) \sin(\Omega t - \phi) \\ &= -x_r V_3(\eta) \sin(\Omega t - \phi) \end{aligned}$$

3.2 Unwuchtanregung

– Ergebnis:

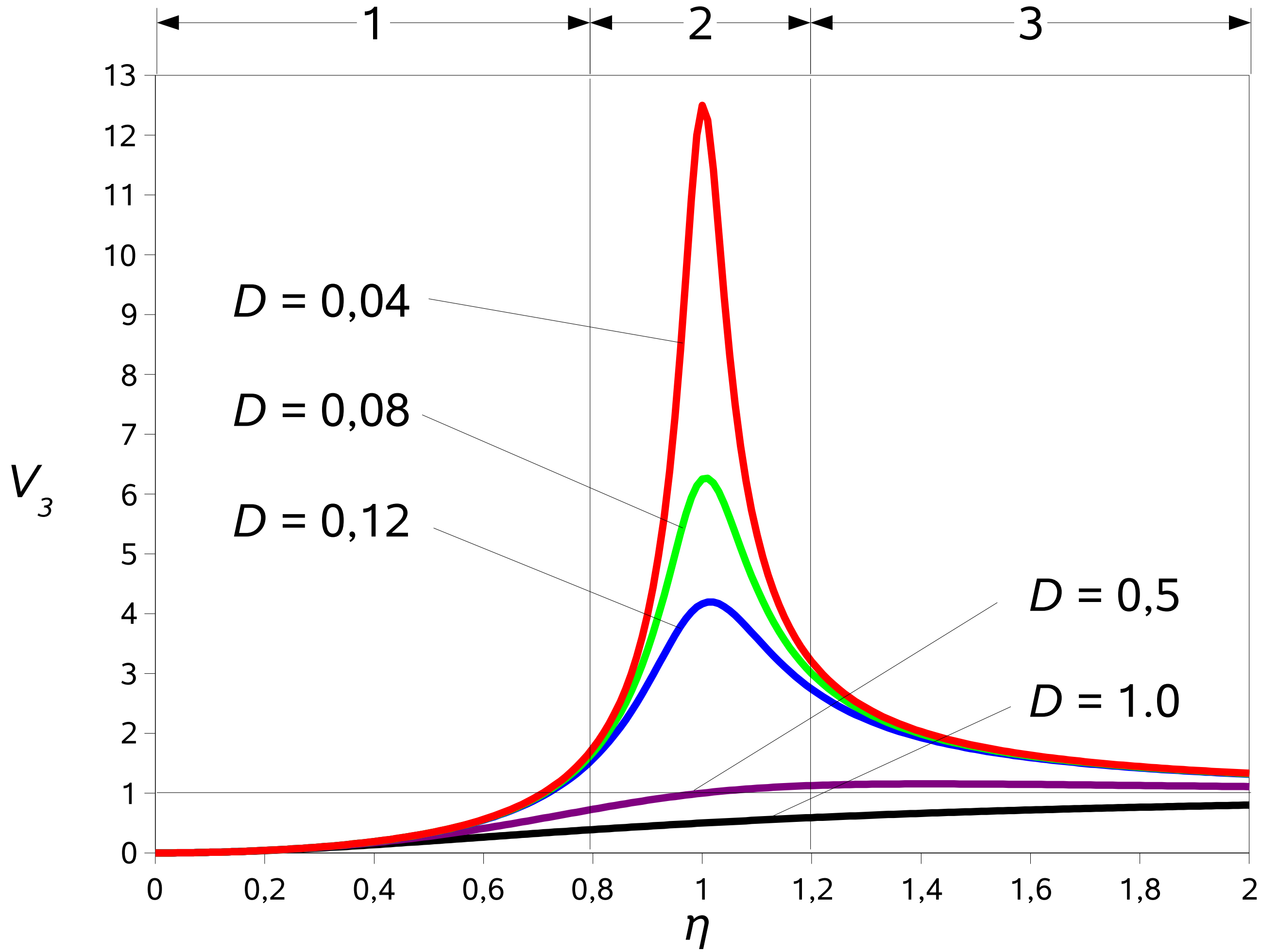
- Dynamischer Überhöhungsfaktor:

$$V_3(\eta)=\eta^2 V_1(\eta)=\frac{\eta^2}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+4D^2\eta^2}}$$

- Phasenwinkel:

$$\phi(\eta)=\arctan\left(\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\right)$$

