3. Isoparametrische Elemente

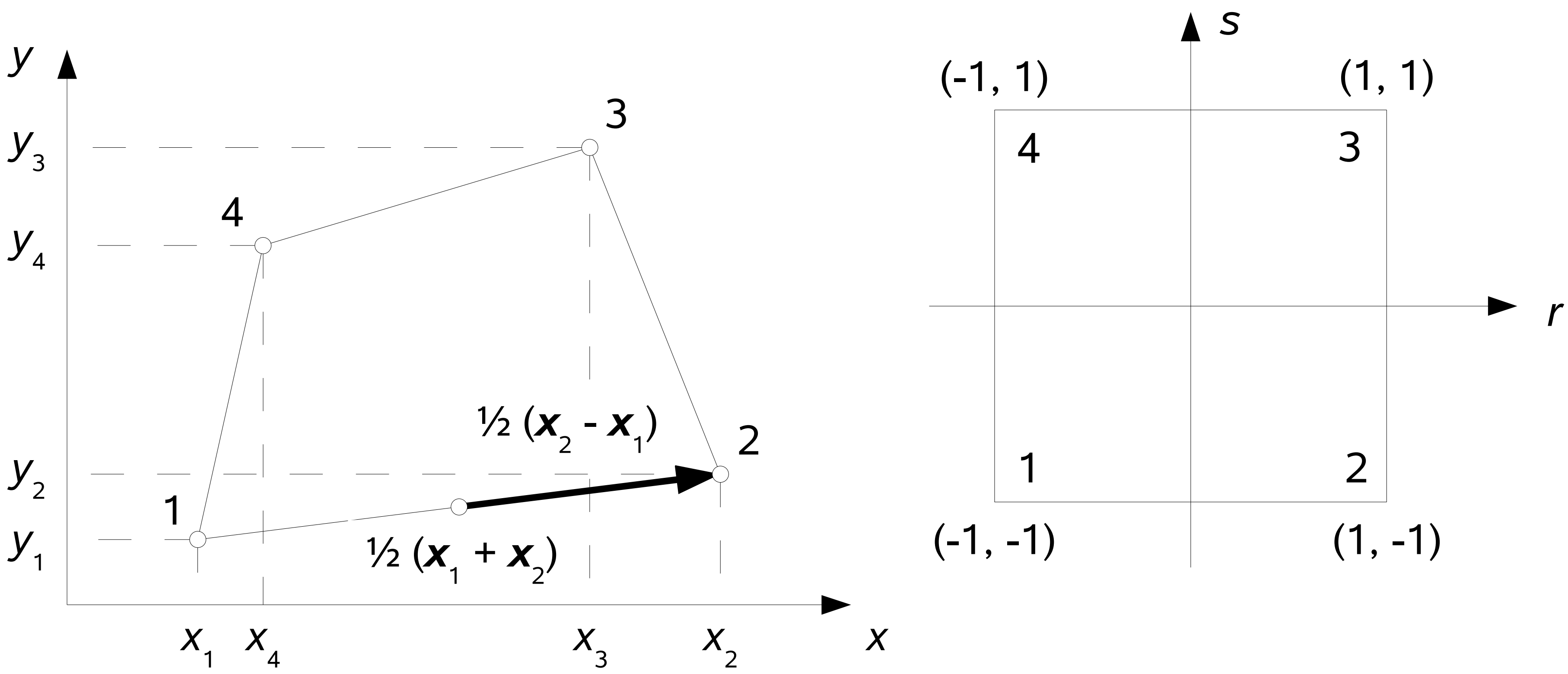
- Mit dem einfachen Rechteckelement lassen sich nur Probleme mit einer sehr einfachen Geometrie berechnen.
- Vielseitigere Elemente lassen sich formulieren, wenn neben den Verschiebungen auch die Geometrie interpoliert wird.
- In der Regel werden dabei die gleichen Interpolationsfunktionen für die Geometrie und für die Verschiebungen verwendet.
- Diese Elemente werden daher als isoparametrische Elemente bezeichnet.

3. Isoparametrische Elemente

1. Lineares Viereck-Element
2. Quadratische Viereck-Elemente
3. Dreieck-Elemente
4. Diskretisierungsregeln

3.1 Lineares Viereck-Element

- Geometrie:



3.1 Lineares Viereck-Element

– Interpolation:

- Bei einem linearen Element werden lineare Interpolationsfunktionen verwendet.
- Die Elementkanten sind gerade Linien.
- Für Punkte auf der Kante 1-2 gilt:

$$\boldsymbol{x}_{12}(r)=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2\right)+\frac{r}{2}\left(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1\right)=\frac{1}{2}(1-r)\boldsymbol{x}_1+\frac{1}{2}(1+r)\boldsymbol{x}_2,\quad -1\leq r\leq 1$$

- Für Punkte auf der Kante 4-3 gilt:

$$\boldsymbol{x}_{43}(r)=\frac{1}{2}(1+r)\boldsymbol{x}_3+\frac{1}{2}(1-r)\boldsymbol{x}_4,\quad -1\leq r\leq 1$$

3.1 Lineares Viereck-Element

- Jeder Punkt im Element liegt zwischen diesen beiden Kanten:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(r,s) &= \frac{1}{2}(1-s)\,\boldsymbol{x}_{12} + \frac{1}{2}(1+s)\,\boldsymbol{x}_{43} \\
&= \frac{1}{4}(1-s)(1-r)\,\boldsymbol{x}_1 + \frac{1}{4}(1-s)(1+r)\,\boldsymbol{x}_2 \\
&+ \frac{1}{4}(1+s)(1+r)\,\boldsymbol{x}_3 + \frac{1}{4}(1+s)(1-r)\,\boldsymbol{x}_4 \\
&= N_1(r,s)\,\boldsymbol{x}_1 + N_2(r,s)\,\boldsymbol{x}_2 + N_3(r,s)\,\boldsymbol{x}_3 + N_4(r,s)\,\boldsymbol{x}_4
\end{aligned}
$$

- Die Interpolationsfunktionen stimmen mit den beim einfachen Rechteckelement verwendeten Interpolationsfunktionen überein.
- Für die Interpolationsfunktionen gilt:

$$N_1(r,s) + N_2(r,s) + N_3(r,s) + N_4(r,s) = 1$$

3.1 Lineares Viereck-Element

- Die Koordinaten der Elementknoten werden in der Matrix der Knotenpunktskoordinaten zusammengefasst:

$$\left[\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{E}}\right]^T = \left[x_1 \quad y_1 \quad \cdots \quad x_4 \quad y_4\right]$$

- Mit der Interpolationsmatrix

$$\left[\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{E}}(r,s)\right] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

gilt:

$$\left[\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{e}}(r,s)\right] = \begin{bmatrix} x(r,s) \\ y(r,s) \end{bmatrix} = \left[\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{E}}(r,s)\right]\left[\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{E}}\right]$$

3.1 Lineares Viereck-Element

– Ableitungen:

- Die Ableitungen der Koordinaten nach den Parametern *r* und *s* berechnen sich zu

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{x}^e}{\partial r}\right]=\left[\frac{\partial \boldsymbol{N}^E}{\partial r}\right]\left[\boldsymbol{x}^E\right], \quad \left[\frac{\partial \boldsymbol{x}^e}{\partial s}\right]=\left[\frac{\partial \boldsymbol{N}^E}{\partial s}\right]\left[\boldsymbol{x}^E\right]$$

- In Komponenten gilt:

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial N_k}{\partial r}x_k, \quad \frac{\partial y}{\partial r}=\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial N_k}{\partial r}y_k$$

$$\frac{\partial x}{\partial s}=\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial N_k}{\partial s}x_k, \quad \frac{\partial y}{\partial s}=\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial N_k}{\partial s}y_k$$

3.1 Lineares Viereck-Element

- Für eine beliebige Funktion $\phi(x, y)$ gilt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

- In Matrix-Schreibweise lauten diese Beziehungen:

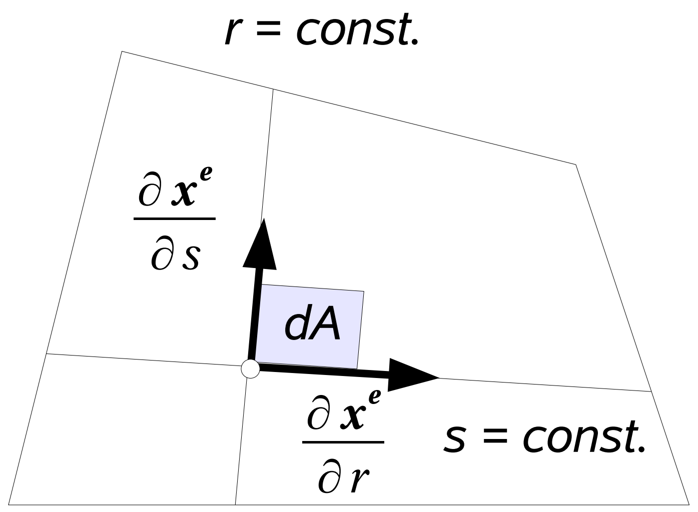
$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial r} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} = \left[\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{E}}(r, s) \right] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- Die Matrix $\left[\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{E}}(r, s) \right]$ heißt Jacobi-Matrix. Ihre Elemente hängen linear von *r* und *s* ab.

3.1 Lineares Viereck-Element

– Flächenelement:

- Die Vektoren $\partial \boldsymbol{x}^e / \partial r$ bzw. $\partial \boldsymbol{x}^e / \partial s$ sind parallel zu den Linien, auf denen *s* bzw *r* konstant ist.



$$dA = \det\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}^e}{\partial r}, \frac{\partial \boldsymbol{x}^e}{\partial s}\right) dr\, ds$$
$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial s} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} dr\, ds$$
$$= \det\left(\left[\boldsymbol{J}^E\right]\right) dr\, ds = J^E\, dr\, ds$$

3.1 Lineares Viereck-Element

- Die Jacobi-Determinante

$$J^E = \det\left(\left[\boldsymbol{J}^E\right]\right) = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial r}$$

  ist eine bilineare Funktion in *r* und *s*.

- Bei einem Parallelogramm ist die Jacobi-Determinante konstant.

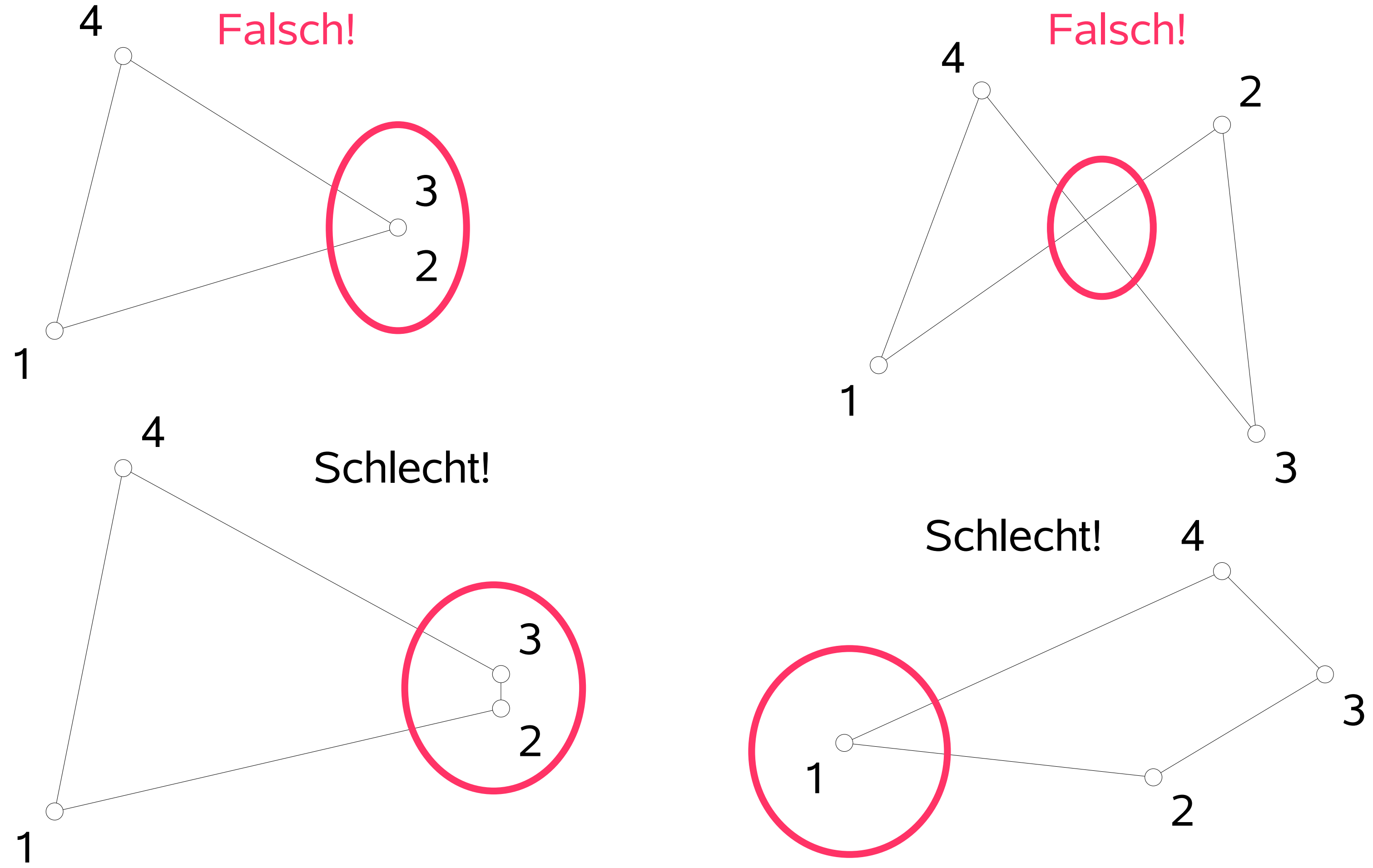
– Verzerrte Elemente:

- Die Beziehung zwischen den Koordinaten (*x*, *y*) und den Parameterwerten (*r*, *s*) muss umkehrbar eindeutig sein.
- Dann ist die Jacobi-Determinante in jedem Punkt des Elements positiv.

