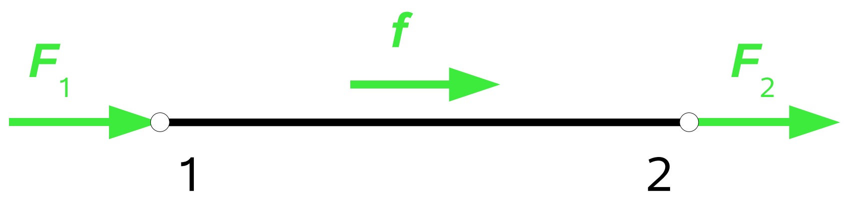
3. Das Prinzip der virtuellen Arbeit

3.1 Stab

- Herleitung des Prinzips der virtuellen Arbeit:



  – Am Stab greifen als äußere Kräfte die Einzelkräfte $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ und die Volumenkraft $\boldsymbol{f}$ an.

  – Die Formänderungsenergie ist gleich der von den äußeren Kräften verrichteten Arbeit:

$$\frac{1}{2}\int_V \epsilon(x)\sigma(x)\,dV = \frac{1}{2}\left(F_1 u_1 + F_2 u_2 + \int_V f(x)u(x)\,dV\right)$$

3.1 Stab

– Lastfall *A*: Lasten $\boldsymbol{F}_1^A$, $\boldsymbol{F}_2^A$, $\boldsymbol{f}^A$

$$\frac{1}{2}\int_V \epsilon^A(x)\sigma^A(x)\,dV = \frac{1}{2}\left(F_1^A u_1^A + F_2^A u_2^A + \int_V f^A(x)\,u^A(x)\,dV\right)$$

– Lastfall *B*: Lasten $\boldsymbol{F}_1^B$, $\boldsymbol{F}_2^B$, $\boldsymbol{f}^B$

$$\frac{1}{2}\int_V \epsilon^B(x)\sigma^B(x)\,dV = \frac{1}{2}\left(F_1^B u_1^B + F_2^B u_2^B + \int_V f^B(x)\,u^B(x)\,dV\right)$$

– Überlagerung:

$$\frac{1}{2}\int_V \left(\epsilon^A + \epsilon^B\right)\left(\sigma^A + \sigma^B\right)dV$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(F_1^A + F_1^B\right)\left(u_1^A + u_1^B\right) + \left(F_2^A + F_2^B\right)\left(u_2^A + u_2^B\right) + \int_V \left(f^A + f^B\right)\left(u^A + u^B\right)dV\right]$$

3.1 Stab

– Ausrechnen ergibt:

$$\frac{1}{2}\int_V \left(\epsilon^A \sigma^B + \epsilon^B \sigma^A\right) dV = \frac{1}{2}\left(F_1^A u_1^B + F_1^B u_1^A + F_2^A u_2^B + F_2^B u_2^A\right)$$
$$+\frac{1}{2}\int_V \left(f^A u^B + f^B u^A\right) dV$$

– Materialgesetz: $\epsilon^A \sigma^B = \epsilon^A E \epsilon^B = \sigma^A \epsilon^B$

– Reziprozitätsgesetz: $F_1^A u_1^B = F_1^B u_1^A, \quad F_2^A u_2^B = F_2^B u_2^A$

$$\int_V f^A u^B dV = \int_V f^B u^A dV$$

3.1 Stab

- Damit ist gezeigt: $$\int_V \epsilon^B \sigma^A \, dV = u_1^B F_1^A + u_2^B F_2^A + \int_V u^B f^A \, dV$$
- Sei nun Lastfall *A* der tatsächliche Lastfall und Lastfall *B* irgendein beliebiger anderer Lastfall.
- Die Verschiebungen für Lastfall *A* werden mit *u* und die Verschiebungen für Lastfall *B* mit *v* bezeichnet.
- Die zugehörigen Dehnungen und Spannungen sind:

$$\sigma^A = \sigma = E \frac{du}{dx} \quad \text{und} \quad \epsilon^B = \epsilon_v = \frac{dv}{dx}$$

- Die oberen Indizes können nun weggelassen werden, da alle in der Formel auftretenden Lasten zu Lastfall *A* gehören.

