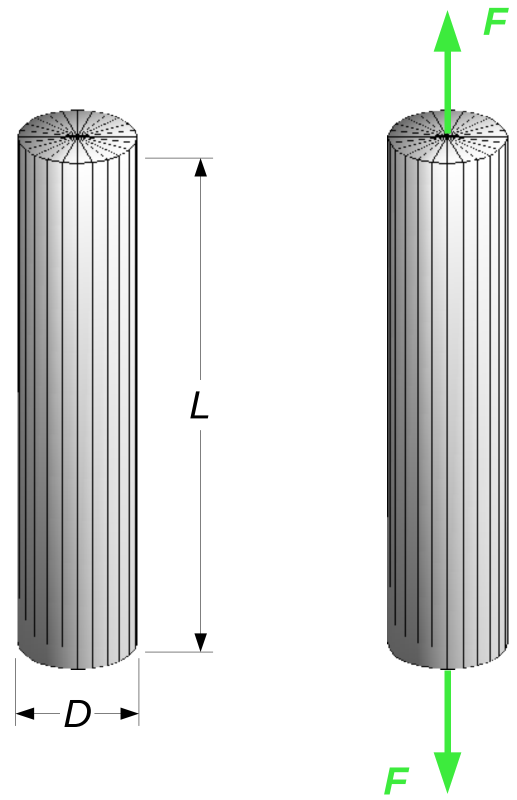
1. Zug und Druck in Stäben

- Stäbe sind Bauteile, deren Querschnittsabmessungen klein gegenüber ihrer Länge sind:

$$D \ll L$$

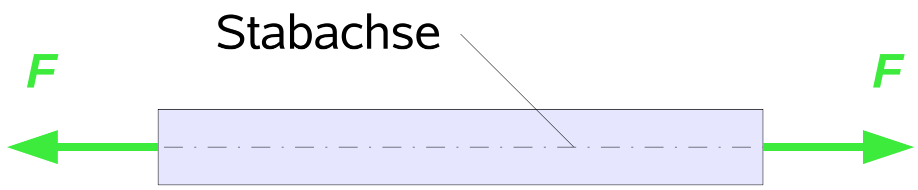
- Sie werden nur in ihrer Längsrichtung auf Zug oder Druck belastet.



1. Zug und Druck in Stäben

1.1 Spannung

- Betrachtet wird ein gerader Stab mit konstanter Querschnittsfläche *A*.
- Die Verbindungslinie der Schwerpunkte der Querschnittsflächen wird als Stabachse bezeichnet.
- Der Stab wird an seinen Enden durch die Kräfte ***F*** belastet, deren Wirkungslinie mit der Stabachse übereinstimmt.