3.1 Lineares Viereck-Element

- Diese Bedingung ist verletzt, wenn zwei Knotenpunkte zusammen fallen oder wenn sich das Element überschneidet.
- Wenn eine Kantenlänge sehr klein im Vergleich zu den Längen der anderen Kanten ist oder ein Winkel sehr spitz ist, dann ist die Jacobi-Determinante in der Nähe der entsprechenden Knoten nahezu null.
- Derartig verzerrte Elemente sind zu vermeiden.

3.1 Lineares Viereck-Element



- Verschiebungen:
  - Für die Verschiebungen wird der gleiche Ansatz verwendet wie beim einfachen Rechteckelement:

$$\left[\boldsymbol{u}^{eE}(r,s)\right]=\begin{bmatrix}u_x(r,s)\\u_y(r,s)\end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{N}^E(r,s)\right]\left[\boldsymbol{u}^E\right]$$

  - Mit diesem Verschiebungsansatz lassen sich die Starrkörperbewegungen darstellen:
    - Translationen: $\left[\boldsymbol{u}^E\right]^T=\left[u_{0x}\quad u_{0y}\quad u_{0x}\quad u_{0y}\quad u_{0x}\quad u_{0y}\quad u_{0x}\quad u_{0y}\right]$

$$\left[\boldsymbol{u}^{eE}(r,s)\right]=\begin{bmatrix}\left(N_1+N_2+N_3+N_4\right)u_{0x}\\\left(N_1+N_2+N_3+N_4\right)u_{0y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{0x}\\u_{0y}\end{bmatrix}$$

3.1 Lineares Viereck-Element

- Rotation um den Ursprung des Koordinatensystems:

$$\left[\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{E}}\right]^T = \phi \begin{bmatrix} -y_1 & x_1 & -y_2 & x_2 & -y_3 & x_3 & -y_4 & x_4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{eE}}(r,s)\right] = \phi \begin{bmatrix} -N_1 y_1 - N_2 y_2 - N_3 y_3 - N_4 y_4 \\ N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 \end{bmatrix} = \phi \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

- Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix:
  - Für die Berechnung der Dehnungen werden die Ableitungen der Ansatzfunktionen nach *x* und *y* benötigt.
  - Die Ableitungen nach den Parametern *r* und *s* können unmittelbar aus den Ansatzfunktionen berechnet werden.

3.1 Lineares Viereck-Element

– Aus

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_k}{\partial r} \\ \dfrac{\partial N_k}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_k}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} = \left[\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{E}}(r, s) \right] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_k}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, 4$$

folgt:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_k}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} = \left[\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{E}}(r, s) \right]^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_k}{\partial r} \\ \dfrac{\partial N_k}{\partial s} \end{bmatrix}$$

3.1 Lineares Viereck-Element

– Die inverse Jacobi-Matrix berechnet sich zu

$$\left[\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{E}}\right]^{-1}=\frac{1}{J^E}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial s} & -\dfrac{\partial y}{\partial r}\\ -\dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial r}\end{bmatrix}$$

– Die Elemente der inversen Jacobi-Matrix sind gebrochen rationale Funktionen. Der Zähler ist ein Polynom ersten Grades und der Nenner ein Polynom zweiten Grades in *r* und *s*.

– Die inverse Jacobi-Matrix existiert, wenn die Jacobi-Determinante nicht null ist.

3.1 Lineares Viereck-Element

- Mit den Ableitungen der Ansatzfunktionen lässt sich die Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix aufstellen:

$$\left[\boldsymbol{B}^{E}\right]=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

- Die Elemente dieser Matrix sind gebrochen rationale Funktionen in *r* und *s*.

3.1 Lineares Viereck-Element

- Steifigkeitsmatrix:
  - Die Steifigkeitsmatrix berechnet sich aus

$$\left[\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{E}}\right]=\int_{V_E}\left[\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{E}}\right]^T\left[\boldsymbol{C}\right]\left[\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{E}}\right]dV=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\left[\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{E}}\right]^T\left[\boldsymbol{C}\right]\left[\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{E}}\right]t\,J^E\,dr\right)ds$$

  - Der Integrand ist eine gebrochen rationale Funktion in *r* und *s*.
  - Das Integral wird in der Regel mit der Gauß-Integration berechnet, wobei die Anzahl der Integrationspunkte so gewählt wird, dass ein rechteckiges Element exakt integriert wird.

3.1 Lineares Viereck-Element

- Bei einem rechteckigen Element ist der Integrand ein Polynom zweiten Grades in *r* und *s*.
- Daher ist eine Integration mit 2 x 2 Integrationspunkten ausreichend.
- Diese Integrationsordnung ergibt bei nicht rechteckigen Elementen eine brauchbare Näherung, wenn die Elemente nicht zu stark verzerrt sind.

3.1 Lineares Viereck-Element

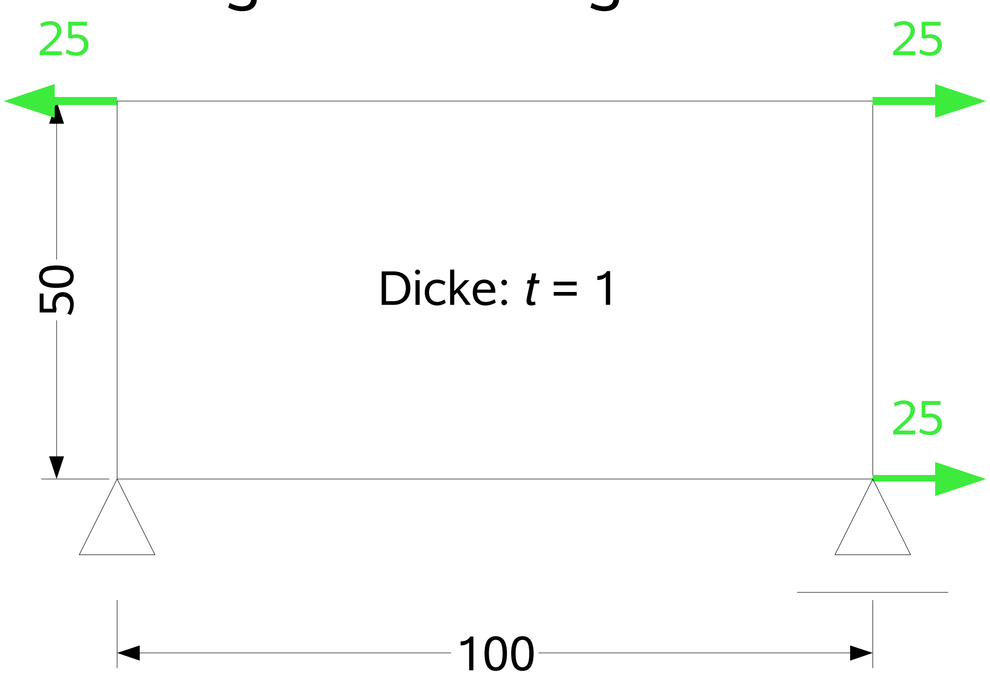
- Bewertung:
  - Das Element stimmt mit dem einfachen Rechteckelement überein, wenn es rechteckig ist.
  - Es hat daher im Wesentlichen dieselben Eigenschaften:
    - Konstante Dehnungen können exakt dargestellt werden.
    - Eine reine Biegung kann nicht dargestellt werden, da die Schubspannung nur im Mittelpunkt des Elements null wird.
  - Je stärker das Element von der Rechteckform abweicht, desto ungenauer sind die Ergebnisse.

3.1 Lineares Viereck-Element

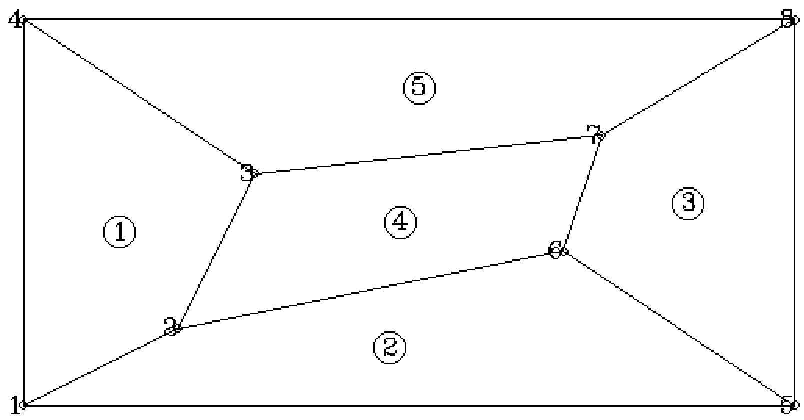
- Beispiel: Patch-Test (Bruce Irons, 1966)
  - Ein Element muss in der Lage sein, konstante Spannungen korrekt wiederzugeben, auch wenn es verzerrt ist.
  - Für den Test wird eine rechteckige Scheibe mit unregelmäßigen verzerrten Elementen diskretisiert und so belastet, dass die exakten Spannungen konstant sind.

3.1 Lineares Viereck-Element

- Aufgabenstellung:



- Diskretisierung:



- Welchen Wert haben die exakten Spannungen?

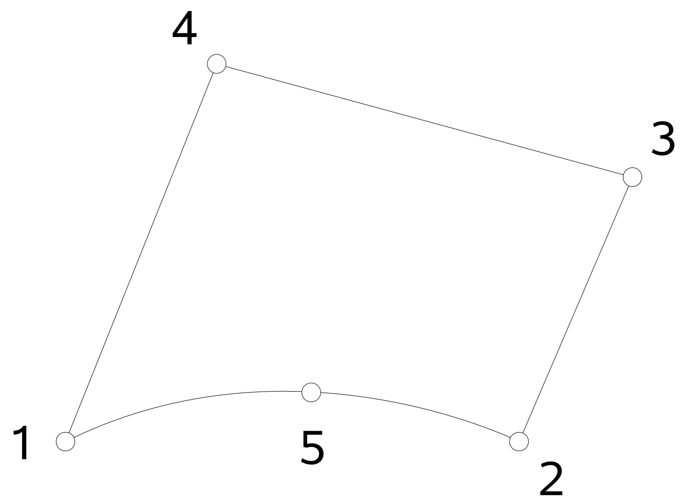
3.1 Lineares Viereck-Element

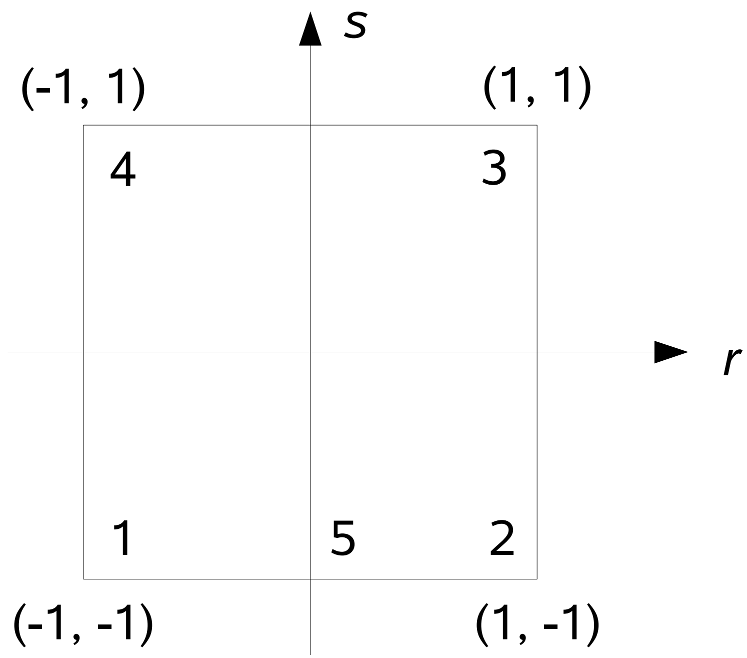
- Spannungen an den Gauß-Punkten:

```
# -----------------------------------------------------------------
#  elem      x         y          sig_x       sig_y      tau_xy
# -----------------------------------------------------------------
      1      4.67     11.34     1.000e+00   4.441e-16  -4.163e-17
      1     17.44     13.45     1.000e+00   1.943e-16  -1.665e-16
      1      5.89     36.55     1.000e+00   3.331e-16  -9.714e-17
      1     21.99     28.66     1.000e+00   2.498e-16  -1.527e-16
      2     23.13      2.56     1.000e+00   3.331e-16   9.888e-17
      2     74.76      3.78     1.000e-00  -1.284e-16  -2.949e-17
      2     28.57      9.55     1.000e-00   2.220e-16   1.284e-16
      2     63.54     14.11     1.000e-00  -3.426e-16  -5.169e-16
      3     93.88     13.23     1.000e-00  -4.233e-16   3.192e-16
      3     94.49     37.83     1.000e-00  -3.053e-16   2.880e-16
      3     77.17     20.51     1.000e+00  -1.943e-16   6.939e-16
      3     79.45     33.44     1.000e-00  -5.551e-16   6.687e-16
      4     32.46     16.12     1.000e-00  -1.665e-16   1.527e-16
      4     60.71     21.28     1.000e-00  -4.163e-16   9.784e-16
      4     37.62     27.05     1.000e+00   4.441e-16  -8.327e-17
      4     64.21     30.55     1.000e-00  -1.110e-16   6.800e-16
      5     35.63     35.06     1.000e+00  -2.220e-16   6.939e-17
      5     68.32     37.34     1.000e+00  -4.441e-16   1.561e-16
      5     25.02     46.00     1.000e+00  -2.220e-16   1.041e-16
      5     76.04     46.61     1.000e+00  -4.441e-16  -4.163e-17
```