3.2 Unwuchtanregung



3.2 Unwuchtanregung

- Diskussion der Lösung:
  - Unterkritischer Bereich: $\eta < 0{,}8$
    - Bei schwacher Dämpfung ($D < 10\%$) hat die Dämpfung praktisch keinen Einfluss.
    - Es gilt in guter Näherung: $V_3(\eta) \approx \dfrac{\eta^2}{1-\eta^2}$
  - Kritischer Bereich: $0{,}8 < \eta < 1{,}2$
    - Dieser Bereich wird wesentlich von der Dämpfung bestimmt.
    - An der Resonanzstelle $\eta = 1$ gilt:

$$V_3(1) = \frac{1}{2D}$$

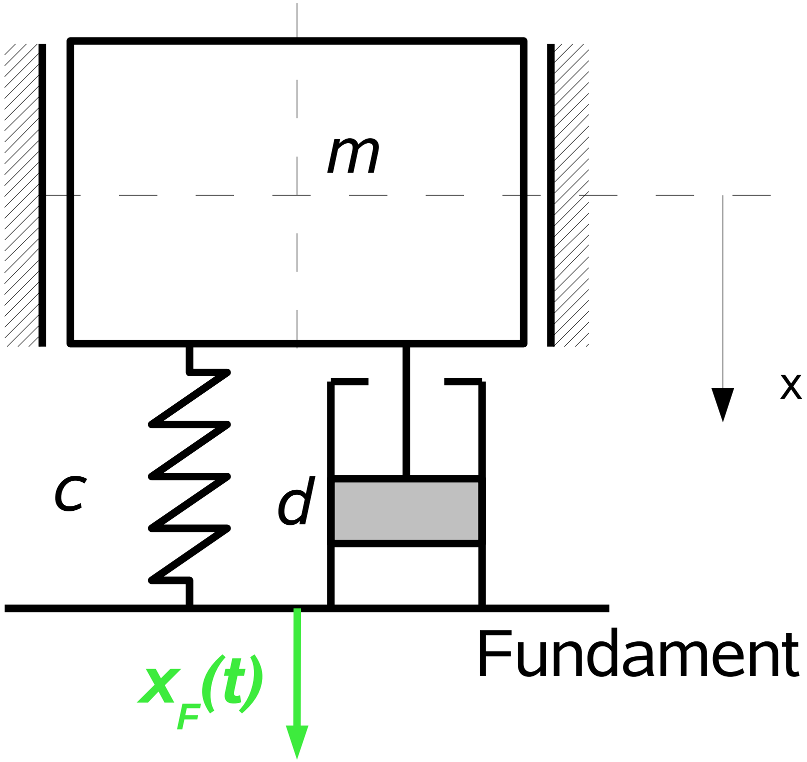
3.2 Unwuchtanregung

– Überkritischer Bereich: η > 1,2

- Bei schwacher Dämpfung (D < 10%) hat die Dämpfung praktisch keinen Einfluss.
- Es gilt in guter Näherung: $$V_3(\eta) \approx \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1}$$
- Für große Werte von η strebt V_3 gegen 1.
- Für η = 5 erhält man:

$$V_3(5) = \frac{25}{24} = 1{,}042$$

3.3 Weganregung



- Fundamentanregung:
  - Die Bewegung des Fundaments wird vorgeschrieben.
  - Beispiele:
    - Rütteltisch
    - fahrbahnerregte Fahrzeugschwingungen
    - Erdbeben

3.3 Weganregung

- Schwingungsgleichung:
  - Vorgeschriebene Bewegung des Fundaments:

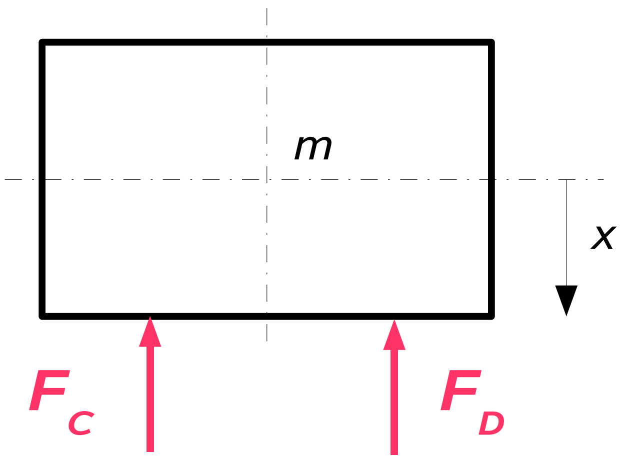
$$x_F(t) = x_{F0} \sin(\Omega t), \quad \ddot{x}_F(t) = -\Omega^2 x_{F0} \sin(\Omega t)$$

