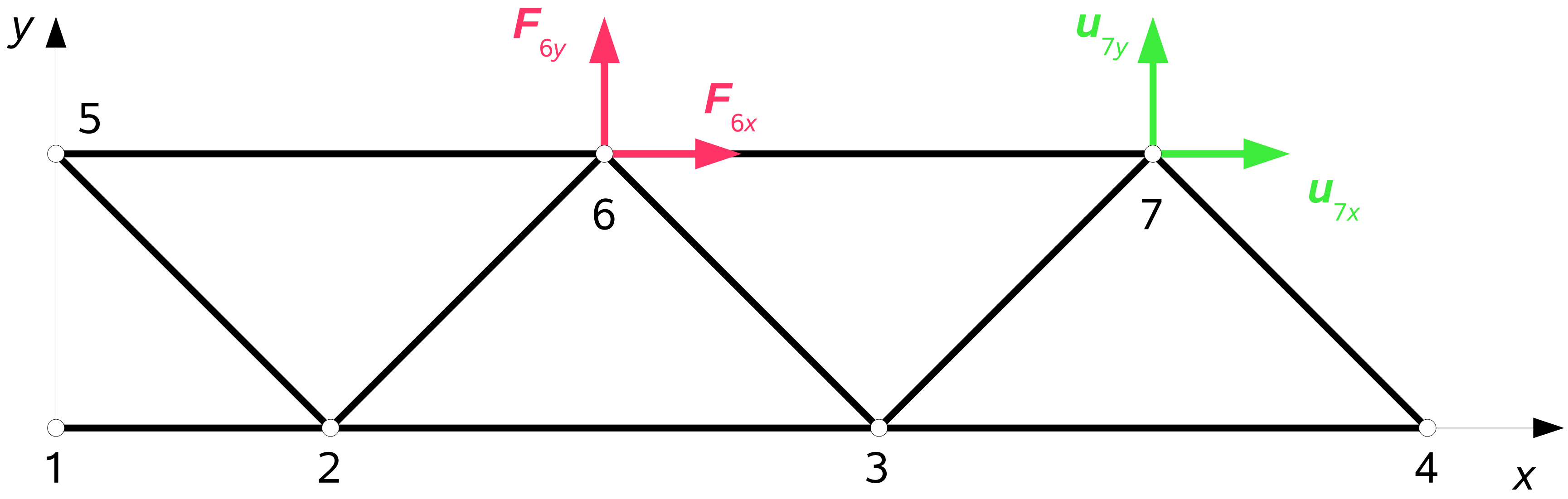
2. Die Steifigkeitsmatrix

- Freiheitsgrade der Gesamtstruktur:
  – Bei einem ebenen Fachwerk hat jeder Knoten zwei Freiheitsgrade, nämlich die Verschiebungen u_x und u_y, zu denen die Kräfte F_x und F_y gehören.