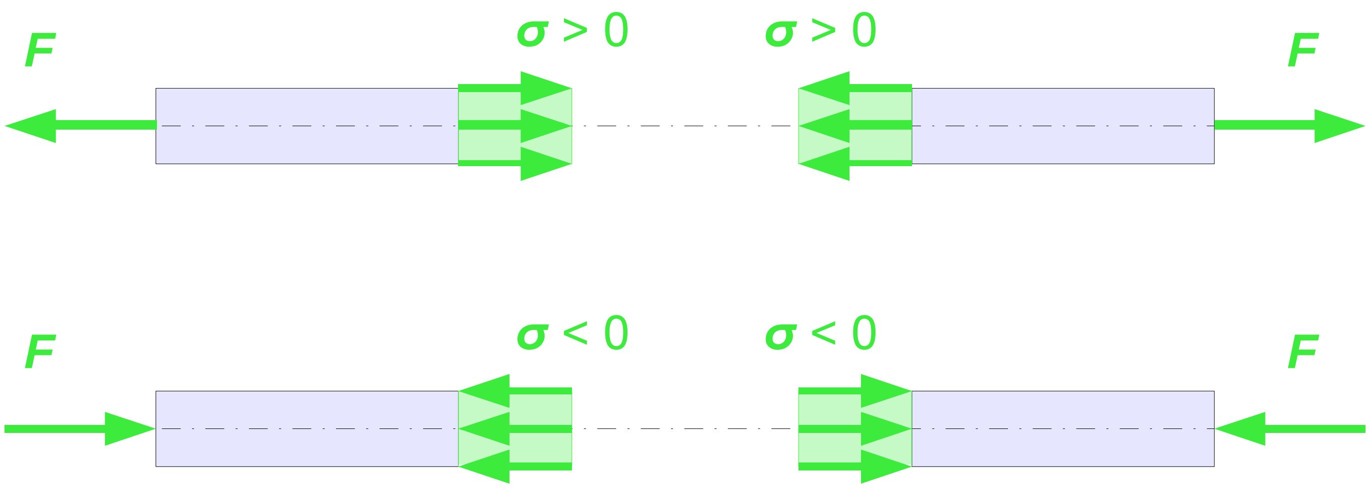
1.1 Spannung

- Innere Kraft:
  - An einer Schnittfläche senkrecht zur Stabachse tritt eine Normalkraft ***N*** auf:

  - Die Normalkraft ist die Resultierende einer über den gesamten Querschnitt verteilten Flächenkraft.
  - Diese Flächenkraft wird als Normalspannung σ bezeichnet.

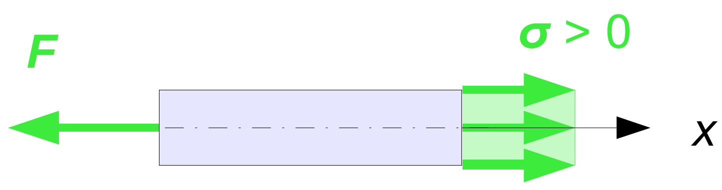
1.1 Spannung

- Vorzeichen der Normalspannung:
  - Eine positive Normalspannung bedeutet Zug, eine negative Normalspannung bedeutet Druck.



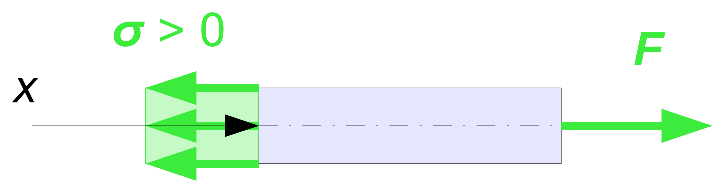
1.1 Spannung

– Positives Schnittufer:



- Die *x*-Achse zeigt aus der Schnittfläche.
- Die positive Normalspannung zeigt in Richtung der positiven *x*-Achse.

– Negatives Schnittufer:



- Die *x*-Achse zeigt in die Schnittfläche.
- Die positive Normalspannung zeigt entgegen der positiven *x*-Achse.