  - Relativbewegung:

$$x_{rel} = x - x_F \rightarrow x = x_F + x_{rel}$$

  - Kräfte: $F_C = c\, x_{rel}$
    $F_D = d\, \dot{x}_{rel}$
  - Impulssatz:

$$m \ddot{x} = -d\, \dot{x}_{rel} - c\, x_{rel}$$



3.3 Weganregung

– Mit $\ddot{x} = \ddot{x}_F + \ddot{x}_{rel}$

  folgt: $m\,\ddot{x}_{rel} + d\,\dot{x}_{rel} + c\,x_{rel} = -m\,\ddot{x}_F = m\,x_{F0}\,\Omega^2 \sin(\Omega t)$

– Division durch *m* führt auf

$$\ddot{x}_{rel} + 2\delta\,\dot{x}_{rel} + \omega^2 x_{rel} = x_{F0}\,\Omega^2 \sin(\Omega t)$$

3.3 Weganregung

- Lösung:
  - Mit $x_s(\Omega)=\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 x_{F0}=\eta^2 x_{F0}$

    lässt sich die Schwingungsgleichung wieder auf den bereits behandelten Fall zurückführen.
  - Die partikuläre Lösung für die Relativverschiebung ist daher:

$$\begin{aligned} x_{prel}(\eta,t) &= x_{F0}\eta^2 V_1(\eta)\sin(\Omega t-\phi) \\ &= x_{F0} V_3(\eta)\sin(\Omega t-\phi) \end{aligned}$$

3.3 Weganregung

- Für die Absolutverschiebung folgt:

$$\begin{aligned} x_p(\eta,t) &= x_F(\eta,t)+x_{rel}(\eta,t)\\ &= x_{F0}\sin(\Omega t)+x_{F0}V_3(\eta)\sin(\Omega t-\phi)\\ &= x_{F0}\left[\sin(\Omega t)+V_3(\eta)\left(\sin(\Omega t)\cos\phi-\cos(\Omega t)\sin\phi\right)\right]\\ &= x_{F0}\left[\left(1+V_3(\eta)\cos\phi\right)\sin(\Omega t)-V_3(\eta)\sin\phi\cos(\Omega t)\right] \end{aligned}$$

- Die Amplitude ist:

$$\begin{aligned} x_{pmax}(\eta) &= x_{F0}\sqrt{\left(1+V_3(\eta)\cos\phi\right)^2+V_3^2(\eta)\sin^2\phi}\\ &= x_{F0}\sqrt{1+V_3^2(\eta)+2V_3(\eta)\cos\phi} \end{aligned}$$

3.3 Weganregung

- Diskussion der Lösung:
  - Tiefer unterkritischer Bereich: $\eta < 0{,}3$

$$V_3(\eta) < \frac{0{,}3^2}{1-0{,}3^2} < 0{,}1$$

    - Die Relativverschiebung ist vernachlässigbar klein.
    - Die Masse folgt der Bewegung des Fundaments.

3.3 Weganregung

– Hoher überkritischer Bereich: $\eta > 4$

$$V_3(\eta) < \frac{4^2}{4^2 - 1} < 1{,}1$$

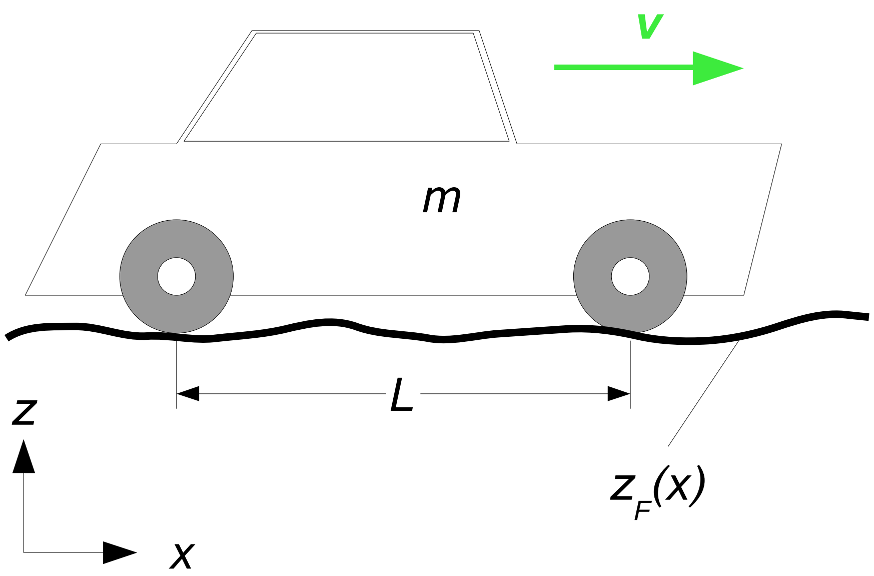
- Der Überhöhungsfaktor ist nahezu 1.
- Der Phasenwinkel ist nahezu 180°.
- Die Relativverschiebung ist entgegengesetzt gleich groß wie die Verschiebung des Fundaments
- Die Absolutverschiebung der Masse geht gegen Null.