3.2 Quadratische Viereck-Elemente

- Konstruktion der Interpolationsfunktionen:
  - Die Interpolationsfunktionen lassen sich durch sukzessives Hinzufügen weiterer Knoten konstruieren.
  - Knoten 5 auf der Kante 1-2:





3.2 Quadratische Viereck-Elemente

- Die Interpolationsfunktion N_5 muss am Knoten 5 den Wert eins und an allen anderen Knoten den Wert null haben:

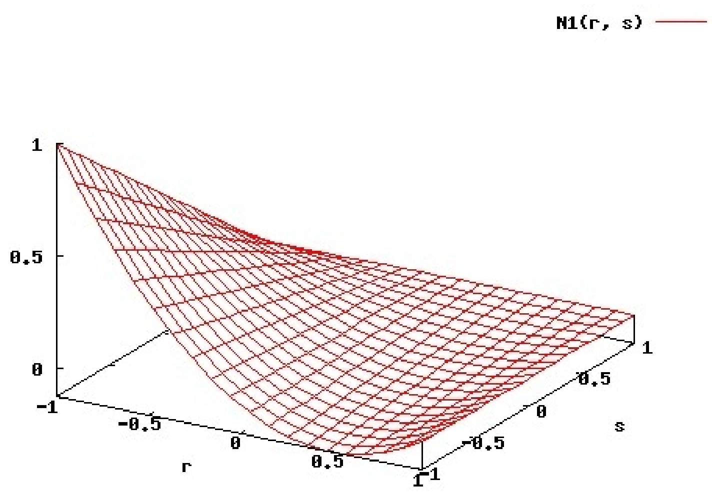
$$N_5(r,s)=\frac{1}{2}\left(1-r^2\right)\left(1-s\right)$$

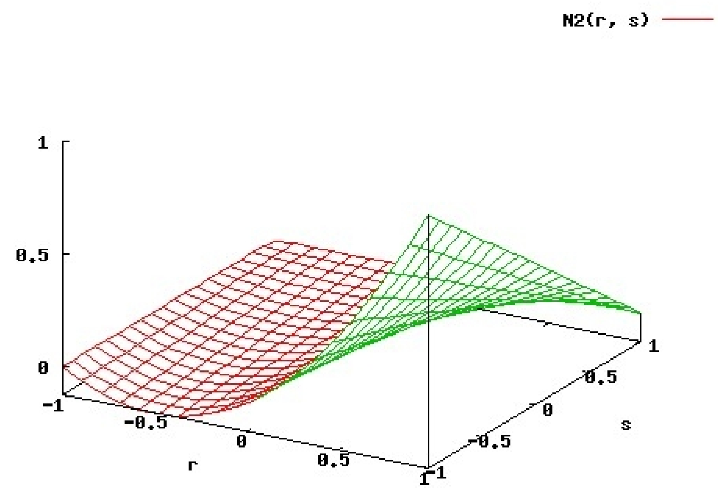
- Die Interpolationsfunktionen N_1 und N_2 müssen so geändert werden, dass sie am Knoten 5 null werden:

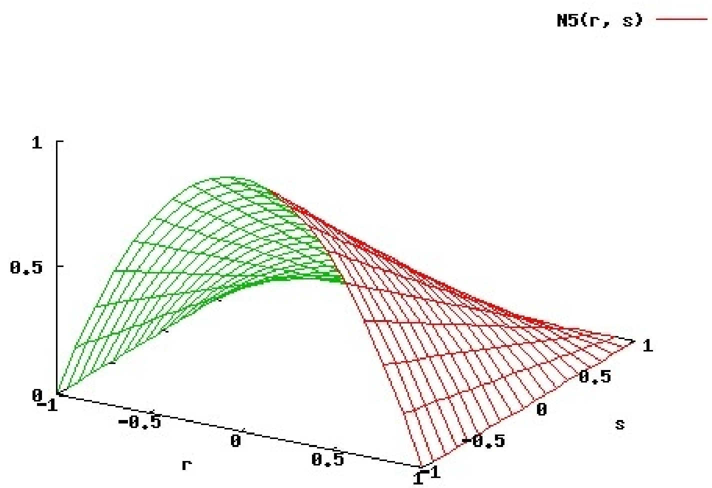
$$N_1(r,s)=\frac{1}{4}\left(1-r\right)\left(1-s\right)-\frac{1}{2}N_5(r,s)$$

$$N_2(r,s)=\frac{1}{4}\left(1+r\right)\left(1-s\right)-\frac{1}{2}N_5(r,s)$$

3.2 Quadratische Viereck-Elemente







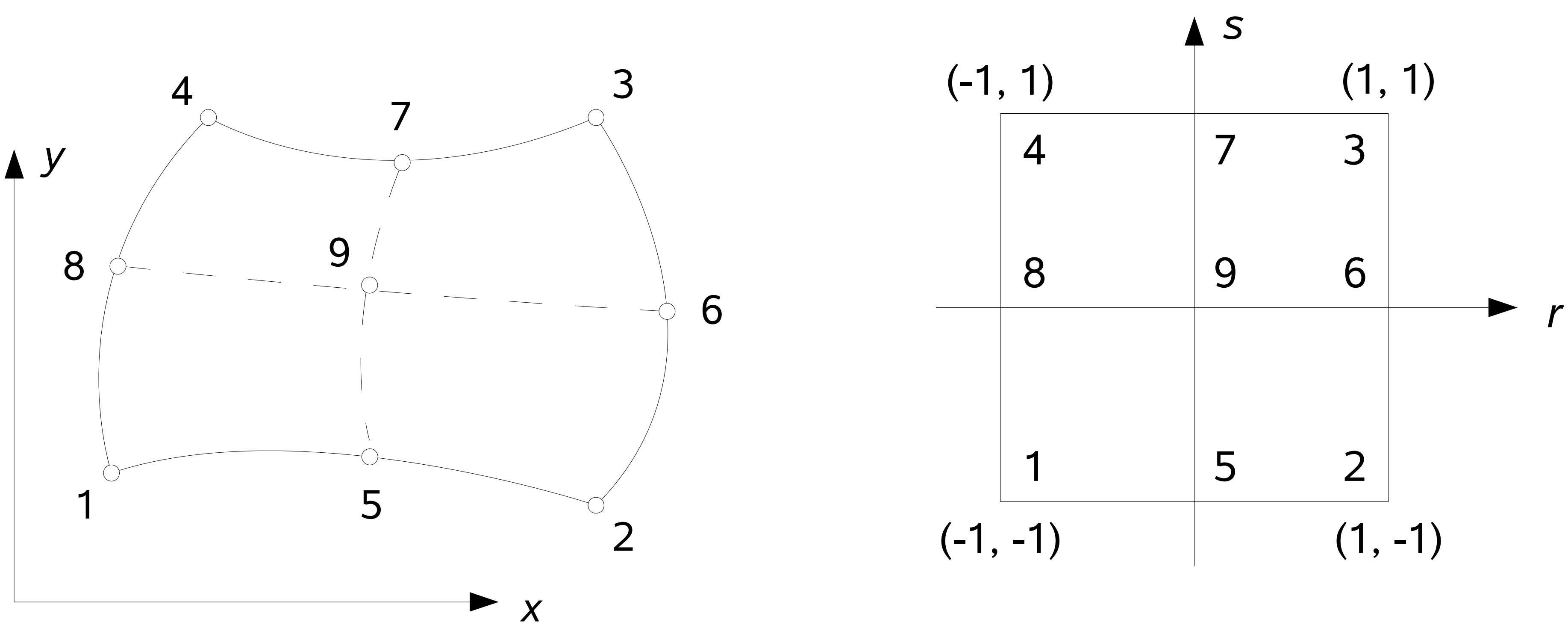
3.2 Quadratische Viereck-Elemente

- Auf die gleiche Weise können Knoten zu den übrigen drei Kanten hinzugefügt werden.
- Ein neunter Knoten kann im Inneren des Elements eingefügt werden:

$$N_9(r, s) = (1 - r^2)(1 - s^2)$$

- Die übrigen Interpolationsfunktionen sind so zu modifizieren, dass sie an dem jeweils neu eingefügten Knoten null werden, ohne dass sich ihr Wert an den anderen Knoten ändert.
- Das lässt sich durch Subtraktion eines Vielfachen der neu hinzukommenden Interpolationsfunktion erreichen.

3.2 Quadratische Viereck-Elemente



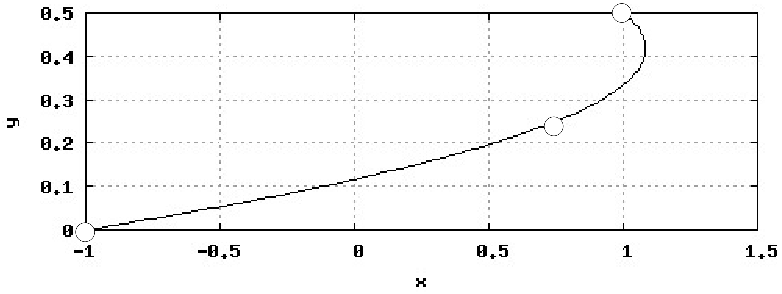
3.2 Quadratische Viereck-Elemente

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s) && -\frac{1}{2}N_5 && && && -\frac{1}{2}N_8 && -\frac{1}{4}N_9 \\
N_2 &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s) && -\frac{1}{2}N_5 && -\frac{1}{2}N_6 && && && -\frac{1}{4}N_9 \\
N_3 &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s) && && -\frac{1}{2}N_6 && -\frac{1}{2}N_7 && && -\frac{1}{4}N_9 \\
N_4 &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s) && && && -\frac{1}{2}N_7 && -\frac{1}{2}N_8 && -\frac{1}{4}N_9 \\
N_5 &= \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s) && && && && && -\frac{1}{2}N_9 \\
N_6 &= \frac{1}{2}(1+r)(1-s^2) && && && && && -\frac{1}{2}N_9 \\
N_7 &= \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s) && && && && && -\frac{1}{2}N_9 \\
N_8 &= \frac{1}{2}(1-r)(1-s^2) && && && && && -\frac{1}{2}N_9 \\
N_9 &= (1-r^2)(1-s^2)
\end{aligned}
$$

3.2 Quadratische Viereck-Elemente

– Einschränkungen:

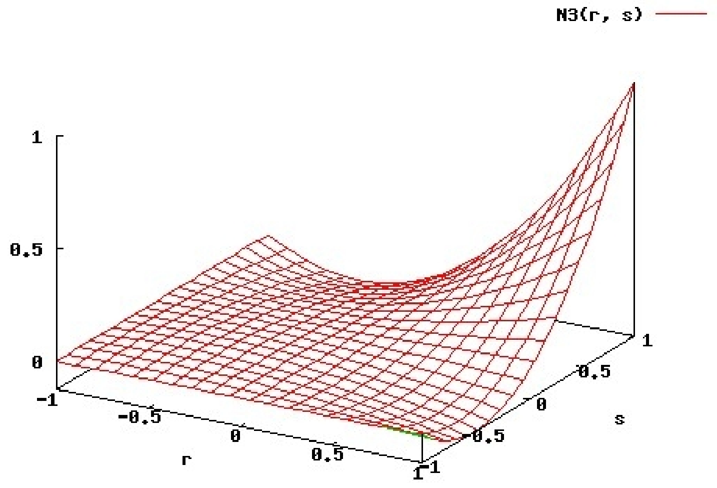
- Die auf den Kanten eingefügten Knoten sollten möglichst in der Mitte zwischen den entsprechenden Eckknoten liegen.
- Der innere Knoten sollte möglichst im Schwerpunkt des Elements liegen.
- Wenn die Knoten auf den Kanten zu nahe bei den Eckknoten liegen, schießt das Element über:

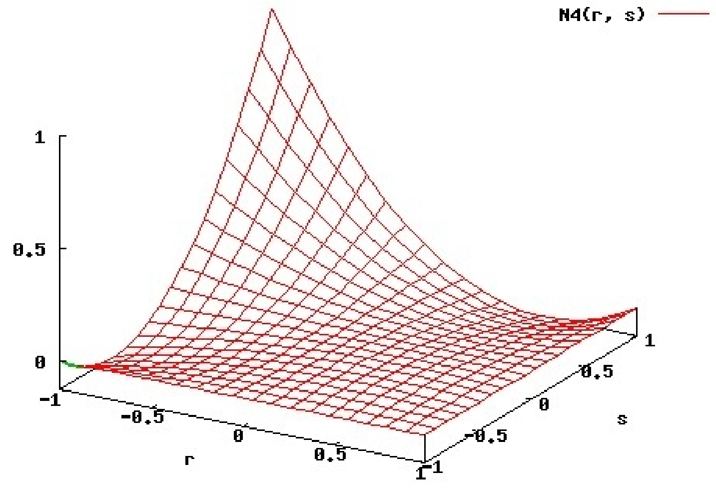


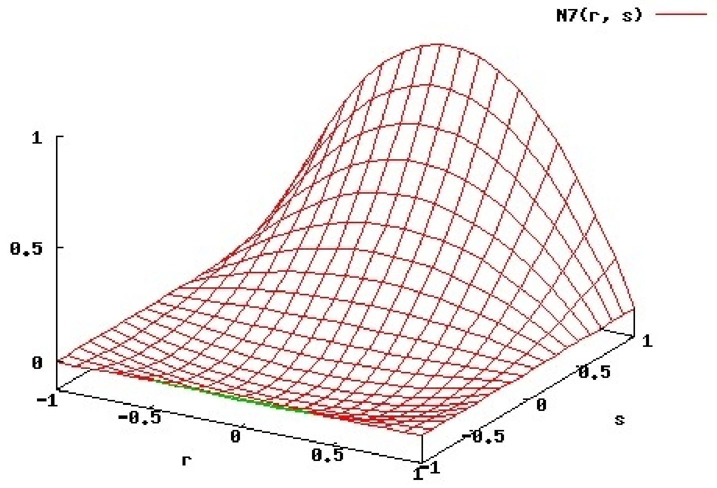
3.2 Quadratische Viereck-Elemente

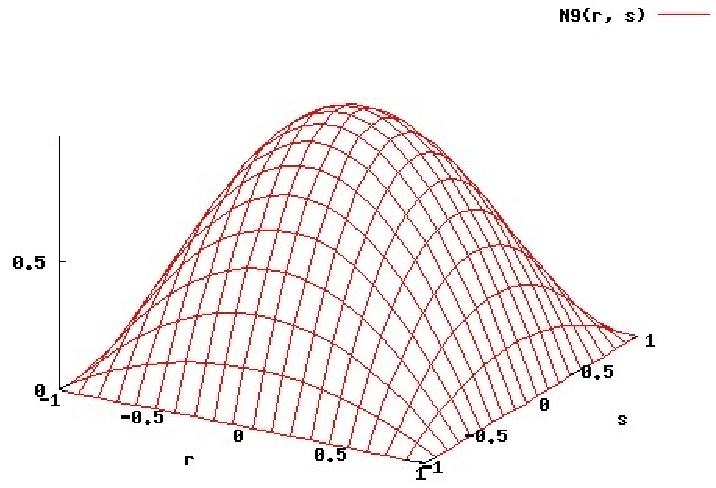
- Quadratisches Element mit 9 Knoten:
  - Das Element hat einen vollständigen quadratischen Ansatz, d.h. es sind alle Produkte der Funktionen 1, r, r^2 mit den Funktionen 1, s, s^2 in den Ansatzfunktionen enthalten.
  - Wenn alle Kanten gerade sind, kann das Element lineare Dehnungsverläufe exakt darstellen.
  - In der Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix treten Elemente auf, die quadratisch von r oder s abhängen.
  - Für die Berechnung der Steifigkeitsmatrix müssen daher mindestens 3 x 3 Integrationspunkte verwendet werden.

3.2 Quadratisches Viereck-Element





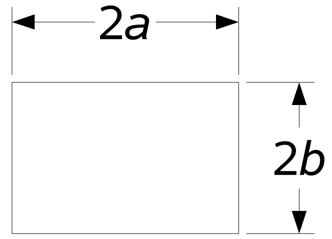




3.2 Quadratische Viereck-Elemente

– Knotenpunktskräfte für eine konstante Volumenlast:

- Betrachtet wird ein rechteckiges Element, auf das eine konstante Volumenlast wirkt:



$$[\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{e}}] = \begin{bmatrix} f_x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_x = const.$$

- Für die zugehörigen Knotenpunktskräfte gilt:

$$[\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{E}}] = \int_{V_E} [\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{E}}]^T dV [\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{e}}]$$

- Mit $dV = a\,b\,t\,dr\,ds$ folgt:

$$[\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{E}}] = a\,b\,t \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} [\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{E}}]^T dr \right) ds [\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{e}}]$$

3.2 Quadratische Viereck-Elemente

- Berechnung der Integrale:

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} N_9(r,s)\,dr\right)ds=\int_{-1}^{1}\left(1-r^2\right)dr\int_{-1}^{1}\left(1-s^2\right)ds=\frac{4}{3}\frac{4}{3}=\frac{16}{9}$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} N_5(r,s)\,dr\right)ds=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-r^2\right)dr\int_{-1}^{1}\left(1-s\right)ds-\frac{1}{2}\frac{16}{9}=\frac{1}{2}\frac{4}{3}\cdot 2-\frac{8}{9}=\frac{4}{9}$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} N_6(r,s)\,dr\right)ds=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} N_7(r,s)\,dr\right)ds=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} N_8(r,s)\,dr\right)ds=\frac{4}{9}$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} N_1(r,s)\,dr\right)ds=1-\frac{1}{2}\frac{4}{9}-\frac{1}{2}\frac{4}{9}-\frac{1}{4}\frac{16}{9}=\frac{1}{9}$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} N_2(r,s)\,dr\right)ds=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} N_3(r,s)\,dr\right)ds=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} N_4(r,s)\,dr\right)ds=\frac{1}{9}$$

3.2 Quadratische Viereck-Elemente

- Ergebnis: $V = 4\,a\,b\,t$

$$f_{1x}^E = f_{2x}^E = f_{3x}^E = f_{4x}^E = \frac{1}{36} V\, f_x$$

$$f_{5x}^E = f_{6x}^E = f_{7x}^E = f_{8x}^E = \frac{1}{9} V\, f_x$$

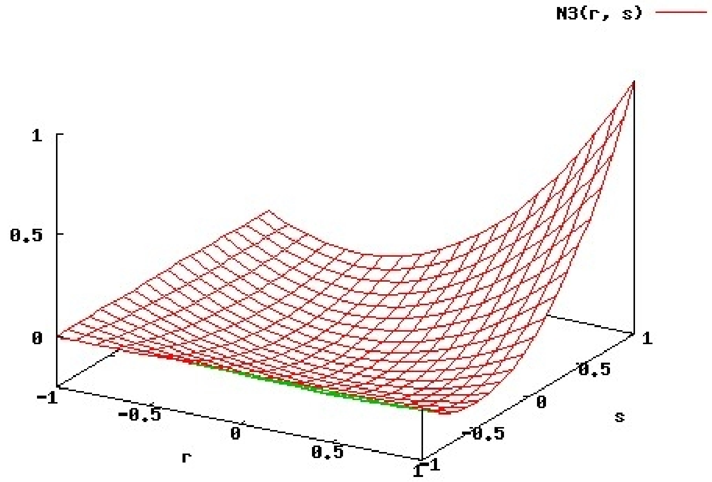
$$f_{9x}^E = \frac{4}{9} V\, f_x$$

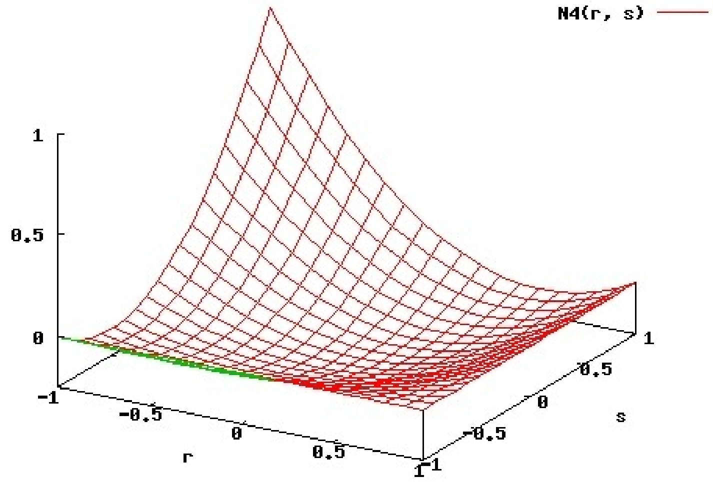
- Die größte Kraft greift am inneren Knoten an, während die Kräfte an den Eckknoten am kleinsten sind.

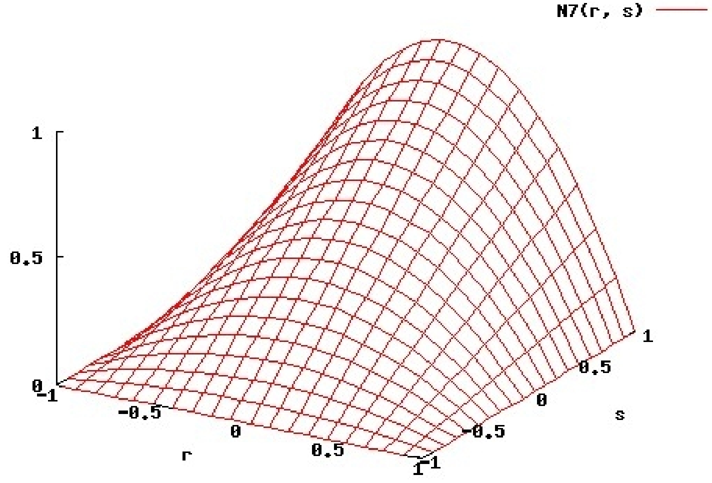
3.2 Quadratische Viereck-Elemente

- Quadratisches Element mit 8 Knoten:
  - Elemente höherer Ordnung ohne innere Knoten werden als Serendipity-Elemente bezeichnet.
  - Das Element hat einen unvollständigen quadratischen Ansatz, da der Term $r^2 s^2$ fehlt.
  - Lineare Dehnungsverläufe können nur dann exakt dargestellt werden, wenn das Element ein Parallelogramm ist.

3.2 Quadratische Viereck-Elemente



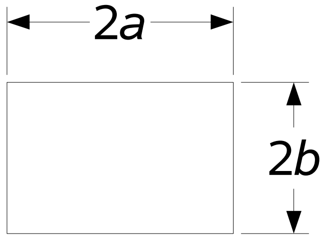




3.2 Quadratische Viereck-Elemente

– Knotenpunktskräfte für eine konstante Volumenlast:

- Betrachtet wird ein rechteckiges Element, auf das eine konstante Volumenlast wirkt:



$$\left[\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{e}}\right]=\begin{bmatrix} f_x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_x = const.$$

- Für die zugehörigen Knotenpunktskräfte gilt:

$$\left[\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{E}}\right]=\int_{V_E}\left[\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{E}}\right]^T dV \left[\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{e}}\right]$$

- Mit $dV = a\,b\,t\,dr\,ds$ folgt:

$$\left[\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{E}}\right]=a\,b\,t\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\left[\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{E}}\right]^T dr\right)ds\left[\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{e}}\right]$$

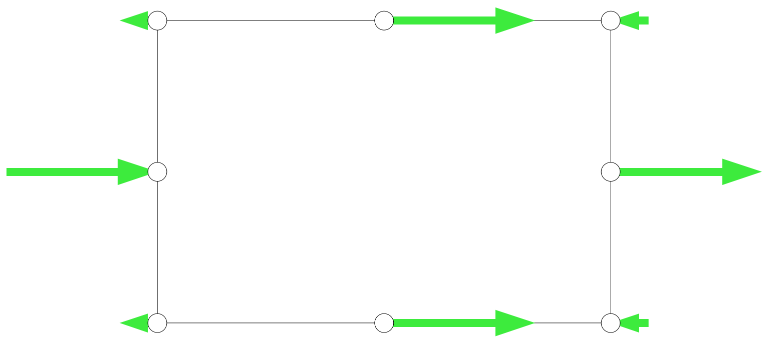
3.2 Quadratische Viereck-Elemente

- Die Berechnung der Integrale ergibt:

$$V = 4abt$$

$$f_{1x}^E = f_{2x}^E = f_{3x}^E = f_{4x}^E = -\frac{1}{12} V f_x$$

$$f_{5x}^E = f_{6x}^E = f_{7x}^E = f_{8x}^E = \frac{1}{3} V f_x$$



- Die Kräfte an den Eckknoten wirken in die entgegengesetzte Richtung!