3.1 Stab

- Damit gilt:

$$\int_V \epsilon_v \sigma \, dV = v_1 F_1 + v_2 F_2 + \int_V v \, f \, dV$$

- Diese Beziehung wird als Prinzip der virtuellen Arbeit bezeichnet.
- Die Verschiebungen *v* werden als virtuelle Verschiebungen bezeichnet.
- Als virtuelle Verschiebungen dürfen alle zulässigen Verschiebungen eingesetzt werden.
- Zulässig sind alle Verschiebungen, die die Lagerbedingungen erfüllen.

3.1 Stab

- Globales Gleichgewicht:
  - Wenn der Stab nicht gelagert ist, ist $v(x)=v_0=const.$ eine zulässige virtuelle Verschiebung.
  - Wegen $\epsilon_{v_0}=0$ folgt: $$0=v_0\left(F_1+F_2+\int_V f\,dV\right)$$
  - Diese Gleichung beschreibt das Kräftegleichgewicht in Stabrichtung.

3.1 Stab

- Lokales Gleichgewicht:
  - Für eine beliebige virtuelle Verschiebung gilt:

$$\int_V \epsilon_v \sigma \, dV = A \int_0^L \frac{dv}{dx} \sigma \, dx = A \left[v(x) \sigma(x) \right]_{x=0}^{x=L} - A \int_0^L v \frac{d\sigma}{dx} dx$$

$$= A \left(v_2 \sigma_2 - v_1 \sigma_1 \right) - A \int_0^L v \frac{d\sigma}{dx} dx$$

  - Einsetzen in das Prinzip der virtuellen Arbeit ergibt:

$$A \left(v_2 \sigma_2 - v_1 \sigma_1 \right) - A \int_0^L v \frac{d\sigma}{dx} dx = v_1 F_1 + v_2 F_2 + A \int_0^L v f \, dx$$

$$\rightarrow \quad v_2 \left(A \sigma_2 - F_2 \right) - v_1 \left(A \sigma_1 + F_1 \right) = A \int_0^L v \left(f + \frac{d\sigma}{dx} \right) dx$$

3.1 Stab

- Diese Gleichung ist nur dann für beliebige virtuelle Verschiebungen erfüllt, wenn gilt:

$$\sigma_1 = -\frac{F_1}{A}, \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{A}, \quad \frac{d\sigma}{dx} + f = 0$$

- Die ersten beiden Gleichungen sind die Randbedingungen für die Spannung.
- Die dritte Gleichung ist die Differenzialgleichung des Stabs, die das Gleichgewicht am infinitesimalen Stabelement beschreibt.

3.1 Stab

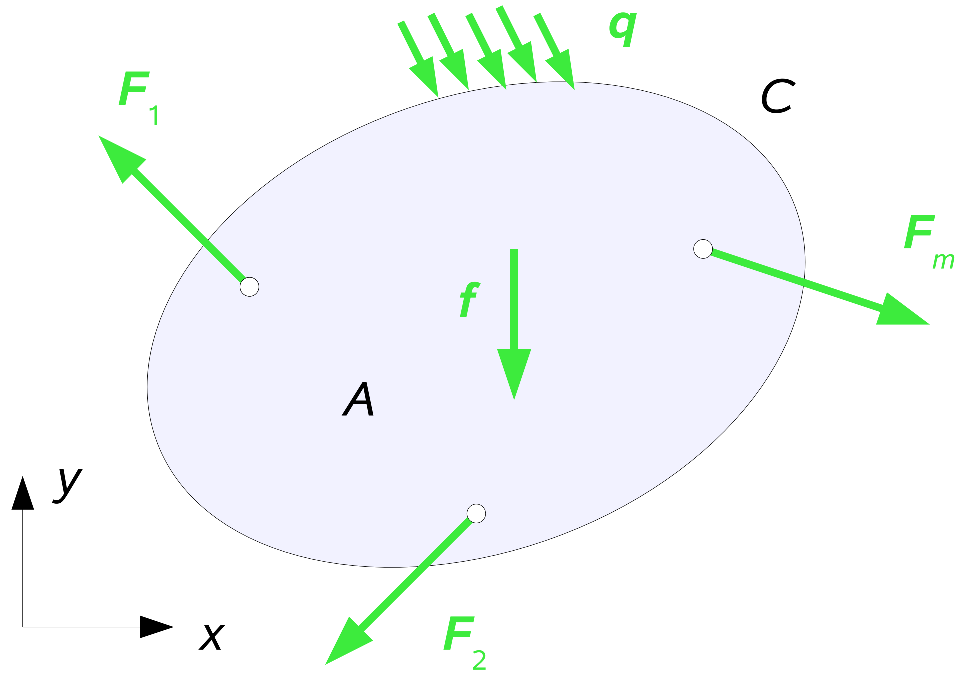
- Zusammenfassung:
  - Das Prinzip der virtuellen Arbeit lautet:

$$\int_V \epsilon_v \sigma \, dV = v_1 F_1 + v_2 F_2 + \int_V v \, f \, dV \quad \text{für alle } v$$

  - Im Prinzip der virtuellen Arbeit sind die folgenden Bedingungen enthalten:
    - das Kräftegleichgewicht am Stab
    - die Spannungsrandbedingungen an den Stabenden
    - das Gleichgewicht am infinitesimalen Stabelement

3.2 Scheibe

- Geometrie:



3.2 Scheibe

- Die Scheibe liegt in der *xy*-Ebene und bedeckt die Fläche *A*.
- Die Randkurve der Fläche *A* wird mit *C* bezeichnet.
- Die Scheibe hat die Dicke *t* und das Volumen $V = t\,A$.
- Die Randfläche wird mit *R* bezeichnet.

- Lasten:
  - Einzelkräfte $\boldsymbol{F}_m$
  - Flächenkraft $\boldsymbol{q}$ auf der Randfläche *R*
  - Volumenkraft $\boldsymbol{f}$ im Inneren der Scheibe

3.2 Scheibe

- Prinzip der virtuellen Arbeit:
  - Wie beim Stab lässt sich zeigen:

$$\int_V [\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{v}}]^T [\boldsymbol{\sigma}] dV = \sum_m [\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{e}}]^T [\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{m}}] + \int_R [\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{e}}]^T [\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{e}}] dR + \int_V [\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{e}}]^T [\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{e}}] dV$$

  - Dabei ist

$$[\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{e}}(x, y)] = \begin{bmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{v}}] = [\partial_{xy}][\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{e}}], \quad [\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{e}}] = [\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{e}}(x_m, y_m)]$$

$$[\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{m}}] = \begin{bmatrix} F_{mx} \\ F_{my} \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{e}}(x, y)] = \begin{bmatrix} q_x(x, y) \\ q_y(x, y) \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{e}}(x, y)] = \begin{bmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{bmatrix}$$

3.2 Scheibe

- Die virtuellen Verschiebungen $\left[\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{e}}\right]$ sind beliebige Verschiebungen, die mit den Lagerungen verträglich sind.
- Mit $dV = t\,dA$ und $dR = t\,ds$ folgt:

$$\int_A \left[\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{v}}\right]^T \left[\boldsymbol{\sigma}\right] t\,dA = \sum_m \left[\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{e}}\right]^T \left[\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{m}}\right] + \int_C \left[\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{e}}\right]^T \left[\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{e}}\right] t\,ds + \int_A \left[\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{e}}\right]^T \left[\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{e}}\right] t\,dA$$

3.2 Scheibe

- Globales Gleichgewicht:
  - Kräftegleichgewicht in *x*-Richtung: $\left[\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{er}}\right]=\begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \end{bmatrix}$
    - Die virtuelle Verschiebung ist eine Translation in *x*-Richtung.
    - Wegen $\left[\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{v}}\right]=\left[\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{xy}}\right]\left[\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{er}}\right]=\left[\boldsymbol{0}\right]$ gilt:

$$0=v_0\left(\sum_m F_{mx}+\int_C q_x t\,ds+\int_A f_x t\,dA\right) \rightarrow \sum F_x=0$$

  - Kräftegleichgewicht in *y*-Richtung: $\left[\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{er}}\right]=\begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \end{bmatrix}$
    - Die virtuelle Verschiebung ist eine Translation in *y*-Richtung.