3.3 Weganregung

- Bei Vernachlässigung der Dämpfung gelten folgende Vereinfachungen:
  - Überhöhungsfaktor: $V_3(\eta) = \dfrac{\eta^2}{\left|1-\eta^2\right|}$
  - Phasenwinkel: $\phi(\eta) = \begin{cases} 0° & \text{für} \quad \eta < 1 \\ 180° & \text{für} \quad \eta > 1 \end{cases}$
  - Absolutverschiebung:

$$x_p(\eta, t) = \begin{cases} x_{F0}\left(1+V_3(\eta)\right)\sin(\Omega t) & \text{für} \quad \eta < 1 \\ x_{F0}\left(1-V_3(\eta)\right)\sin(\Omega t) & \text{für} \quad \eta > 1 \end{cases}$$

3.3 Weganregung



- Beispiel:
  - Das Fahrzeug der Masse *m* fährt mit der konstanten Geschwindigkeit *v*.
  - Die Unebenheit der Fahrbahn wird beschrieben durch

$$z_F(x) = z_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$$

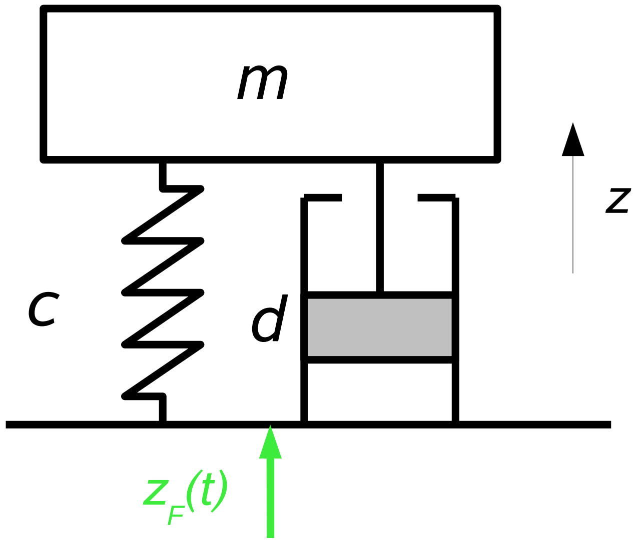
3.3 Weganregung

- Gesucht:
  - Relative und absolute Verschiebungsamplitude der vertikalen Hubschwingung
  - Absolute Beschleunigungsamplitude der vertikalen Hub-schwingung
- Daten:
  - Masse m = 1500kg, Federsteifigkeit c = 1,5·10^5N/m
  - Lehrsches Dämpfungsmaß D = 20%
  - Geschwindigkeit v = 30m/s
  - Wellenlänge λ = 60m, Amplitude z_0 = 0,1m
  - Radabstand L = 2,5m

3.3 Weganregung

– Berechnungsmodell:

- Der Radabstand ist klein im Vergleich zur Wellenlänge. Daher wird angenommen, dass die Vertikalverschiebung an beiden Rädern ungefähr gleich groß ist.
- Das Fahrzeug wird als einfaches Feder-Masse-Dämpfer-System modelliert.