3.2 Quadratische Viereck-Elemente

- Fehlerabschätzung:
  - Ist *h* eine typische Länge einer Elementkante und *N* die Anzahl der Elemente, dann gilt für den Fehler in den Dehnungen
    - bei Elementen, die konstante Dehnungen korrekt darstellen können:

$$E_\epsilon \leq C_1 h = \frac{C_2}{N}$$

    - bei Elementen, die lineare Dehnungen korrekt darstellen können:

$$E_\epsilon \leq C_1 h^2 = \frac{C_2}{N^2}$$

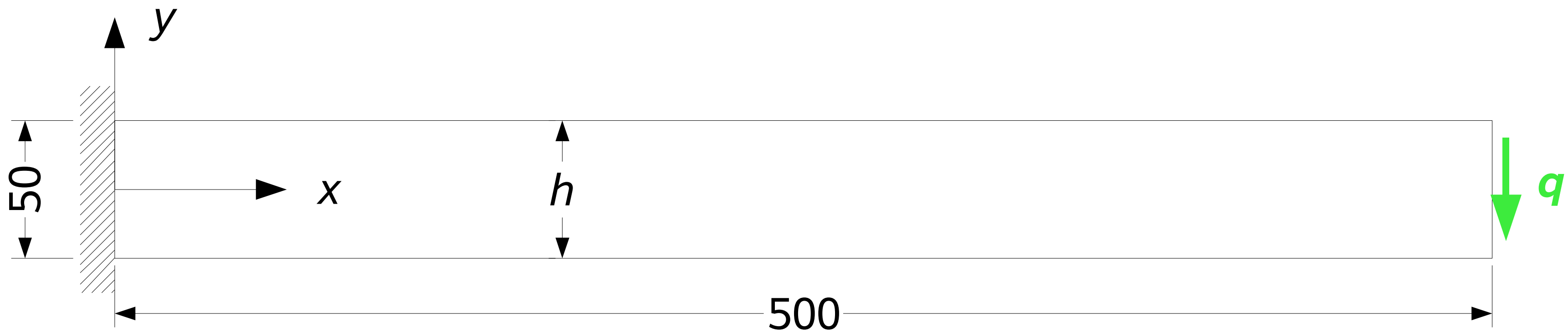
    - Die Konstanten C_1 und C_2 hängen vom Problem ab.

3.2 Quadratische Viereck-Elemente

- Bewertung:
  - Quadratische Elemente liefern bessere Ergebnisse als lineare, sofern sie nicht stark verzerrt sind.
  - Wegen der größeren Anzahl von Integrationspunkten erfordert das Aufstellen der Steifigkeitsmatrizen mehr Rechenzeit.
  - Da quadratische Elemente mehr Knoten miteinander verbinden als lineare, enthält die Steifigkeitsmatrix der Gesamtstruktur weniger Nullelemente.
  - Wenn die Elemente klein sein müssen, um geometrische Details abbilden zu können, werden in der Regel lineare Elemente verwendet.

3.2 Quadratische Viereck-Elemente

- Beispiel:



  - Die abgebildete rechteckige Scheibe ist am linken Ende fest eingespannt und wird am rechten Ende durch den Schubfluss ***q*** belastet.
  - Gesucht sind die Verschiebungen und die Spannungen.

3.2 Quadratische Viereck-Elemente

– Daten:

- Dicke t = 1*mm*
- Elastizitätsmodul E = 210000*MPa*, Poisson-Zahl ν = 0,3
- Schubfluss:

$$q_y(y)=q_0\left(1-\left(\frac{2y}{h}\right)^2\right) \text{ mit } q_0=15\,N/mm$$

– Ergebnisse der elementaren Biegetheorie:

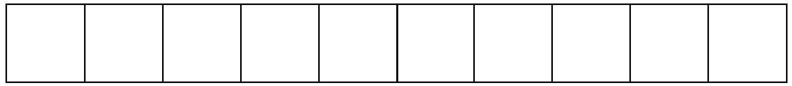
- Verschiebung am rechten Ende: $u_y(L)=9{,}524\,mm$
- Maximale Spannung: $\sigma_{xmax}=600\,MPa$

3.2 Quadratische Viereck-Elemente

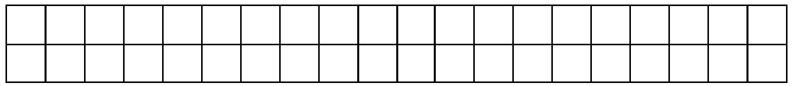
– Diskretisierungen:

- Die Ergebnisse werden mit Q8 Elementen und mit Q9 Elementen berechnet.
- Dabei werden jeweils drei verschieden feine Diskretisierungen verwendet.

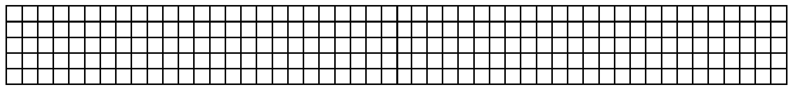
a) 1 x 10 Elemente:



b) 2 x 20 Elemente:



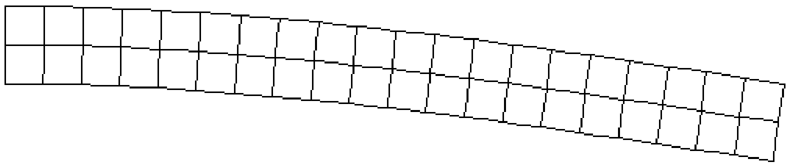
c) 5 x 50 Elemente:

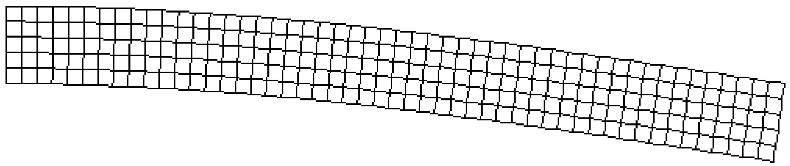


3.2 Quadratische Viereck-Elemente

– Verschiebung am freien Ende:

	Q4	Q8	Q9
a	-6,466	-9,507	-9,547
b	-8,526	-9,565	-9,572
c	-9,390	-9,578	-9,579
	mm	*mm*	*mm*

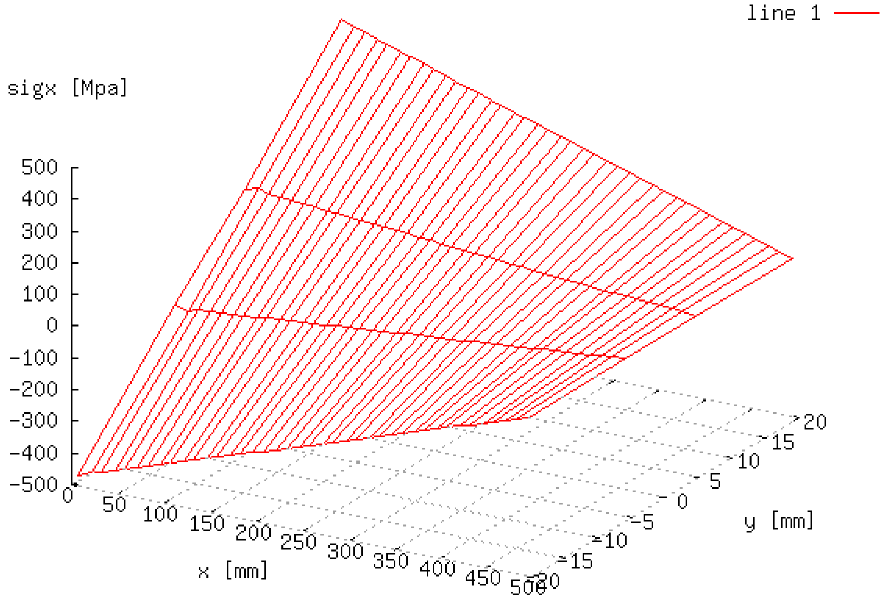




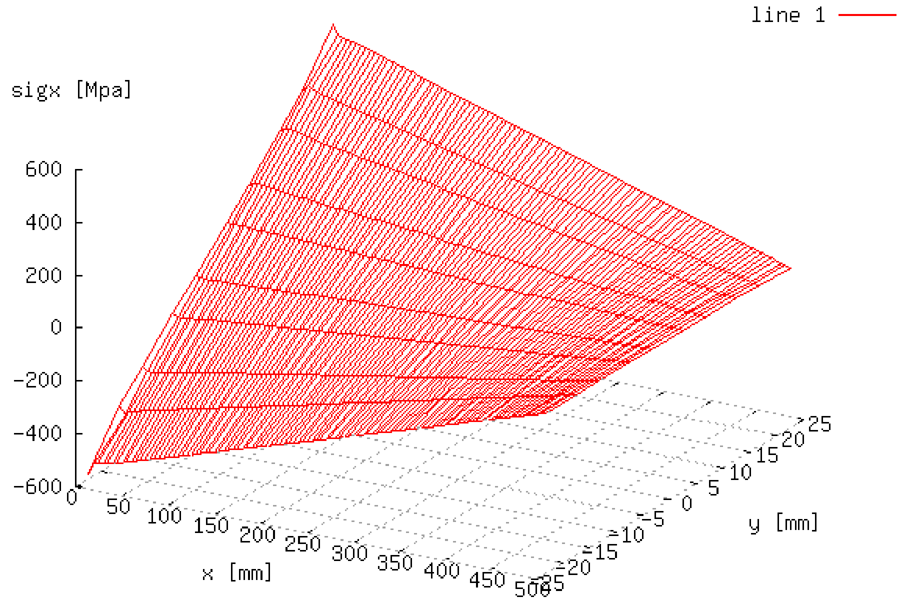
3.2 Quadratische Viereck-Elemente

– Spannungen (Q9):