2. Die Steifigkeitsmatrix

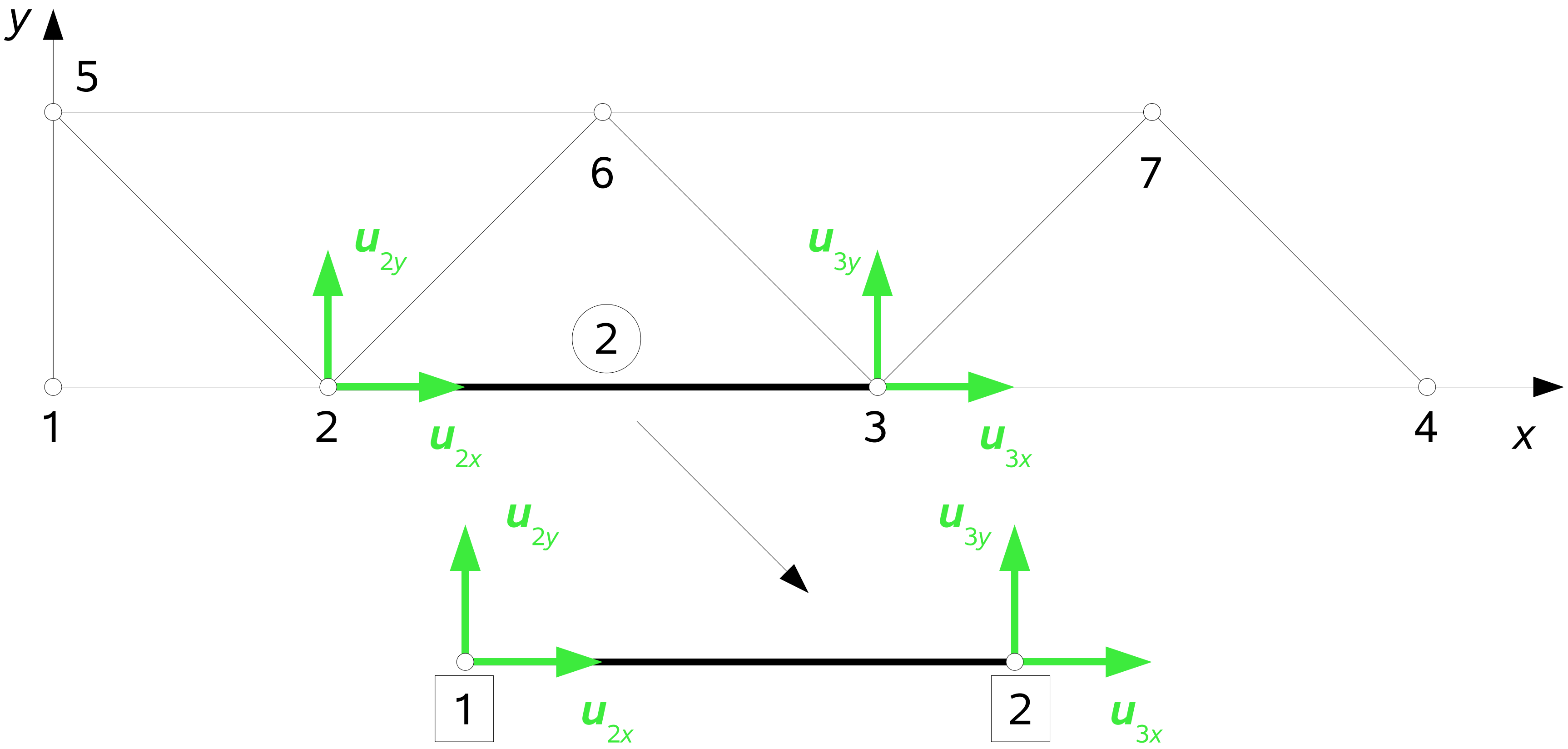
– Die Verschiebungen werden in der Verschiebungsmatrix und die Kräfte in der Lastmatrix zusammengefasst:

$$[\boldsymbol{u}]=\begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ \vdots \\ u_{7x} \\ u_{7y} \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{F}]=\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ \vdots \\ F_{7x} \\ F_{7y} \end{bmatrix}$$

2. Die Steifigkeitsmatrix

- Assemblierung:
  - Für jeden Knoten muss das Kräftegleichgewicht erfüllt sein.
  - Am Knoten greifen die Stabkräfte sowie die äußeren Kräfte an.
  - Die Stabkräfte können über die Elementsteifigkeitsmatrizen aus den Verschiebungen berechnet werden.
  - Dazu müssen zunächst die Verschiebungen an den beiden Knoten des Stabelements aus der Verschiebungsmatrix extrahiert werden.