3.3 Weganregung

– Anregung:

$$x = v\,t \;\rightarrow\; z_F(t) = z_0 \sin\left(2\pi \frac{v}{\lambda} t\right) = z_0 \sin(\Omega t) \quad \text{mit} \quad \Omega = 2\pi \frac{v}{\lambda}$$

– Frequenzverhältnis:

$$\Omega = 2\pi \frac{30\,m/s}{60\,m} = 3{,}142 \frac{1}{s}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1{,}5\cdot 10^5\,N/m}{1500\,kg}} = 10\frac{1}{s}$$

$$\rightarrow \; \underline{\eta = 0{,}3142}$$

– Dynamischer Überhöhungsfaktor:

$$V_3(0{,}3142) = \frac{0{,}3142^2}{\sqrt{\left(1 - 0{,}3142^2\right)^2 + 4\cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}3142^2}} = \underline{0{,}1085}$$

3.3 Weganregung

– Amplitude der Relativverschiebung:

$$z_{rel\,max} = z_0 V_3(0{,}3142) = 0{,}1\,m \cdot 0{,}1058 = \underline{0{,}01058\,m}$$

– Amplitude der Absolutverschiebung:

$$\tan\phi = \frac{2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3142}{1 - 0{,}3142^2} = 0{,}1394$$

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi}} = \frac{1}{\sqrt{1+0{,}1394^2}} = \underline{0{,}9904}$$

$$z_{max} = 0{,}1\,m \cdot \sqrt{1+0{,}1058^2 + 2 \cdot 0{,}1058 \cdot 0{,}9904} = \underline{0{,}1105}$$

3.3 Weganregung

– Amplitude der Beschleunigung:

$$\ddot{z}_{max} = \Omega^2 z_{max} = 3{,}142^2 \frac{1}{s^2} \cdot 0{,}1105\, m = \underline{1{,}091\, m/s^2}$$

3.4 Komplexe Darstellung

- Harmonische Schwingungen lassen sich elegant mit Hilfe von komplexen Zahlen darstellen.
- Diese Darstellung ist besonders hilfreich, wenn Systeme mit mehreren Freiheitsgraden betrachtet werden.

3.4 Komplexe Darstellung

- Komplexe Darstellung harmonischer Funktionen:
  - Ausgangspunkt sind die Eulerschen Formeln:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i\sin x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2\cos x &= e^{ix} + e^{-ix} \\ 2i\sin x &= e^{ix} - e^{-ix} \end{aligned}$$

  - Die allgemeine Form einer harmonischen Funktion ist

$$f(t) = f_s \sin(\omega t) + f_c \cos(\omega t) = f_0 \sin(\omega t - \phi)$$

mit

$$f_0 = \sqrt{f_s^2 + f_c^2}, \quad \tan\phi = -\frac{f_c}{f_s}$$

3.4 Komplexe Darstellung

– Mit den Eulerschen Formeln folgt

$$f(t) = \frac{f_s}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) + \frac{f_c}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(f_c - i f_s\right) e^{i\omega t} + \left(f_c + i f_s\right) e^{-i\omega t}\right] = \frac{1}{2}\left(\hat{f}\, e^{i\omega t} + \bar{\hat{f}}\, e^{-i\omega t}\right)$$

$$= \Re\left(\hat{f}\, e^{i\omega t}\right) = \Re\left(\bar{\hat{f}}\, e^{-i\omega t}\right)$$

mit $\hat{f} = f_c - i f_s, \quad \bar{\hat{f}} = f_c + i f_s$

– Weiter gilt: $\left|\hat{f}\right| = \sqrt{f_s^2 + f_c^2} = f_0, \quad \tan\phi = -\frac{f_c}{f_s} = \frac{\Re(\hat{f})}{\Im(\hat{f})}$

3.4 Komplexe Darstellung

- Komplexe Lösung der Schwingungsgleichung:
  - Die harmonische Last wird komplex dargestellt:

$$F(t)=F_0 \sin(\Omega t)=\frac{1}{2}\left(\hat{F}e^{i\Omega t}+\bar{\hat{F}}e^{-i\Omega t}\right)=\Re\left(\hat{F}e^{i\Omega t}\right)$$

  - Die harmonische Antwort wird ebenfalls komplex dargestellt:

$$x(t)=x_0 \sin(\Omega t-\phi)=\frac{1}{2}\left(\hat{x}e^{i\Omega t}+\bar{\hat{x}}e^{-i\Omega t}\right)=\Re\left(\hat{x}e^{i\Omega t}\right)$$

  - Die zeitlichen Ableitungen sind:

$$\dot{x}(t)=\frac{i\Omega}{2}\left(\hat{x}e^{i\Omega t}-\bar{\hat{x}}e^{-i\Omega t}\right),\quad \ddot{x}(t)=-\frac{\Omega^2}{2}\left(\hat{x}e^{i\Omega t}+\bar{\hat{x}}e^{-i\Omega t}\right)$$