Diskretisierung b) $\sigma_x(x, y)$

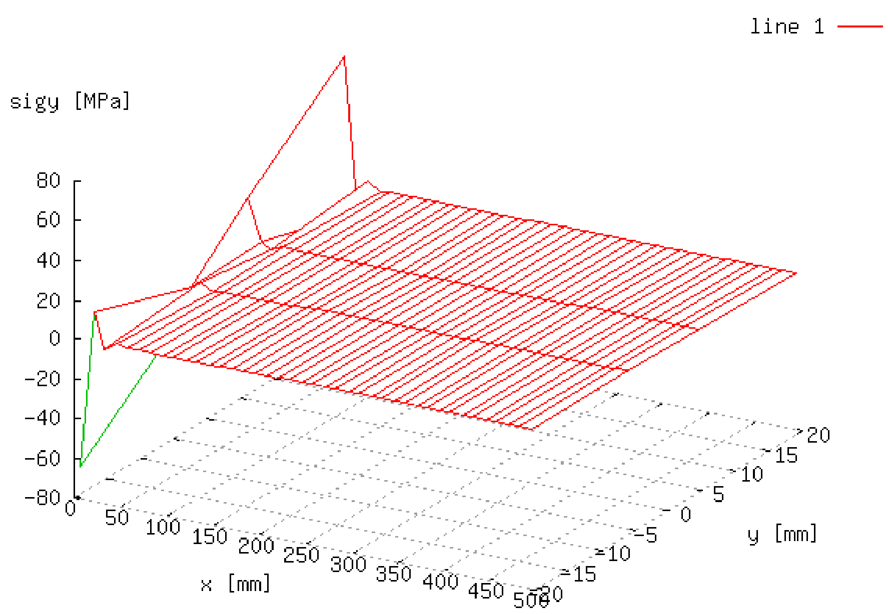


Diskretisierung c) $\sigma_x(x, y)$

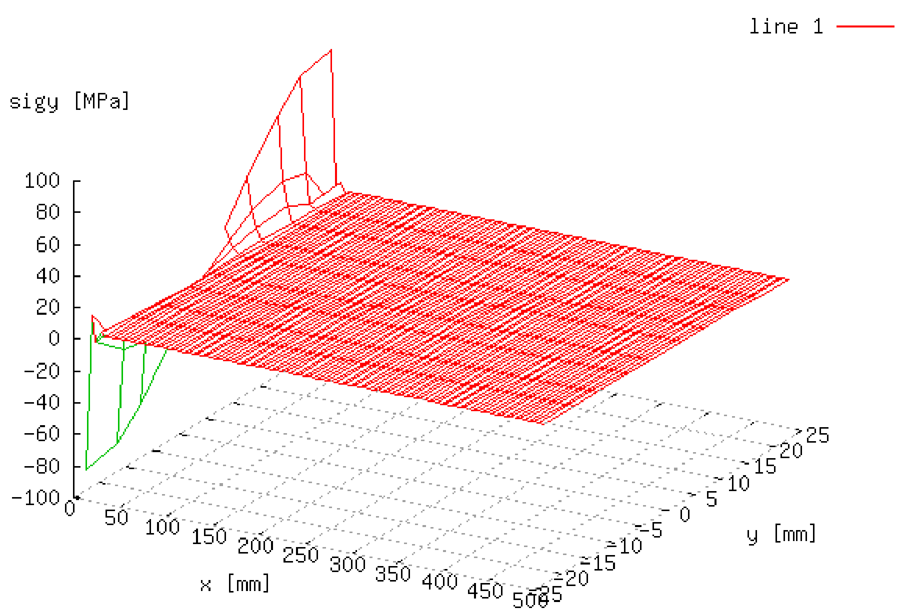


3.2 Quadratische Viereck-Elemente

Diskretisierung b) $\sigma_y(x, y)$

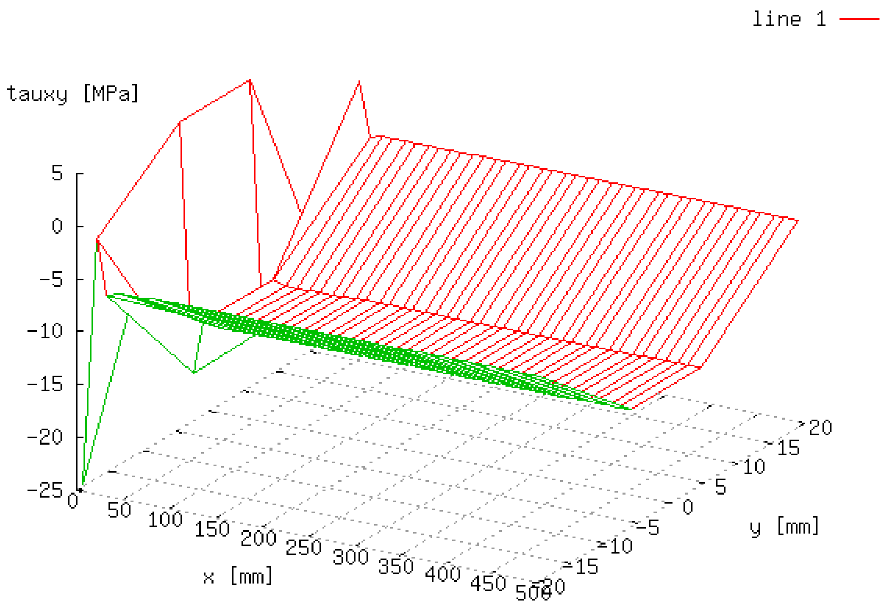


Diskretisierung c) $\sigma_y(x, y)$

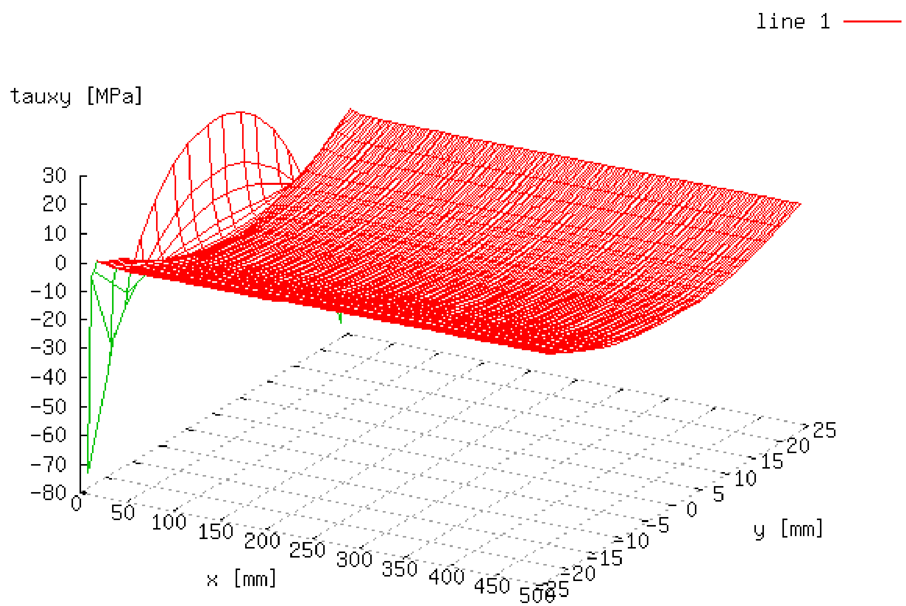


3.2 Quadratische Viereck-Elemente

Diskretisierung b) $\tau_{xy}(x, y)$

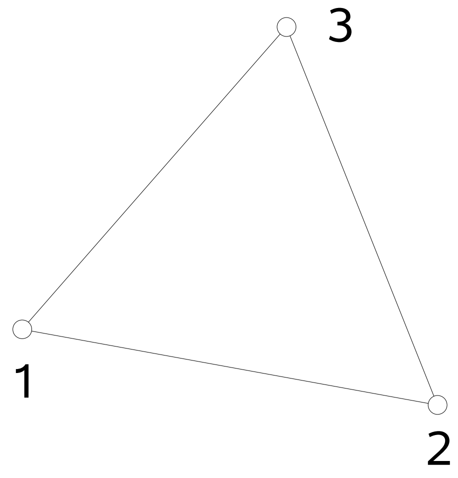


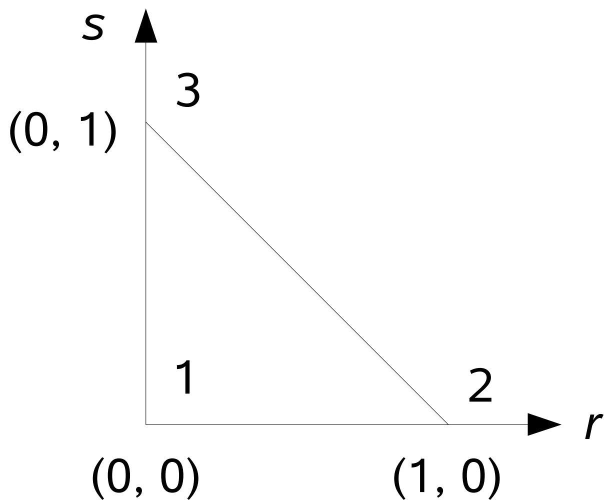
Diskretisierung c) $\tau_{xy}(x, y)$



3.3 Dreieck-Elemente

- Lineares Dreieck-Element:
  - Geometrie:





3.3 Dreieck-Elemente

- Interpolation:
  - Linearer Interpolationsansatz:

$$x(r,s)=a_0+a_r r+a_s s\,,\quad y(r,s)=b_0+b_r r+b_s s$$
$$0\le r\le 1,\ \ 0\le s\le 1-r$$

  - Die 6 unbekannten Koeffizienten lassen sich aus den sechs Bedingungen für die Knoten bestimmen:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 \\ x_2 &= a_0+a_r \\ x_3 &= a_0+a_s \end{aligned}\quad,\quad \begin{aligned} y_1 &= b_0 \\ y_2 &= b_0+b_r \\ y_3 &= b_0+b_s \end{aligned}$$

$$\rightarrow\quad \begin{aligned} a_0 &= x_1 \\ a_r &= x_2-x_1 \\ a_s &= x_3-x_1 \end{aligned}\quad,\quad \begin{aligned} b_0 &= y_1 \\ b_r &= y_2-y_1 \\ b_s &= y_3-y_1 \end{aligned}$$

3.3 Dreieck-Elemente

- Damit gilt

$$x(r,s)=x_1+(x_2-x_1)r+(x_3-x_1)s=(1-r-s)x_1+r\,x_2+s\,x_3$$

$$=\begin{bmatrix}1-r-s & r & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N_1 & N_2 & N_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

mit $N_1(r,s)=1-r-s,\quad N_2(r,s)=r,\quad N_3(r,s)=s$

- Entsprechend folgt:

$$y(r,s)=\begin{bmatrix}N_1 & N_2 & N_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

3.3 Dreieck-Elemente

- Die Interpolationsmatrix lautet:

$$\left[\boldsymbol{N}^{E}\right] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

– Ableitungen:

- Die Ableitungen der Koordinaten nach den Parametern berechnen sich zu

$$\frac{\partial x}{\partial r} = x_2 - x_1 , \quad \frac{\partial x}{\partial s} = x_3 - x_1 , \quad \frac{\partial y}{\partial r} = y_2 - y_1 , \quad \frac{\partial y}{\partial s} = y_3 - y_1$$

- Die Ableitungen sind konstant.

3.3 Dreieck-Elemente

- Für die Jacobi-Matrix folgt: $\left[\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{E}} \right] = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}$

- Die Jacobi-Determinante ist

$$J^E = \left(x_2 - x_1 \right) \left(y_3 - y_1 \right) - \left(x_3 - x_1 \right) \left(y_2 - y_1 \right)$$

- Jacobi-Matrix und Jacobi-Determinante sind konstant.

3.3 Dreieck-Elemente

– Verschiebungen:

- Für die Verschiebungen wird der gleiche Interpolationsansatz wie für die Geometrie verwendet:

$$\left[\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{eE}}(r,s)\right]=\begin{bmatrix} u_x(r,s) \\ u_y(r,s) \end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{E}}(r,s)\right]\left[\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{E}}\right]$$

– Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix:

- Ableitungen der Ansatzfunktionen nach den Koordinaten:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_k}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{E}}(r,s)\right]^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_k}{\partial r} \\ \dfrac{\partial N_k}{\partial s} \end{bmatrix}$$

3.3 Dreieck-Elemente

- Die Ableitungen der Interpolationsfunktionen sind:

$$\frac{\partial N_1}{\partial r}=-1,\quad \frac{\partial N_2}{\partial r}=1,\quad \frac{\partial N_3}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial N_1}{\partial s}=-1,\quad \frac{\partial N_2}{\partial s}=0,\quad \frac{\partial N_3}{\partial s}=1$$

- Mit $\left[\boldsymbol{J}^E\right]^{-1}=\frac{1}{J^E}\begin{bmatrix} y_3-y_1 & y_1-y_2 \\ x_1-x_3 & x_2-x_1 \end{bmatrix}$ folgt:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}=\frac{1}{J^E}\left(-y_3+y_1-y_1+y_2\right)=\frac{1}{J^E}\left(y_2-y_3\right)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y}=\frac{1}{J^E}\left(-x_1+x_3-x_2+x_1\right)=\frac{1}{J^E}\left(x_3-x_2\right)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial x}=\frac{1}{J^E}\left(y_3-y_1\right),\quad \frac{\partial N_2}{\partial y}=\frac{1}{J^E}\left(x_1-x_3\right)$$

3.3 Dreieck-Elemente

$$\frac{\partial N_3}{\partial x}=\frac{1}{J^E}\left(y_1-y_2\right),\quad \frac{\partial N_3}{\partial y}=\frac{1}{J^E}\left(x_2-x_1\right)$$

- Damit lautet die Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix:

$$\left[\boldsymbol{B}^E\right]=\frac{1}{J^E}\begin{bmatrix} y_2-y_3 & 0 & y_3-y_1 & 0 & y_1-y_2 & 0 \\ 0 & x_3-x_2 & 0 & x_1-x_3 & 0 & x_2-x_1 \\ x_3-x_2 & y_2-y_3 & x_1-x_3 & y_3-y_1 & x_2-x_1 & y_1-y_2 \end{bmatrix}$$

- Die Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix ist konstant. Daher sind die Dehnungen und die Spannungen im Element konstant.

3.3 Dreieck-Elemente

– Steifigkeitsmatrix:

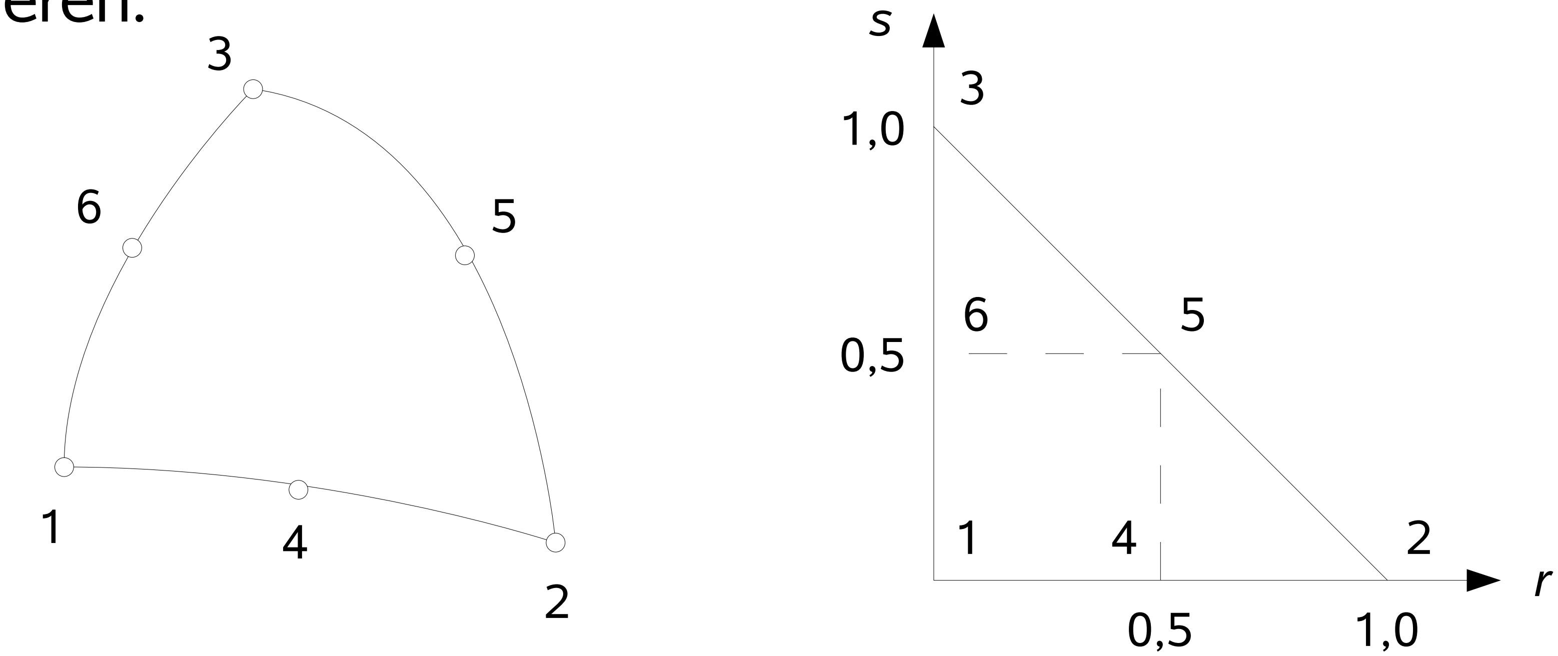
$$\left[\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{E}}\right]=\int_{V_E}\left[\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{E}}\right]^T\left[\boldsymbol{C}\right]\left[\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{E}}\right]dV=\int_0^1\left(\int_0^{1-r}\left[\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{E}}\right]^T\left[\boldsymbol{C}\right]\left[\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{E}}\right]t\,J^E\,ds\right)dr$$

$$=t\,J^E\left[\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{E}}\right]^T\left[\boldsymbol{C}\right)\left[\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{E}}\right]\int_0^1\int_0^{1-r}ds\,dr=\frac{t\,J^E}{2}\left[\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{E}}\right]^T\left[\boldsymbol{C}\right)\left[\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{E}}\right]$$

- Dabei wurde benutzt, dass das verbleibende Integral gleich der Fläche des rechtwinkligen Dreiecks in der Parameterebene ist.