– Beispiel: Element 2



2. Die Steifigkeitsmatrix

$$\left[\boldsymbol{u}^2\right]=\begin{bmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\left[\boldsymbol{a}^2\right]} \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ u_{4x} \\ u_{4y} \\ u_{5x} \\ u_{5y} \\ u_{6x} \\ u_{6y} \\ u_{7x} \\ u_{7y} \end{bmatrix}$$

2. Die Steifigkeitsmatrix

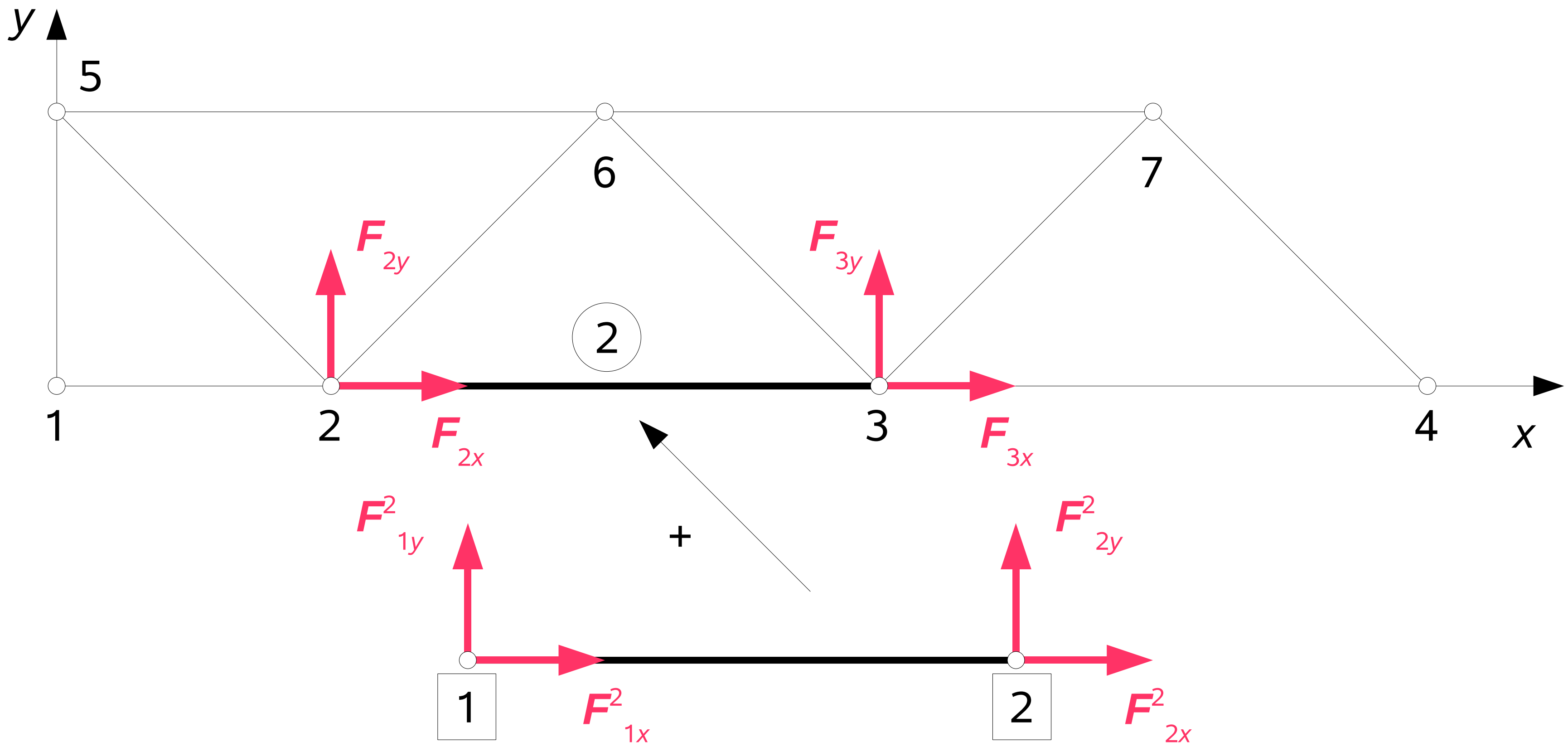
- In Matrix-Schreibweise gilt: $\left[\boldsymbol{u}^E\right]=\left[\boldsymbol{a}^E\right]\left[\boldsymbol{u}\right]$

- Nun können die am Stabelement angreifenden Kräfte berechnet werden: $\left[\boldsymbol{F}^E\right]=\left[\boldsymbol{k}^E\right]\left[\boldsymbol{u}^E\right]$

- Das sind die Kräfte, die die beiden Knoten auf das Stabelement ausüben.
- Diese Kräfte werden nun zu den Kräften, die die beiden Knoten auf die anderen angeschlossenen Stäbe ausüben, addiert.