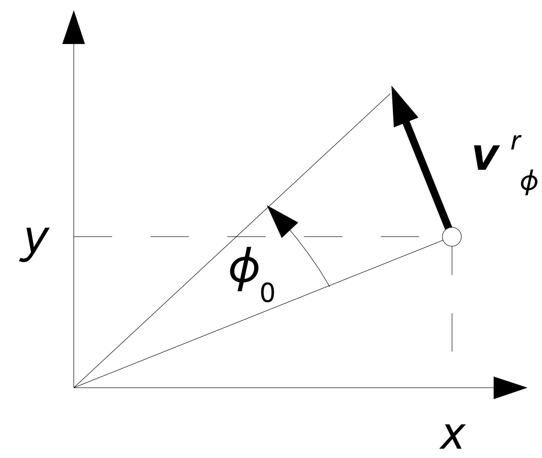
3.2 Scheibe

- Wegen $[\boldsymbol{\epsilon}_v]=[\partial_{xy}][\boldsymbol{v}_y^{er}]=[\mathbf{0}]$ gilt:

$$0=v_0\left(\sum_m F_{my}+\int_C q_y t\,ds+\int_A f_y t\,dA\right)\;\rightarrow\;\sum F_y=0$$

– Momentengleichgewicht um den Ursprung: $[\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\phi}}^{er}]=\phi_0\begin{bmatrix}-y\\ x\end{bmatrix}$

- Die virtuelle Verschiebung ist eine linearisierte Drehung um den Ursprung.



3.2 Scheibe

- Die Dehnungen berechnen sich zu

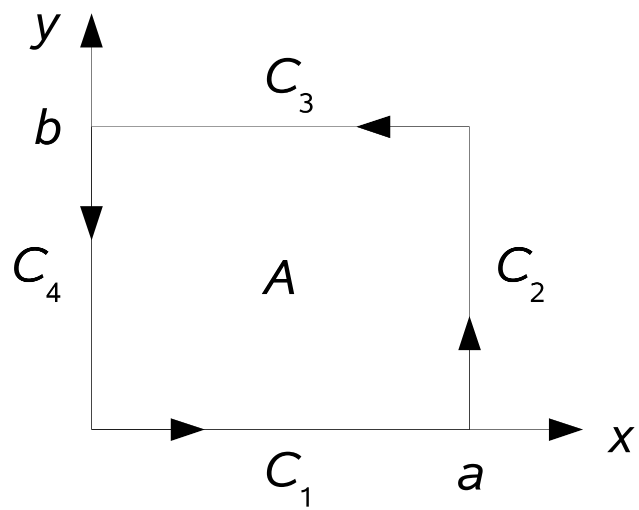
$$\left[\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{v}}\right]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \phi_0 \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = \phi_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit folgt:

$$0=\phi_0\left[\sum_m \left(-y_m F_{mx}+x_m F_{my}\right)+\int_C \left(-y\, q_x+x\, q_y\right) t\, ds \right.$$
$$\left. +\int_A \left(-y\, f_x+x\, f_y\right) t\, dA\right] \rightarrow \sum M_{(O)}=0$$

3.2 Scheibe

- Lokales Gleichgewicht:
  - Betrachtet wird eine rechteckige Scheibe.
  - Im Inneren greifen Volumenkräfte und am Rand Flächenkräfte an.
  - Es greifen keine Einzelkräfte an.



3.2 Scheibe

– Virtuelle Formänderungsenergie:

$$\int_V \left[\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{v}}\right]^T \left[\boldsymbol{\sigma}\right] dV = t \int_A \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\sigma_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\sigma_y + \frac{\partial v_y}{\partial x}\tau_{xy} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\tau_{xy} \right) dA$$

$$= t \int_0^b \left[\int_0^a \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\sigma_x + \frac{\partial v_y}{\partial x}\tau_{xy} \right) dx \right] dy + t \int_0^a \left[\int_0^b \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\sigma_y + \frac{\partial v_x}{\partial y}\tau_{xy} \right) dy \right] dx$$

$$= t \int_0^b \left[\left[v_x \sigma_x + v_y \tau_{xy} \right]_{x=0}^{x=a} - \int_0^a \left(v_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dx \right] dy$$

$$+ t \int_0^a \left[\left[v_y \sigma_y + v_x \tau_{xy} \right]_{y=0}^{y=b} - \int_0^b \left(v_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + v_x \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dy \right] dx$$