3.3 Dreieck-Elemente

- Quadratisches Dreieck-Element:
  - Die Interpolationsfunktionen für eine quadratisches Dreieck-Element lassen sich wie bei den Viereck-Elementen durch Hinzufügen von drei weiteren Knoten auf den Kanten konstruieren.



3.3 Dreieck-Elemente

$$
\begin{aligned}
N_1 &= 1-r-s & -\frac{1}{2}N_4 & & -\frac{1}{2}N_6 \\
N_2 &= r & -\frac{1}{2}N_4 & -\frac{1}{2}N_5 & \\
N_3 &= s & & -\frac{1}{2}N_5 & -\frac{1}{2}N_6 \\
N_4 &= 4r(1-r-s) & & & \\
N_5 &= 4rs & & & \\
N_6 &= 4s(1-r-s) & & &
\end{aligned}
$$

3.3 Dreieck-Elemente

– Wenn alle Kanten gerade sind, kann das Element lineare Dehnungsverläufe exakt darstellen.

– Steifigkeitsmatrix:

  - Die Elemente der Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix sind linear in *r* und *s*.
  - Für die Berechnung der Steifigkeitsmatrix werden drei Integrationspunkte verwendet:

	r	*s*	*w*
1	0,5	0	1/6
2	0,5	0,5	1/6
3	0	0,5	1/6

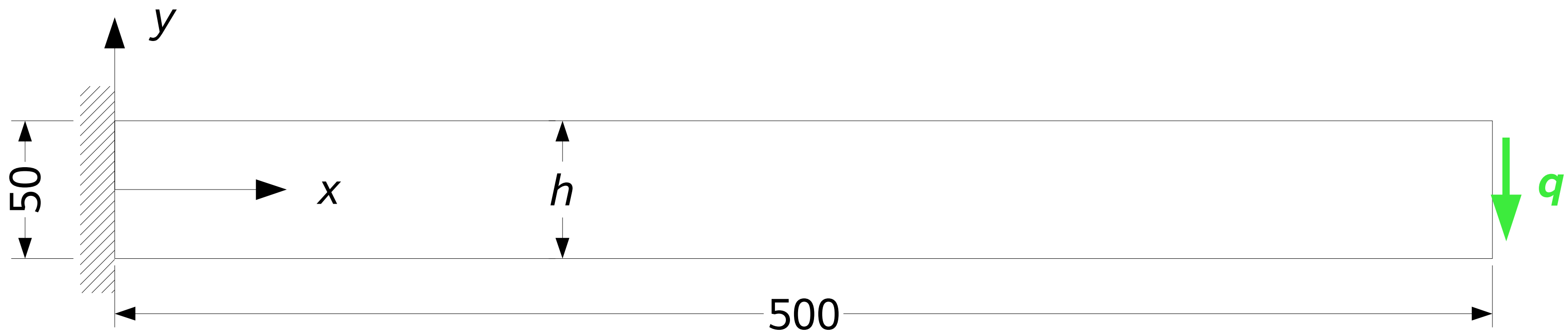
  - Damit ist das Integral für Elemente mit geraden Kanten exakt.

3.3 Dreieck-Elemente

- Bewertung:
  - Da das lineare Dreieck-Element nur konstante Dehnungen darstellen kann, müssen die Elemente sehr klein sein, um gute Ergebnisse zu liefern.
  - Lineare Dreieck-Elemente sollte daher möglichst vermieden werden. Sie werden in der Regel im Zusammenhang mit linearen Viereck-Elementen verwendet, wenn es die Geometrie erfordert.
  - Quadratische Dreieck-Elemente liefern gute Ergebnisse, wenn die Kanten nicht zu stark gekrümmt sind. Sie werden in der Regel von automatischen Netzgeneratoren verwendet, die nur Dreieck-Elemente generieren können.

3.3 Dreieck-Elemente

- Beispiel:



  - Die abgebildete rechteckige Scheibe ist am linken Ende fest eingespannt und wird am rechten Ende durch den Schubfluss ***q*** belastet.
  - Gesucht sind die Verschiebungen und die Spannungen.

3.3 Dreieck-Elemente

– Daten:

- Dicke $t = 1mm$
- Elastizitätsmodul $E = 210000MPa$, Poisson-Zahl $\nu = 0{,}3$
- Schubfluss:

$$q_y(y) = q_0\left(1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right) \quad \text{mit} \quad q_0 = 15\,N/mm$$

– Ergebnisse der elementaren Biegetheorie:

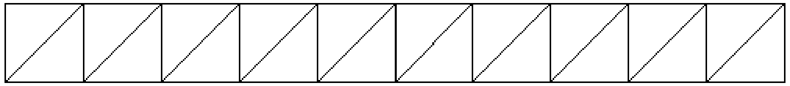
- Verschiebung am rechten Ende: $u_y(L) = 9{,}524\,mm$
- Maximale Spannung: $\sigma_{xmax} = 600\,MPa$

3.3 Dreieck-Elemente

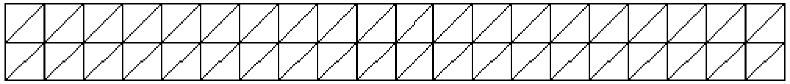
– Diskretisierungen:

- Die Ergebnisse werden mit T3 Elementen und mit T6 Elementen be- rechnet.
- Dabei werden jeweils drei verschieden feine Diskretisierungen verwendet.

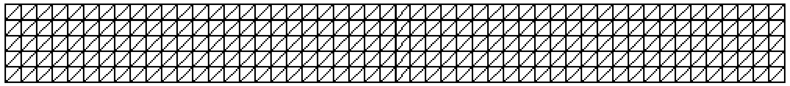
a) 1 x 10:



b) 2 x 20:



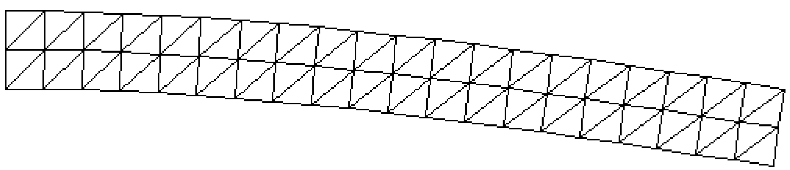
c) 5 x 50:

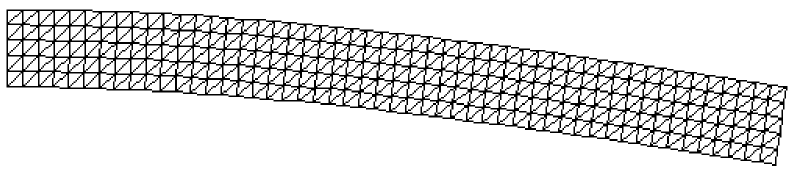


3.3 Dreieck-Elemente

– Verschiebung am freien Ende:

	Q4	Q8	Q9	T3	T6
a	-6,466	-9,507	-9,547	-2,201	-9,507
b	-8,526	-9,565	-9,572	-5,157	-9,564
c	-9,390	-9,578	-9,579	-8,411	-9,577
	mm	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*





3.4 Diskretisierungsregeln

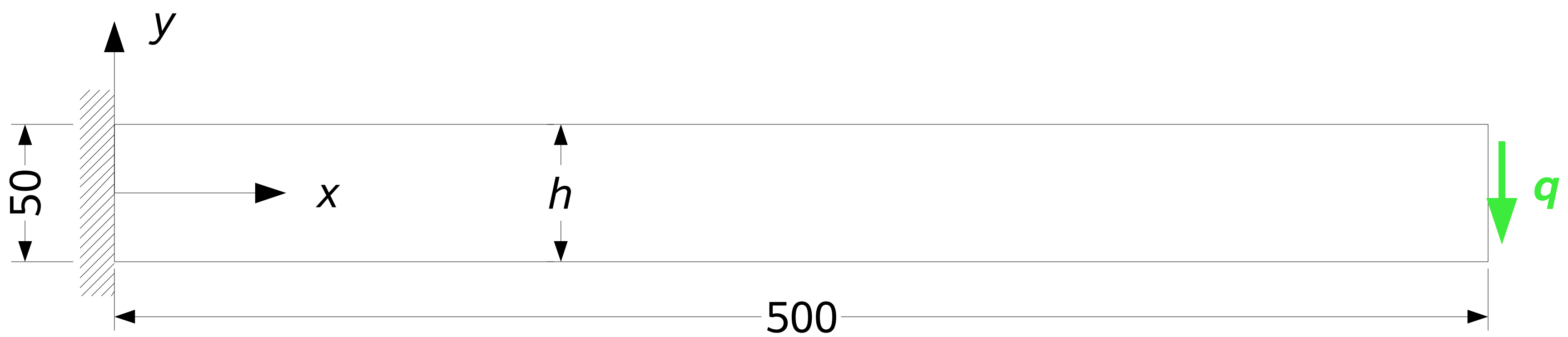
- Auswahl der Elemente:
  - Elemente mit einem quadratischen Verschiebungsansatz sind besser als Elemente mit einem linearen Verschiebungsansatz.
  - Die Serendipity-Elemente sind bei niedrigerem Rechenaufwand nur geringfügig schlechter als Elemente mit einem vollständigen quadratischen Ansatz.
  - Viereck-Elemente sind besser als Dreieck-Elemente.
  - Dreieck-Elemente mit linearem Verschiebungsansatz sind möglichst zu vermeiden.

3.4 Diskretisierungsregeln

- Wenn eine feine Diskretisierung nötig ist, um die Details der Geometrie abzubilden, werden in der Regel Elemente mit einem linearen Verschiebungsansatz verwendet.
- Diese Regeln gelten sinngemäß auch für dreidimensionale Volumenelemente und für Schalenelemente.
- Bei Volumenelementen sind Hexaeder-Elemente besser als Pentaederelemente. Am schlechtesten sind Tetraeder-Elemente.
- Tetraeder-Elemente mit einem linearen Verschiebungsansatz sind zu vermeiden.