2. Die Steifigkeitsmatrix

– Beispiel: Element 2



2. Die Steifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{\begin{matrix} F_{2x}^2 \\ F_{2y}^2 \\ F_{3x}^2 \\ F_{3y}^2 \end{matrix}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{1x}^2 \\ F_{1y}^2 \\ F_{2x}^2 \\ F_{2y}^2 \end{bmatrix}$$

- In Matrix-Schreibweise gilt für die Kräfte, die die Knoten auf die Stäbe ausüben:

$$\left[\boldsymbol{F}^S\right] = \sum_E \left[\boldsymbol{a}^E\right]^T \left[\boldsymbol{F}^E\right]$$

$$= \left(\sum_E \left[\boldsymbol{a}^E\right]^T \left[\boldsymbol{k}^E\right] \left[\boldsymbol{a}^E\right]\right) \left[\boldsymbol{u}\right] = \left[\boldsymbol{K}\right] \left[\boldsymbol{u}\right]$$

- Die Matrix $\left[\boldsymbol{K}\right] = \sum_E \left[\boldsymbol{a}^E\right]^T \left[\boldsymbol{k}^E\right] \left[\boldsymbol{a}^E\right]$

  ist die Steifigkeitsmatrix der Gesamtstruktur.

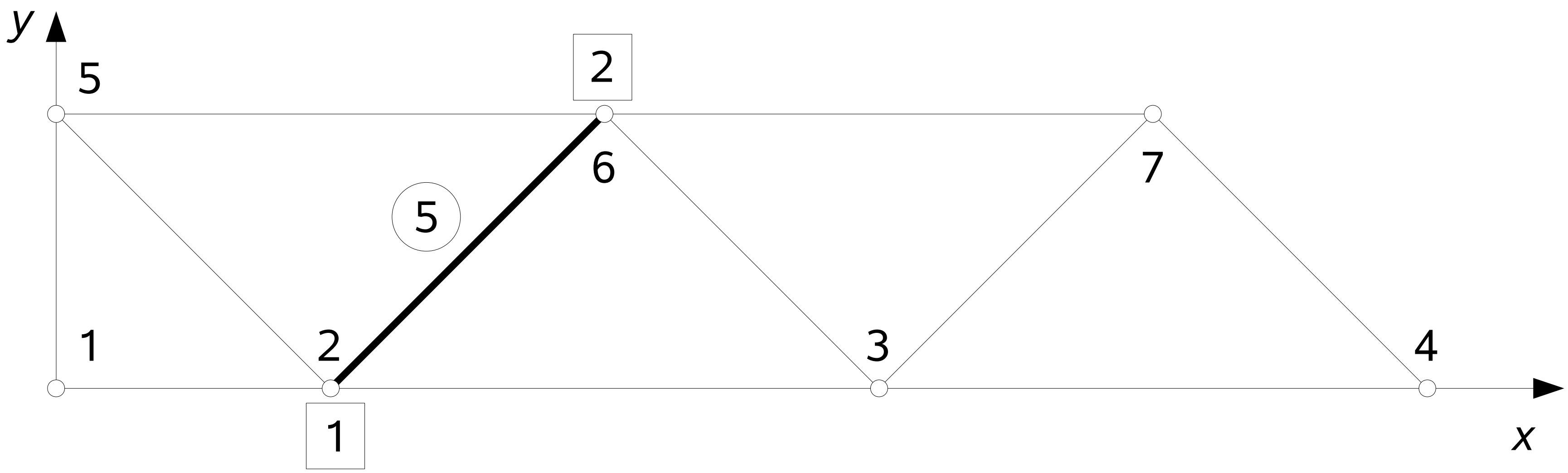
2. Die Steifigkeitsmatrix

- Die Steifigkeitsmatrix der Gesamtstruktur beschreibt eine lineare Beziehung zwischen den Verschiebungen der Knoten und den Kräften, die die Knoten auf die Stäbe ausüben.
- Die Kräfte, die die Stäbe auf die Knoten ausüben, sind entgegengesetzt gleich groß wie die Kräfte, die die Knoten auf die Stäbe ausüben.
- Sie müssen im Gleichgewicht mit den äußeren Kräften sein:

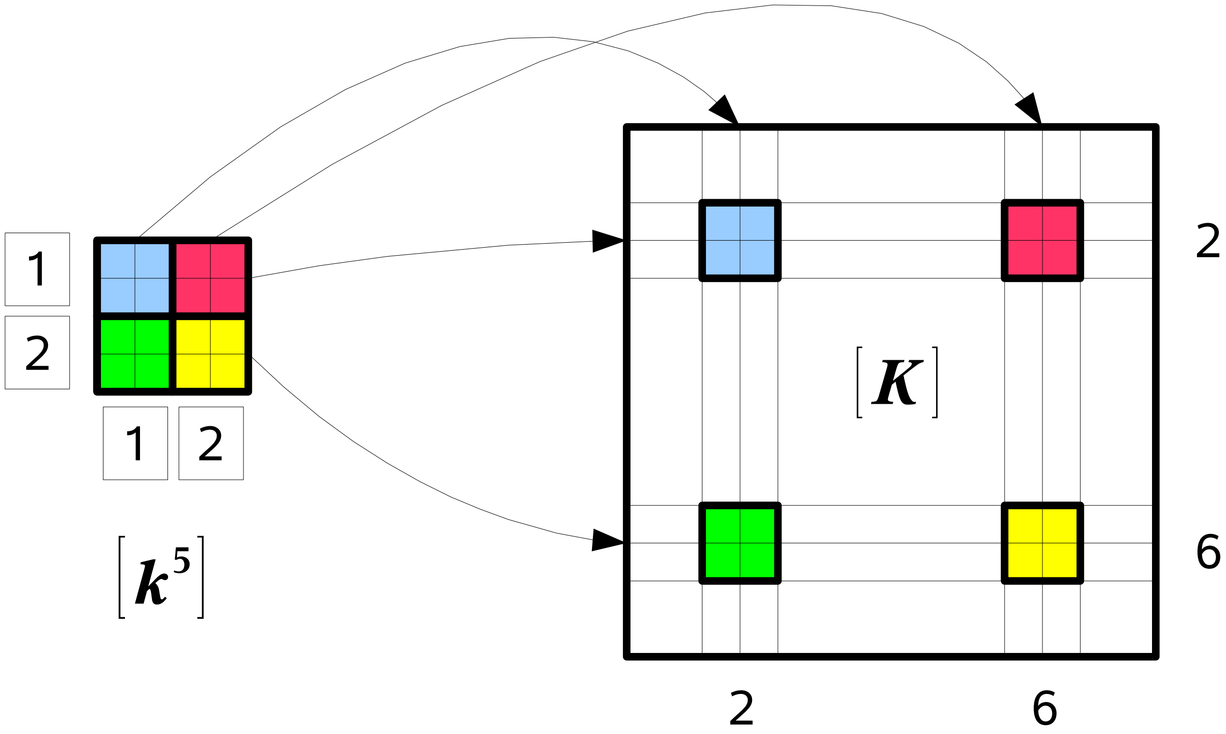
$$-\left[\boldsymbol{F}^S\right]+\left[\boldsymbol{F}\right]=\left[\boldsymbol{0}\right] \rightarrow \left[\boldsymbol{F}^S\right]=\left[\boldsymbol{F}\right] \rightarrow \boxed{\left[\boldsymbol{K}\right]\left[\boldsymbol{u}\right]=\left[\boldsymbol{F}\right]}$$

2. Die Steifigkeitsmatrix

– Die praktische Assemblierung der Steifigkeitsmatrix erfolgt durch direkte Addition der Elemente der Elementsteifigkeitsmatrizen zu den entsprechenden Elementen der Steifigkeitsmatrix der Gesamtstruktur:



2. Die Steifigkeitsmatrix



		1x 2x / 3	1y 2y / 4	2x 6x / 11	2y 6y / 12
1x	2x / 3	(3, 3)	(3, 4)	(3, 11)	(3, 12)
1y	2y / 4	(4, 3)	(4, 4)	(4, 11)	(4, 12)
2x	6x / 11	(11, 3)	(11, 4)	(11, 11)	(11, 12)
2y	6y / 12	(12, 3)	(12, 4)	(12, 11)	(12, 12)

2. Die Steifigkeitsmatrix

- Eigenschaften:
  - Aus der Symmetrie der Steifigkeitsmatrizen der Stabelemente folgt, dass auch die Steifigkeitsmatrix der Gesamtstruktur symmetrisch ist.
  - Die Steifigkeitsmatrix der Gesamtstruktur ist in der Regel dünn besetzt, d.h. jede Spalte enthält nur wenige Elemente, die von null verschieden sind.

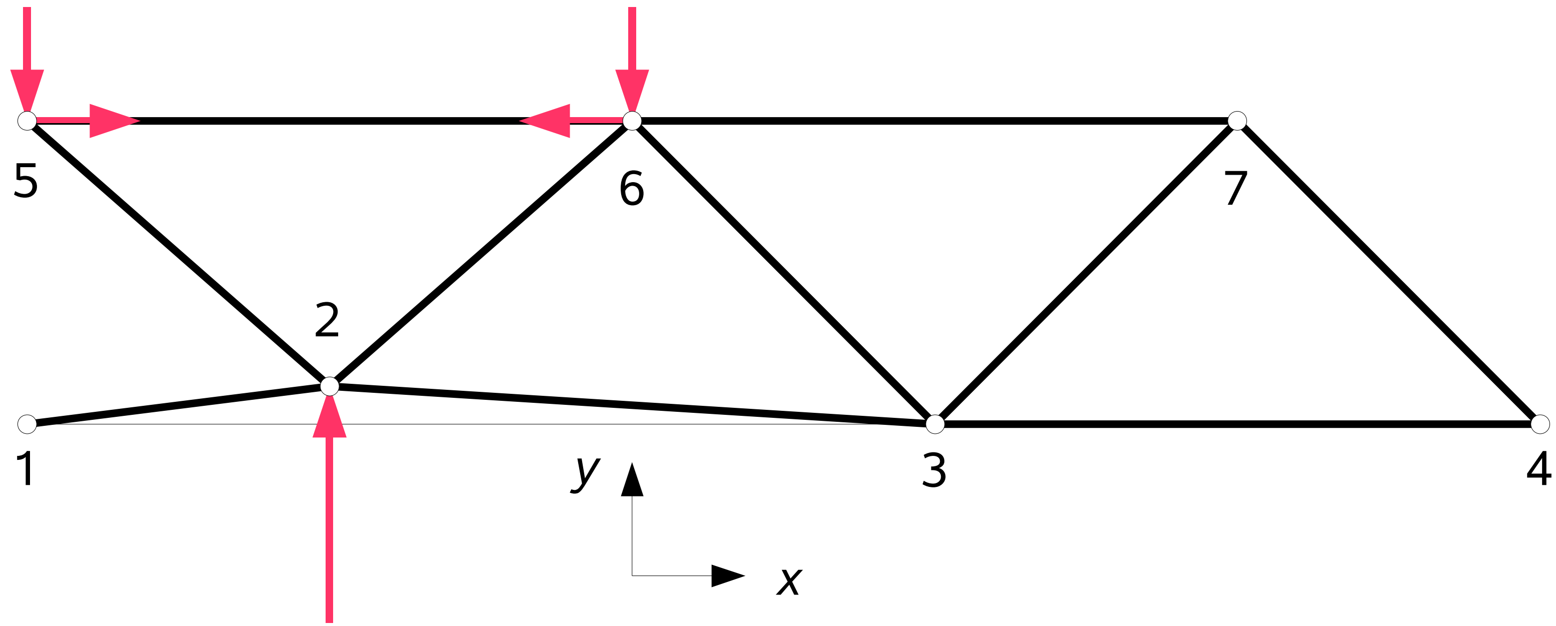
2. Die Steifigkeitsmatrix

- Interpretation:
  – Multiplikation der Steifigkeitsmatrix mit einer vorgegebenen Verschiebungsmatix ergibt die Kräfte, die nötig sind, um der Struktur diese Verschiebungen aufzuprägen:

$$[\boldsymbol{F}]=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ \vdots \\ K_{n1} \end{bmatrix}u_1+\begin{bmatrix} K_{12} \\ K_{22} \\ \vdots \\ K_{n2} \end{bmatrix}u_2+\dots+\begin{bmatrix} K_{1n} \\ K_{2n} \\ \vdots \\ K_{nn} \end{bmatrix}u_n$$

2. Die Steifigkeitsmatrix

– Eine Spalte der Steifigkeitsmatrix enthält die Kräfte, die nötig sind, um dem entsprechenden Freiheitsgrad eine Einheitsverschiebung aufzuprägen, wenn alle anderen Verschiebungen null sind:



2. Die Steifigkeitsmatrix

$$
\left[\boldsymbol{u}\right]=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}mm\,,\quad \left[\boldsymbol{F}\right]=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\7424\\0\\0\\0\\0\\3712\\-3712\\-3712\\-3712\\0\\0\end{bmatrix}N\qquad \begin{matrix}1\,x\\1\,y\\2\,x\\2\,y\\3\,x\\3\,y\\4\,x\\4\,y\\5\,x\\5\,y\\6\,x\\6\,y\\7\,x\\7\,y\end{matrix}
$$

- Eine Spalte der Steifigkeitsmatrix enthält nur in den Zeilen von null verschiedene Werte, die Knoten entsprechen, die mit dem zu der Spalte gehörenden Knoten durch einen Stab verbunden sind.
- Die Steifigkeitsmatrix ist daher dünn besetzt.