3.4 Komplexe Darstellung

– Einsetzen in die Schwingungsgleichung:

$$m\ddot{x}+d\dot{x}+cx=F_0\sin\left(\Omega t\right)$$

$$-\frac{1}{2}\Omega^2 m\left(\hat{x}e^{i\Omega t}+\bar{\hat{x}}e^{-i\Omega t}\right)+\frac{1}{2}i\Omega d\left(\hat{x}e^{i\Omega t}-\bar{\hat{x}}e^{-i\Omega t}\right)$$
$$+\frac{1}{2}c\left(\hat{x}e^{i\Omega t}+\bar{\hat{x}}e^{-i\Omega t}\right)=\frac{1}{2}\left(\hat{F}e^{i\Omega t}+\bar{\hat{F}}e^{-i\Omega t}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left[\left(-\Omega^2 m+i\Omega d+c\right)\hat{x}-\hat{F}\right]e^{i\Omega t}+\left[\left(-\Omega^2 m-i\Omega d+c\right)\bar{\hat{x}}-\bar{\hat{F}}\right]e^{-i\Omega t}=0$$

3.4 Komplexe Darstellung

- Da die Gleichung für beliebige Werte von *t* erfüllt sein muss, müssen die beiden Terme in den eckigen Klammern Null sein:

$$\left(-\Omega^2 m + i\,\Omega\, d + c\right)\hat{x} = \hat{F}$$
$$\left(-\Omega^2 m - i\,\Omega\, d + c\right)\bar{\hat{x}} = \bar{\hat{F}}$$

- Die zweite Gleichung ist die komplex konjugierte der ersten Gleichung.
- Es genügt also, eine der beiden Gleichungen zu lösen.
- Beide Gleichungen kommen in der Literatur etwa gleich häufig vor.

3.4 Komplexe Darstellung

- Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{c - \Omega^2 m + i\,\Omega\, d} = \hat{F}\,\frac{c - \Omega^2 m - i\,\Omega\, d}{\left(c - \Omega^2 m\right)^2 + \left(\Omega\, d\right)^2} = \frac{\hat{F}}{c}\,\frac{1 - \eta^2 - 2 i\, D\, \eta}{\left(1 - \eta^2\right)^2 + 4\, D^2\, \eta^2}$$

- Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$\bar{\hat{x}} = \frac{\bar{\hat{F}}}{c - \Omega^2 m - i\,\Omega\, d} = \bar{\hat{F}}\,\frac{c - \Omega^2 m + i\,\Omega\, d}{\left(c - \Omega^2 m\right)^2 + \left(\Omega\, d\right)^2} = \frac{\bar{\hat{F}}}{c}\,\frac{1 - \eta^2 + 2 i\, D\, \eta}{\left(1 - \eta^2\right)^2 + 4\, D^2\, \eta^2}$$

- Dabei wurde benutzt:

$$\frac{d}{c} = \frac{2\, m\, \delta}{c} = 2\,\frac{\delta}{\omega^2} = 2\,\frac{D}{\omega}$$

3.4 Komplexe Darstellung

- Auswertung:
  - Amplitude: $x_0 = |\hat{x}| = |\bar{\hat{x}}| = \sqrt{\Re^2(\hat{x}) + \Im^2(\hat{x})}$

$$x_0 = \frac{|\hat{F}|}{c} \sqrt{\frac{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4D^2\eta^2}{\left[\left(1-\eta^2\right)^2 + 4D^2\eta^2\right]^2}} = \frac{F_0}{c} \frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

  - Phase: $\hat{F} = -i F_0$:

$$\Re(\hat{x}) = -\frac{F_0}{c} \frac{2D\eta}{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4D^2\eta^2}$$

$$\Im(\hat{x}) = -\frac{F_0}{c} \frac{1-\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4D^2\eta^2}$$

$$\rightarrow \quad \tan\phi = \frac{\Re(\hat{x})}{\Im(\hat{x})} = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}$$

3.4 Komplexe Darstellung

- Bei Vernachlässigung der Dämpfung gelten folgende Vereinfachungen:

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{c} \frac{1}{1-\eta^2}, \quad x_0 = \frac{F_0}{c} \frac{1}{\left|1-\eta^2\right|}$$

  - Für $\hat{F} = -i\,F_0$ gilt:

$$\Re\left(\hat{x}\right) = 0, \quad \Im\left(\hat{x}\right) = -\frac{F_0}{c} \frac{1}{1-\eta^2}$$

$$\rightarrow \quad x(t) = \Re\left(\hat{x}\,e^{i\,\Omega\,t}\right) = \frac{F_0}{c} \frac{1}{1-\eta^2} \sin\left(\Omega\,t\right)$$