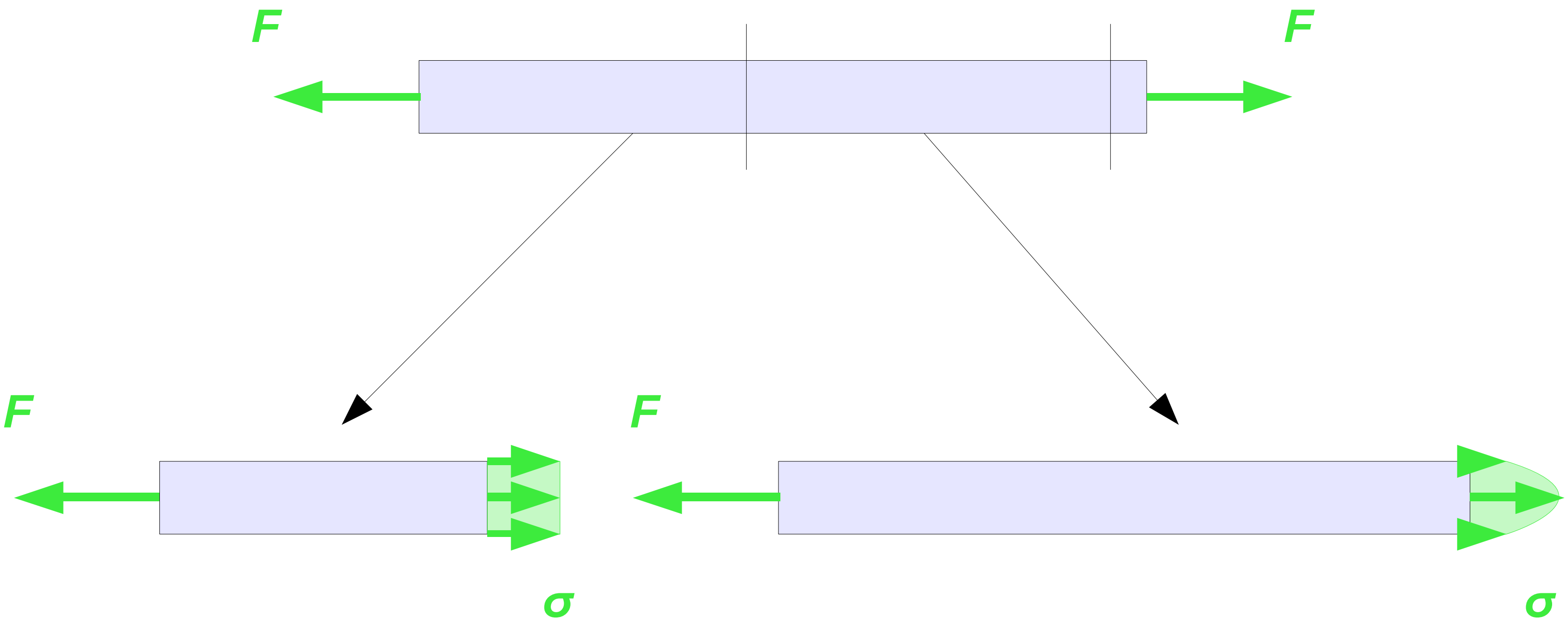
1.1 Spannung

- Wert der Normalspannung:
  - In hinreichender Entfernung vom Rand des Stabes ist die Normalspannung gleichmäßig über den Querschnitt verteilt.
  - Für den Wert der Normalspannung gilt dann:

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A}}$$

  - Diese Beziehung gilt nicht in der Nähe der Krafteinleitung, da dort die Normalspannung nicht gleichmäßig über den Querschnitt verteilt ist.

1.1 Spannung



$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\sigma \neq \frac{F}{A}$$

1.1 Spannung

- Einheit der Normalspannung:
  - Die Einheit der Normalspannung ist Kraft pro Fläche.
  - Gebräuchlich ist die Einheit