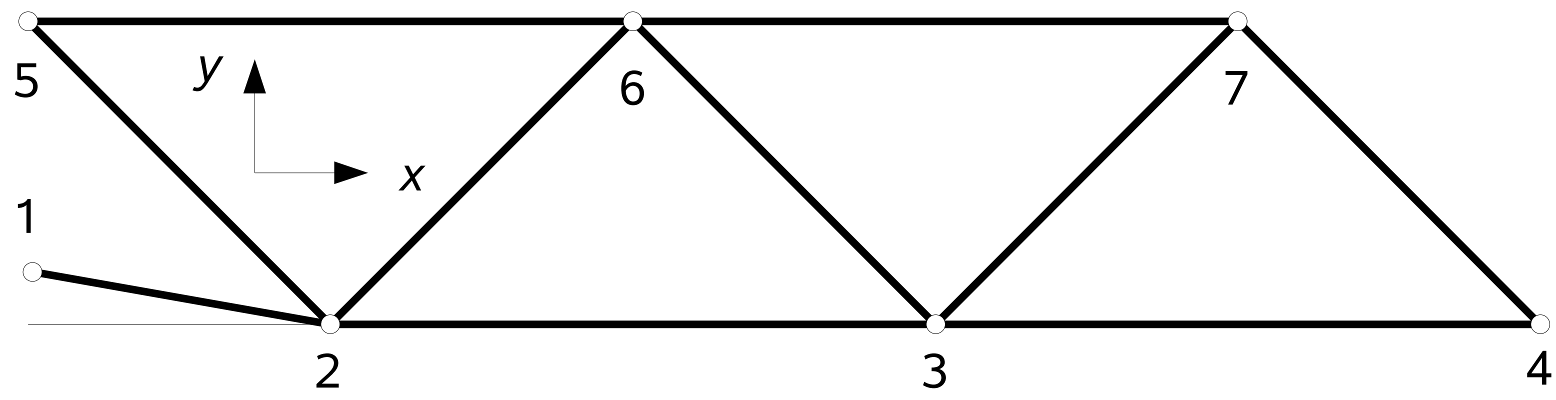
2. Die Steifigkeitsmatrix

- Starrkörperbewegungen:
  - Verschiebungen, bei denen keine elastischen Kräfte auftreten, werden als Starrkörperbewegungen bezeichnet.
  - Für Starrkörperbewegungen gilt: $[\boldsymbol{K}][\boldsymbol{u}^r]=[\mathbf{0}]$
  - Translationen:
    - Wird das Fachwerk als ganzes in *x*- oder *y*-Richtung verschoben, treten keine elastischen Kräfte auf, da sich die Längen der Stäbe nicht ändern.
  - Rotationen:
    - Wird das Fachwerk als ganzes in der *xy*-Ebene gedreht, treten ebenfalls keine elastischen Kräfte auf, da sich die Längen der Stäbe nicht ändern.

2. Die Steifigkeitsmatrix

– Mechanismen:

- Bei einem Mechanismus bewegt sich nur ein Teil des Bauteils wie ein starrer Körper.
- Bei dem dargestellten Fachwerk kann sich z.B. der Stab zwischen den Knoten 1 und 2 um den Knoten 2 drehen:



2. Die Steifigkeitsmatrix

- Linearisierte Rotationen:
  - In einer linearen Rechnung werden Verschiebungen und Drehungen als klein angenommen.
  - Bei einer Drehung bewegen sich die Knoten daher in erster Näherung auf Tangenten an die Kreisbahn.
  - Das ist zu berücksichtigen, wenn Mechanismen durch Lager verhindert werden sollen.
  - Bei einer linearisierten Drehung um Knoten 2 bewegt sich Knoten 1 auf einer senkrechten Linie in y-Richtung.
  - Um diesen Mechanismus zu verhindern, muss die y-Verschiebung von Punkt 1 durch ein Lager unterdrückt werden.

2. Die Steifigkeitsmatrix

- Elastische Energie:
  - Dem Fachwerk wird die zeitabhängige Verschiebung

$$[\boldsymbol{u}(t)] = [\boldsymbol{u}_{\mathbf{0}}] f(t)$$

    aufgeprägt.
  - Von der Funktion $f(t)$ wird gefordert:
    - Die Funktion ändert sich so langsam mit der Zeit, dass Trägheitskräfte vernachlässigt werden können. Dann befindet sich das Fachwerk zu jedem Zeitpunkt im statischen Gleichgewicht.
    - $f(0) = 0$ und $f(T) = 1$

2. Die Steifigkeitsmatrix

– Für die Leistung gilt:

$$P^E = v_1(t)F_1(t) + v_2(t)F_2(t) + \ldots + v_n(t)F_n(t)$$

$$= \begin{bmatrix} v_1(t) & v_2(t) & \ldots & v_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{bmatrix} = [\boldsymbol{v}(t)]^T [\boldsymbol{F}(t)]$$

$$= \dot{f}(t) [\boldsymbol{u_0}]^T [\boldsymbol{K}] [\boldsymbol{u_0}] f(t) = [\boldsymbol{u_0}]^T [\boldsymbol{K}] [\boldsymbol{u_0}] f(t) \dot{f}(t)$$

2. Die Steifigkeitsmatrix

- Für die in der Zeit von 0 bis T verrichtete Arbeit gilt:

$$W^E = \int_0^T P^E(t)\,dt = [\boldsymbol{u}_\mathbf{0}]^T [\boldsymbol{K}] [\boldsymbol{u}_\mathbf{0}] \int_0^T f(t)\,\dot{f}(t)\,dt = \frac{1}{2} [\boldsymbol{u}_\mathbf{0}]^T [\boldsymbol{K}] [\boldsymbol{u}_\mathbf{0}]$$

- Diese Arbeit ist gleich der im System gespeicherten elastischen Energie:

$$E^E = W^E = \frac{1}{2} [\boldsymbol{u}_\mathbf{0}]^T [\boldsymbol{K}] [\boldsymbol{u}_\mathbf{0}] \geq 0$$

- Die elastische Energie ist immer positiv. Sie ist null für Starrkörperbewegungen.