Technische Mechanik Lösungsblatt 1.5

Aufgabe 1:

Der Körper hat in beiden Fällen zwei Symmetrieebenen, auf deren Schnittgeraden der Schwerpunkt liegt. Daraus folgt

$$x_s = \frac{b}{2} \quad \text{und} \quad y_s = \frac{a}{2} \quad .$$

Der Gesamtkörper ist aus einem Quader und einem Zylinder zusammengesetzt. Volumen und Schwerpunkt der einzelnen Körper berechnen sich wie folgt:

	Quader	Zylinder
Volumen	$V_Q = a\,b\,h$	$V_Z = \frac{1}{4}\pi D^2 b$
Schwerpunkt	$z_Q = \frac{h}{2}$ (Symmetrie)	$z_Z = \frac{3}{4} h$ (Symmetrie)

a) Leere Bohrung:

Das Volumen der Bohrung muss abgezogen werden:

$$z_{Sa} = \frac{z_Q V_Q - z_Z V_Z}{V_Q - V_Z} = \frac{\frac{h}{2} \cdot a\,b\,h - \frac{3}{4} h \cdot \frac{1}{4}\pi D^2 b}{a\,b\,h - \frac{1}{4}\pi D^2 b} = \frac{h}{4} \cdot \frac{8\,a\,h - 3\pi D^2}{4\,a\,h - \pi D^2}$$

Zahlenwert:

$$z_{Sa} = \frac{10}{4}\,cm \cdot \frac{8 \cdot 5 \cdot 10 - 3 \cdot \pi \cdot 1^2}{4 \cdot 5 \cdot 10 - \pi \cdot 1^2} = 2{,}5\,cm \cdot \frac{400 - 9{,}425}{200 - 3{,}142} = \underline{4{,}960\,cm}$$

b) Stahlbolzen in Bohrung:

Der Gesamtkörper setzt sich aus dem durchbohrten Quader und dem Stahlbolzen zusammen.

Durchbohrter Quader:

Masse: $m_1 = \rho_A \left(V_Q - V_Z \right) = \rho_A \left(a\,b\,h - \frac{1}{4}\pi D^2 b \right)$

Zahlenwert: $m_1 = 2{,}60\,g/cm^3 \cdot \left(5 \cdot 4 \cdot 10\,cm^3 - \frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 \cdot 4\,cm^3 \right) = 511{,}8\,g$

Schwerpunkt: $z_{Sa}=4{,}960\,cm$

Stahlbolzen:

Masse: $m_B=\rho_S V_Z=\frac{1}{4}\rho_S\pi D^2 b$

Zahlenwert: $m_B=\frac{1}{4}\cdot 7{,}85\,g/cm^3\cdot\pi\cdot 1^2\cdot 4\,cm^3=\underline{24{,}66\,g}$

Schwerpunkt: $z_{SB}=z_Z=\frac{3}{4}\cdot 10\,cm=7{,}5\,cm$

Gesamtschwerpunkt:

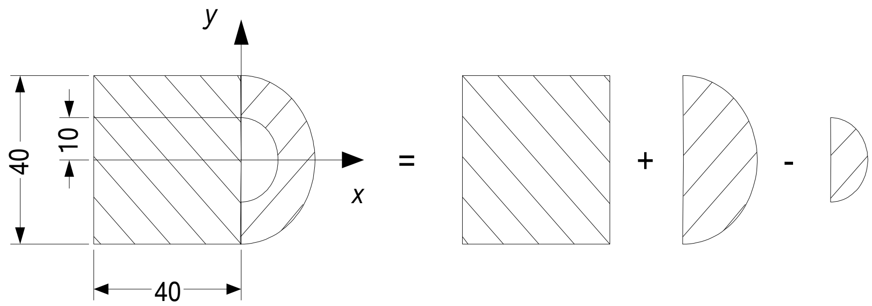
$$z_{Sb}=\frac{z_{S1}m_1+z_{SB}m_B}{m_1+m_B}=\frac{4{,}960\,cm\cdot 511{,}8\,g+7{,}5\,cm\cdot 24{,}66\,g}{511{,}8\,g+24{,}66\,g}=\underline{5{,}077\,cm}$$

Aufgabe 2:

<u>Fläche 1:</u>

Symmetrie: $y_S=0$

Die Fläche setzt sich zusammen aus einem Quadrat sowie einem großen Halbkreis abzüglich eines kleinen Halbkreises.



	Fläche	Schwerpunkt
Quadrat	$A_1=40\cdot 40=1600$	$x_1=-20$
großer Halbkreis	$A_2=\frac{1}{2}\pi\cdot 20^2=628{,}3$	$x_2=\frac{4}{3\pi}\cdot\frac{40}{2}=8{,}488$
kleiner Halbkreis	$A_3=\frac{1}{2}\pi\cdot 10^2=157{,}1$	$x_3=\frac{4}{3\pi}\cdot 10=4{,}244$

Gesamte Fläche:

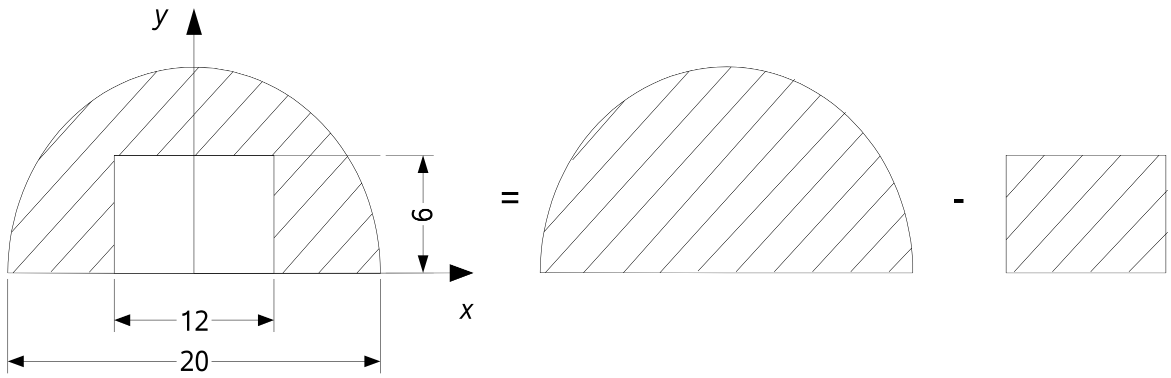
$$x_S = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 - x_3 A_3}{A_1 + A_2 - A_3}$$

$$x_S = \frac{-20 \cdot 1600 + 8{,}488 \cdot 628{,}3 - 4{,}244 \cdot 157{,}1}{1600 + 628{,}3 - 157{,}1} = \frac{-27334}{2071} = \underline{-13{,}20}$$

<u>Fläche 2:</u>

Symmetrie: $x_S = 0$

Die Fläche setzt sich zusammen aus einem Halbkreis abzüglich eines Rechtecks.



	Fläche	Schwerpunkt
Halbkreis	$A_1 = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{20}{2}\right)^2 = 157{,}1$	$y_1 = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{20}{2} = 4{,}244$
Rechteck	$A_2 = 12 \cdot 6 = 72$	$y_2 = 3$

Gesamte Fläche:

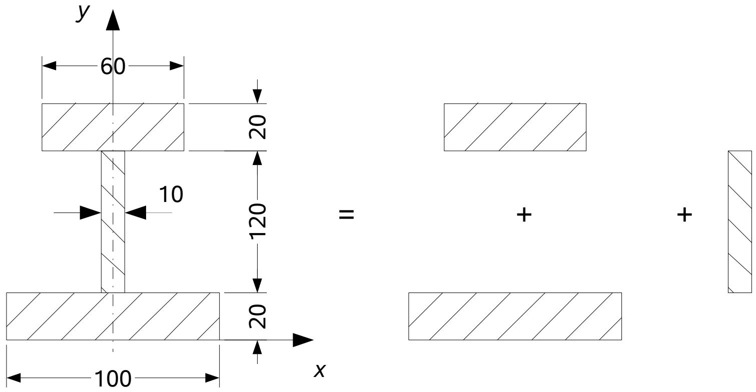
$$y_S = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2}$$

$$y_S = \frac{4{,}244 \cdot 157{,}1 - 3 \cdot 72}{157{,}1 - 72} = \frac{450{,}7}{85{,}1} = \underline{5{,}296}$$

<u>Fläche 3:</u>

Symmetrie: $x_S = 0$

Die Fläche setzt sich aus drei Rechtecken zusammen.



	Fläche	Schwerpunkt
Unteres Rechteck	$A_1=100\cdot 20=2000$	$y_1=10$
Mittleres Rechteck	$A_2=10\cdot 120=1200$	$y_2=20+60=80$
Oberes Rechteck	$A_3=60\cdot 20=1200$	$y_3=20+120+10=150$

Gesamte Fläche:

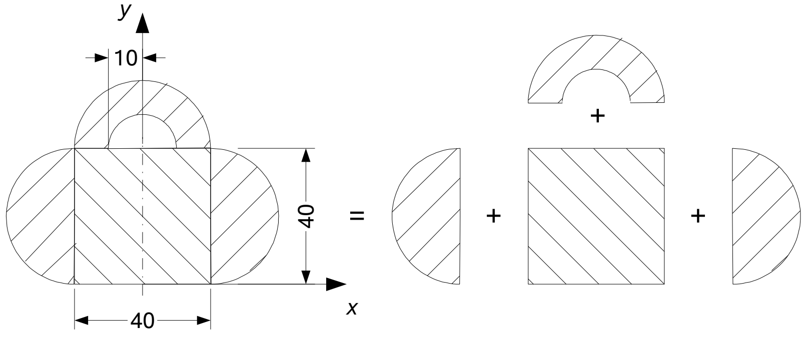
$$y_S=\frac{y_1 A_1+y_2 A_2+y_3 A_3}{A_1+A_2+A_3}$$

$$y_S=\frac{10\cdot 2000+80\cdot 1200+150\cdot 1200}{2000+1200+1200}=\frac{296000}{4400}=\underline{67{,}27}$$

<u>Fläche 4:</u>

Symmetrie: $x_S=0$

Die Fläche setzt sich aus einem Quadrat, einem Halbkreis rechts und links und einem Ringsegment oben zusammen.



	Fläche	Schwerpunkt
Quadrat	$A_1 = 40^2 = 1600$	$y_1 = 20$
Halbkreis links	$A_2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{40}{2}\right)^2 = 628{,}3$	$y_2 = 20$
Halbkreis rechts	$A_3 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{40}{2}\right)^2 = 628{,}3$	$y_3 = 20$
Ringsegment	$A_4 = \left(\left(\frac{40}{2}\right)^2 - 10^2\right)\cdot\frac{\pi}{2} = 471{,}2$	$y_4 = 40 + \frac{2}{3}\frac{\left(\frac{40}{2}\right)^3 - 10^3}{\left(\left(\frac{40}{2}\right)^2 - 10^2\right)\cdot\frac{\pi}{2}} = 49{,}90$

Gesamte Fläche:

$$y_S = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 + y_4 A_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}$$

$$y_S = \frac{20\cdot 1600 + 2\cdot 20\cdot 628{,}3 + 49{,}90\cdot 471{,}2}{1600 + 2\cdot 628{,}3 + 471{,}2} = \frac{80645}{3328} = \underline{24{,}23}$$