3.4 Diskretisierungsregeln

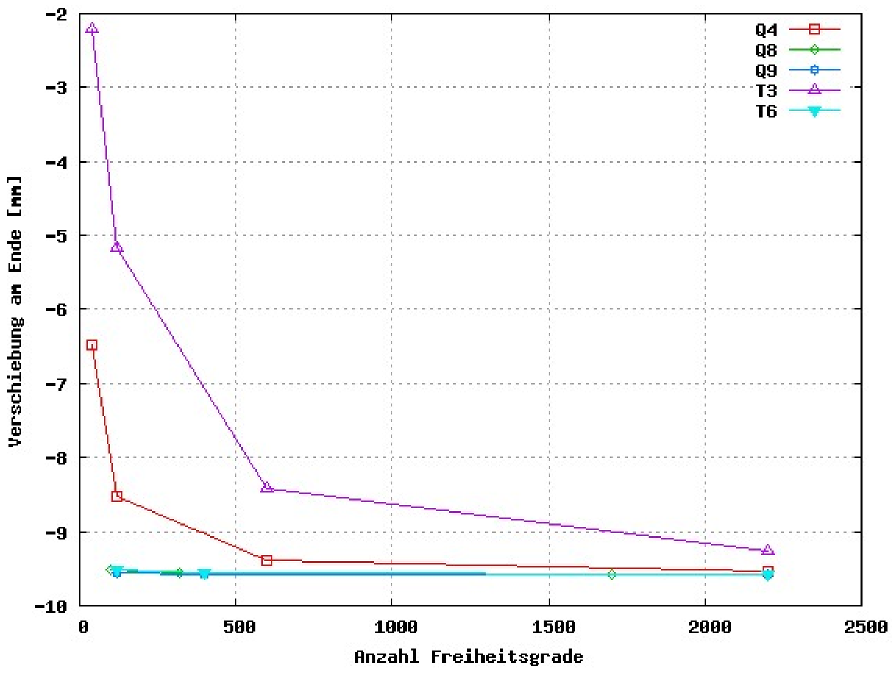
– Beispiel:

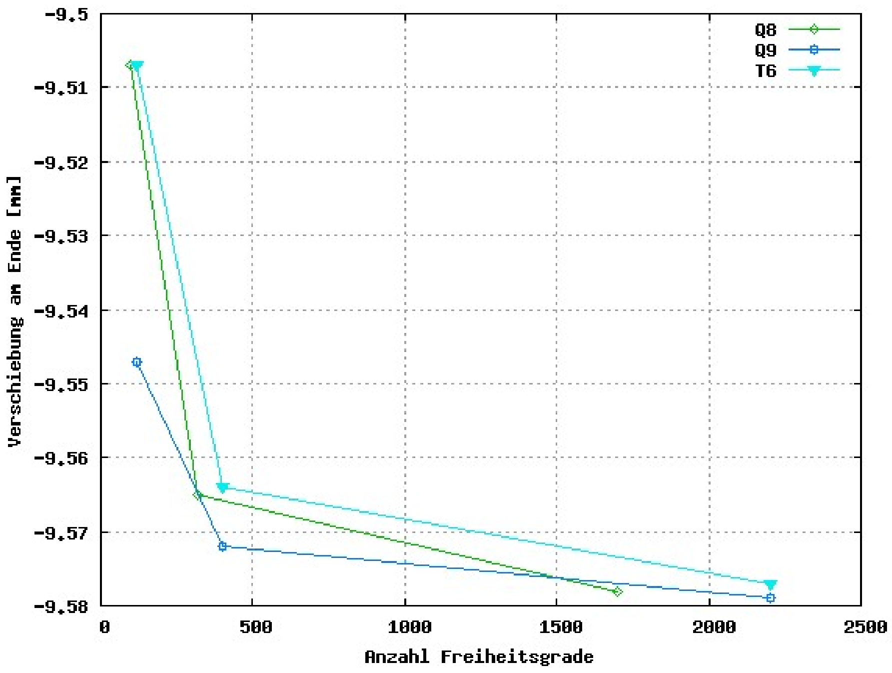


- Die abgebildete rechteckige Scheibe ist am linken Ende fest eingespannt und wird am rechten Ende durch den Schubfluss ***q*** belastet.
- Untersucht wird die Verschiebung am freien Ende in Abhängigkeit vom Elementtyp und der Anzahl der Freiheitsgrade.

3.4 Diskretisierungsregeln

- Verschiebung am freien Ende:



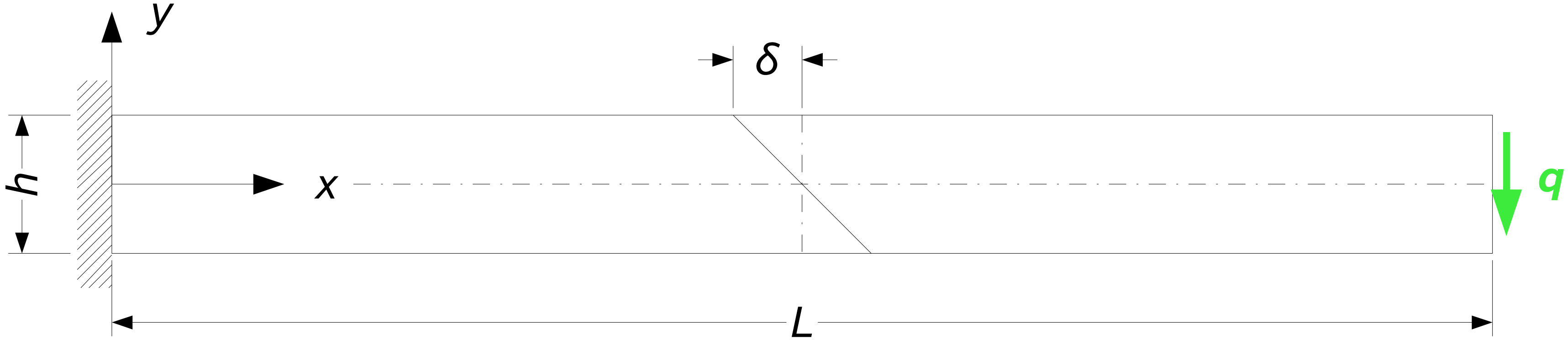


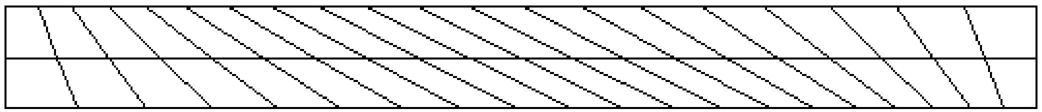
3.4 Diskretisierungsregeln

- Vernetzung:
  - Die Ergebnisse lassen sich leichter interpretieren, wenn
    - symmetrische Teile der Struktur auch symmetrisch vernetzt werden,
    - die Vernetzung möglichst regelmäßig ist.
  - Die Elemente sollten möglichst wenig verzerrt sein, d.h. Viereck-Elemente sollten möglichst wenig von der Rechteckform abweichen.
  - Bei Elementen mit einem quadratischen Verschiebungsansatz sollten die Kanten möglichst gerade sein und die Zwischenknoten in der Mitte zwischen den Eckknoten liegen.

3.4 Diskretisierungsregeln

– Einfluss der Verzerrung:



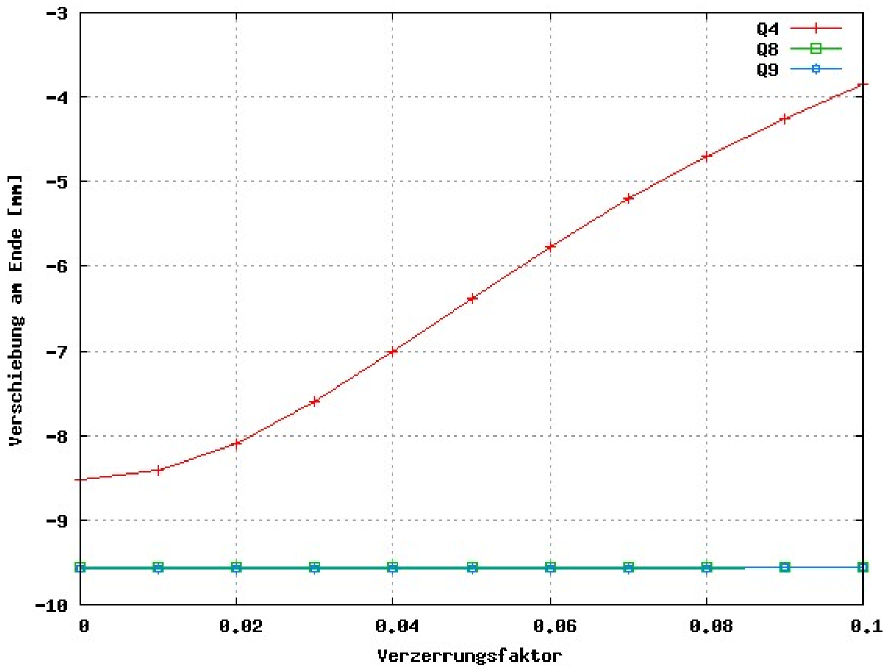
- Diskretisierung: 

- Verzerrungsfaktor: $\zeta = \dfrac{2\delta}{L}$

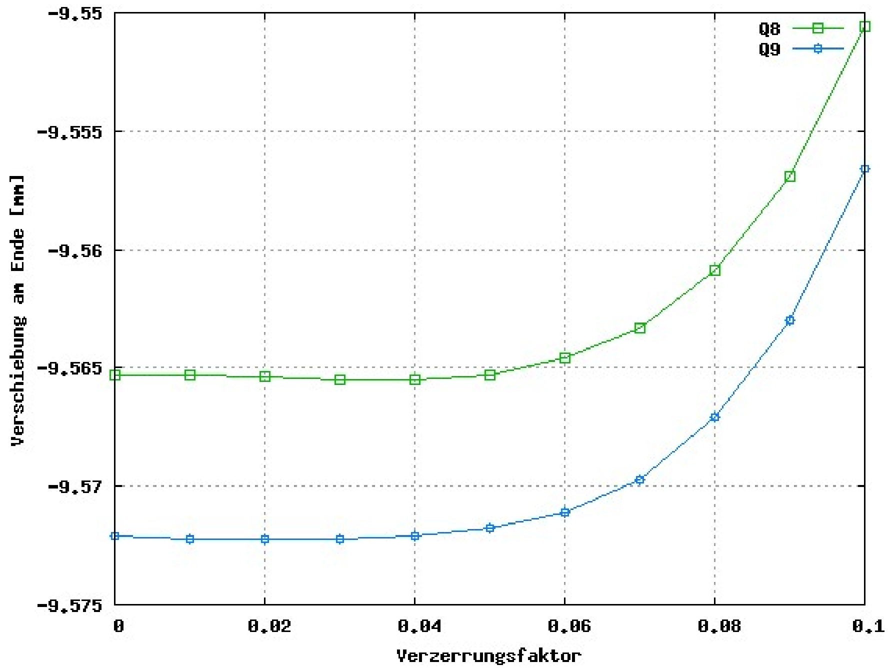
3.4 Diskretisierungsregeln

- Verschiebung am freien Ende:

Q4, Q8, Q9



Q8, Q9



3.4 Diskretisierungsregeln

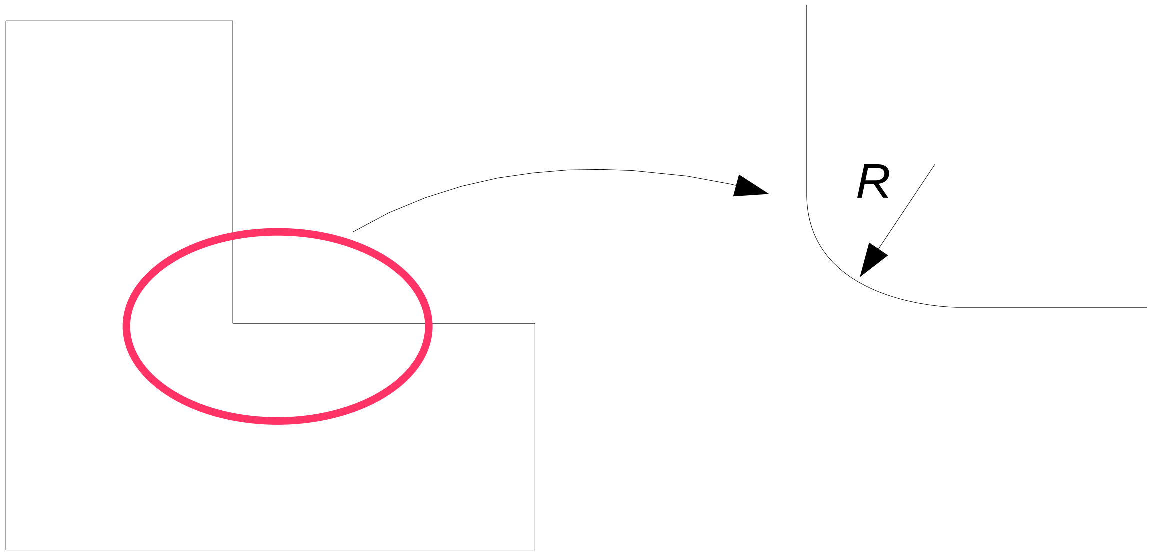
- Elemente mit einem quadratischen Verschiebungsansatz sind weniger empfindlich gegenüber Verzerrungen als Elemente mit einem linearen Verschiebungsansatz.
- Kommerzielle FE- Programme verwenden in der Regel leistungsfähigere lineare Elemente als das hier gezeigte isoparametrische Element.

3.4 Diskretisierungsregeln

- Unstetigkeiten:
  - An einspringenden Ecken ist die Spannung unendlich groß.
  - Mit zunehmender Netzverfeinerung werden die berechneten Spannungen daher immer größer und konvergieren nicht gegen einen festen Wert.
  - Für eine genaue Untersuchung muss daher die tatsächliche Ausrundung der einspringenden Kante mit berücksichtigt werden.
  - Bei realen Bauteilen kann an einspringenden Ecken Plastifizierung auftreten, wodurch die Spannungsspitzen abgebaut werden.

3.4 Diskretisierungsregeln

- Wenn die Länge einer Elementkante und der Radius der Ausrundung die gleiche Größenordnung haben, muss der Radius mit abgebildet werden.



3.4 Diskretisierungsregeln

– An den Stellen, an denen Einzelkräfte angreifen, werden die Spannungen ebenfalls unendlich groß.

– Wenn die Krafteinleitung untersucht werden soll, muss deshalb die Einzelkraft durch die tatsächliche Flächenkraft ersetzt werden, sobald die Länge einer Elementkante und die Abmessungen der Fläche, auf der die Flächenkraft wirkt, die gleiche Größenordnung haben.