3.2 Scheibe

$$\int_V [\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{v}}]^T [\boldsymbol{\sigma}] dV = t \int_{C_2} (v_x \sigma_x + v_y \tau_{xy}) ds - t \int_{C_4} (v_x \sigma_x + v_y \tau_{xy}) ds$$
$$+ t \int_{C_3} (v_y \sigma_y + v_x \tau_{xy}) ds - t \int_{C_1} (v_y \sigma_y + v_x \tau_{xy}) ds$$
$$- t \int_A \left[v_x \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) + v_y \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \right] dA$$

– Virtuelle Arbeit der Flächenkräfte:

$$\int_R [\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{e}}]^T [\boldsymbol{q}] dR = t \int_{C_1} (v_x q_x + v_y q_y) ds + t \int_{C_2} (v_x q_x + v_y q_y) ds$$
$$+ t \int_{C_3} (v_x q_x + v_y q_y) ds + t \int_{C_4} (v_x q_x + v_y q_y) ds$$

3.2 Scheibe

– Virtuelle Arbeit der Volumenkraft:

$$\int_V \left[\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{e}}\right]^T \left[\boldsymbol{f}\right] dV = t \int_A \left(v_x f_x + v_y f_y\right) dA$$

– Da die virtuellen Verschiebungen beliebig sind, folgt durch Vergleich der Terme im Prinzip der virtuellen Arbeit:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0$$

$$\begin{array}{lllll} \tau_{xy} = -q_x, & \sigma_y = -q_y & \text{auf} & C_1 \\ \sigma_x = q_x, & \tau_{xy} = q_y & \text{auf} & C_2 \\ \tau_{xy} = q_x, & \sigma_y = q_y & \text{auf} & C_3 \\ \sigma_x = -q_x, & \tau_{xy} = -q_y & \text{auf} & C_4 \end{array}$$

3.2 Scheibe

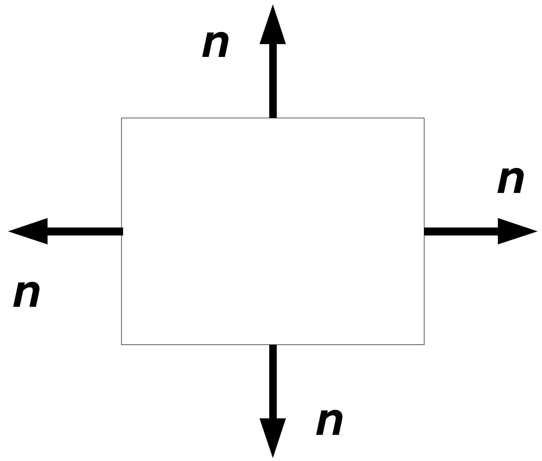
– Mit dem nach außen zeigenden Einheitsnormalenvektor

$$[\boldsymbol{n}] = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}$$

lassen sich die Randbedingungen für die Spannungen zusammenfassen zu

$$\begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}$$

– Mit dem Integralsatz von Gauß lässt sich zeigen, dass die Ergebnisse auch für eine Scheibe beliebiger Form gelten.



3.2 Scheibe

- Zusammenfassung:
  - Das Prinzip der virtuellen Arbeit lautet:

$$\int_V [\boldsymbol{\epsilon_v}]^T [\boldsymbol{\sigma}] dV = \sum_m [\boldsymbol{v_m^e}]^T [\boldsymbol{F_m}] + \int_R [\boldsymbol{v^e}]^T [\boldsymbol{q^e}] dR + \int_V [\boldsymbol{v^e}]^T [\boldsymbol{f^e}] dV$$

für alle $[\boldsymbol{v^e}]$

  - Im Prinzip der virtuellen Arbeit sind die folgenden Bedingungen enthalten:
    - die Gleichgewichtsbedingungen für die Scheibe
    - die Spannungsrandbedingungen am Rand
    - die Gleichgewichtsbedingungen für die Spannungen