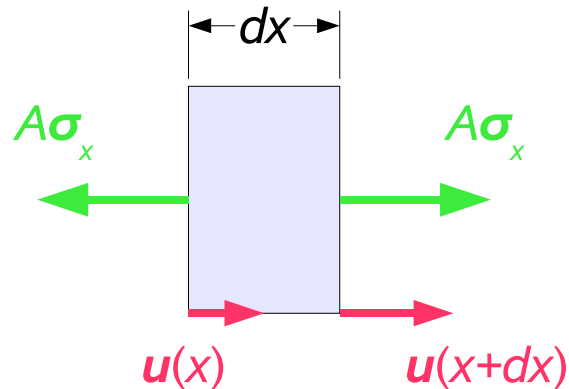


2. Die Formänderungsenergie

- Stab:



– Von der Spannung am Stabelement verrichtete Arbeit:

$$\begin{aligned}dW &= -\frac{1}{2} A \sigma_x u(x) + \frac{1}{2} A \sigma_x u(x+dx) = \frac{1}{2} A \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ &= \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dV\end{aligned}$$

2. Die Formänderungsenergie

- Die spezifische Formänderungsenergie ist gleich der am Volumenelement verrichteten Arbeit pro Volumen:

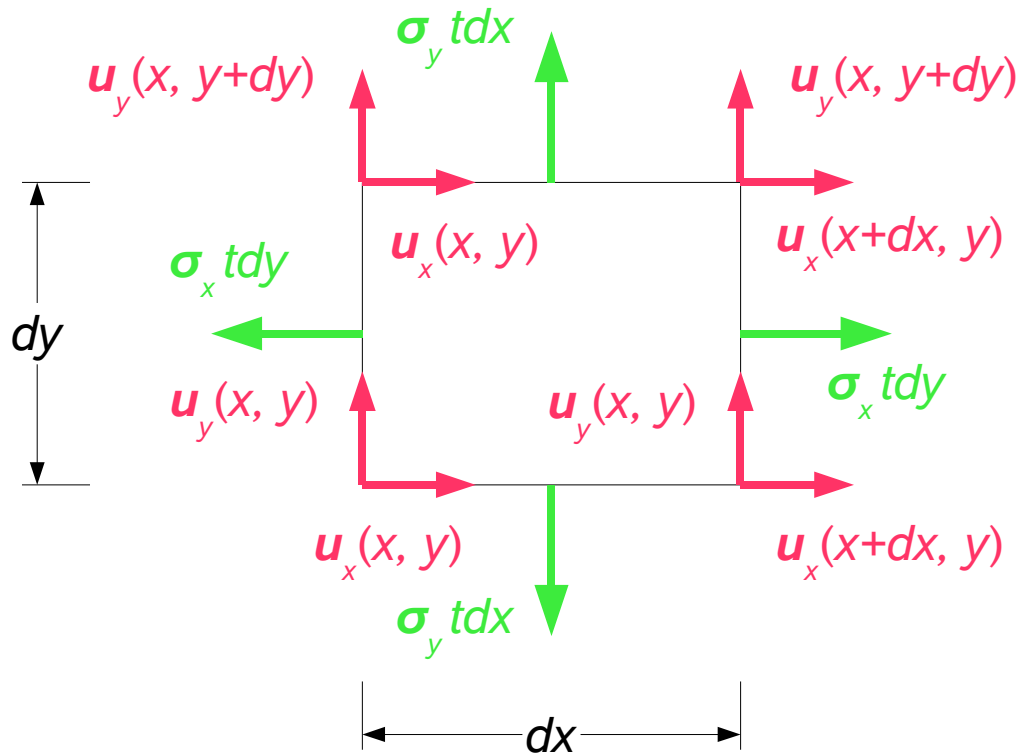
$$e^F = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon_x \sigma_x$$

- Die Formänderungsenergie ist die gesamte im Stab gespeicherte elastische Energie:

$$E^F = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_x \sigma_x dV$$

2. Die Formänderungsenergie

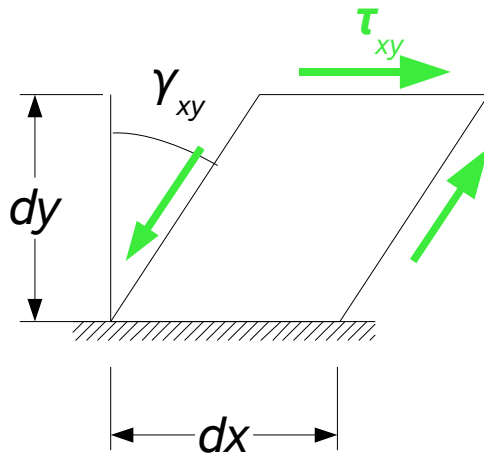
- Scheibe:
 - Normalspannungen:



$$\begin{aligned}
 2 dW_{\sigma} &= -\sigma_x t dy u_x(x, y) \\
 &\quad + \sigma_x t dy u_x(x+dx, y) \\
 &\quad - \sigma_y t dx u_y(x, y) \\
 &\quad + \sigma_y t dx u_y(x, y+dy) \\
 &= \sigma_x t dy \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \\
 &\quad + \sigma_y t dx \frac{\partial u_y}{\partial y} dy \\
 &= (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y) t dx dy \\
 \rightarrow \frac{dW_{\sigma}}{dV} &= \frac{1}{2} (\epsilon_x \sigma_x + \epsilon_y \sigma_y)
 \end{aligned}$$

2. Die Formänderungsenergie

- Schubspannungen:



$$2 dW_{\tau} = \tau_{xy} t dx \gamma_{xy} dy$$

$$\rightarrow \frac{dW_{\tau}}{dV} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \tau_{xy}$$

2. Die Formänderungsenergie

- Für die gesamte Formänderungsenergie gilt also:

$$E^F = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_x \sigma_x + \epsilon_y \sigma_y + \gamma_{xy} \tau_{xy}) dV$$

- In Matrix-Schreibweise lautet diese Gleichung:

$$E^F = \frac{1}{2} \int_V [\boldsymbol{\epsilon}]^T [\boldsymbol{\sigma}] dV = \frac{1}{2} \int_V [\boldsymbol{\epsilon}]^T [\mathbf{C}] [\boldsymbol{\epsilon}] dV$$

2. Die Formänderungsenergie

- Körper:
 - Auch für einen 3-dimensionalen Körper gilt

$$E^F = \frac{1}{2} \int_V [\boldsymbol{\epsilon}]^T [\boldsymbol{\sigma}] dV$$

mit

$$[\boldsymbol{\epsilon}] = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}$$