$$1\,N/mm^2 = 10^6\,N/m^2 = 10^6\,Pa = 1\,MPa$$

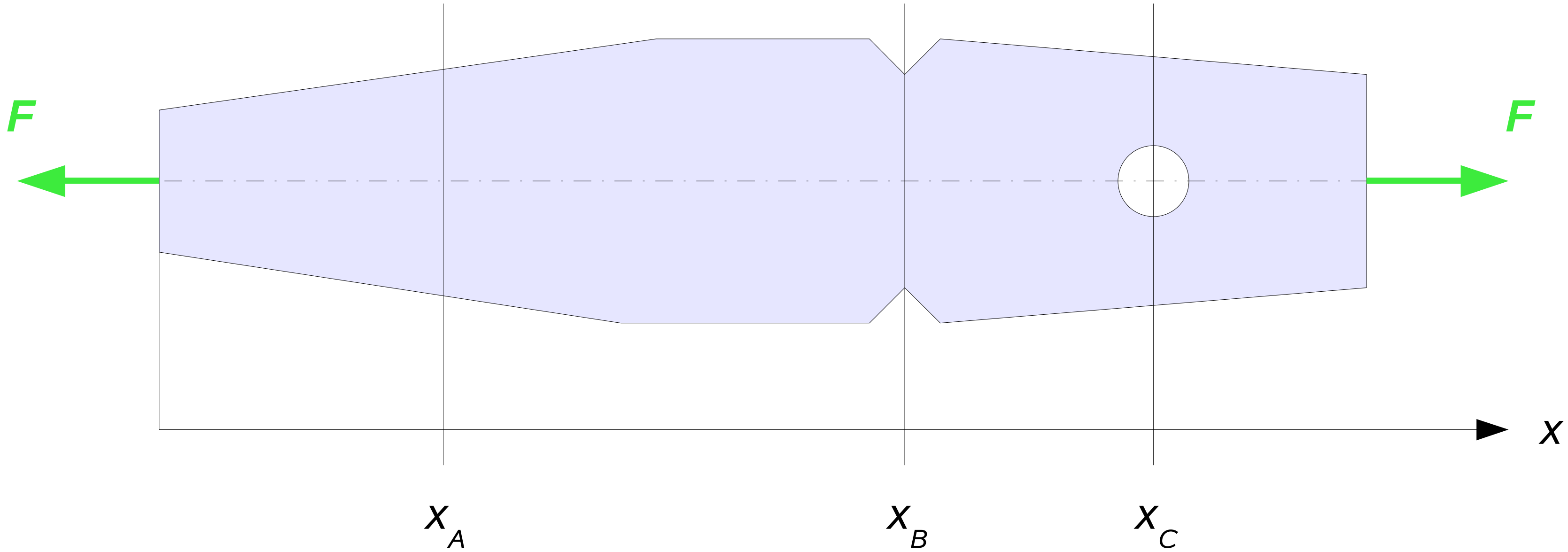
1.1 Spannung

- Stab mit veränderlichem Querschnitt:
  - Bei einem Stab mit schwach veränderlichem Querschnitt ist die Normalspannung in guter Näherung ebenfalls gleichmäßig über den Querschnitt verteilt.
  - Für den Wert der Normalspannung gilt dann:

$$\sigma(x) = \frac{N}{A(x)}$$

  - Diese Beziehung gilt nicht, wenn sich der Querschnitt stark ändert, was z.B. bei Kerben oder bei Löchern im Stab der Fall ist.

1.1 Spannung



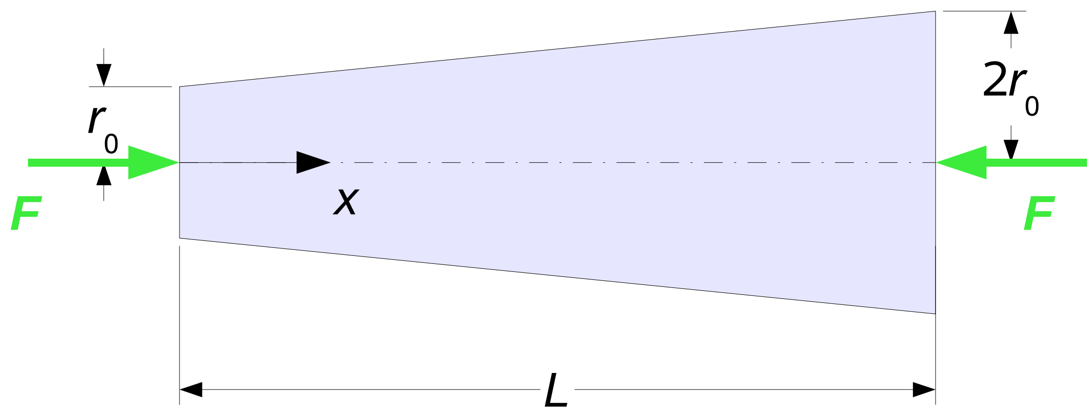
$$\sigma(x_A) = \frac{N}{A(x_A)}$$

$$\sigma(x_B) \neq \frac{N}{A(x_B)}$$

$$\sigma(x_c) \neq \frac{N}{A(x_c)}$$

1.1 Spannung

- Beispiel:
  - Ein konischer Stab mit kreisförmigem Querschnitt wird durch eine Druckkraft ***F*** beansprucht.
  - Wie groß ist die Normalspannung $\sigma(x)$ in einem beliebigen Schnitt senkrecht zur Stabachse?



1.1 Spannung

– Für den Radius gilt: $$r(x) = r_0 + \left(\frac{2r_0 - r_0}{L} \right) x = r_0 \left(1 + \frac{x}{L} \right)$$

– Für die Querschnittsfläche gilt: $$A(x) = \pi r^2(x) = \pi r_0^2 \left(1 + \frac{x}{L} \right)^2$$

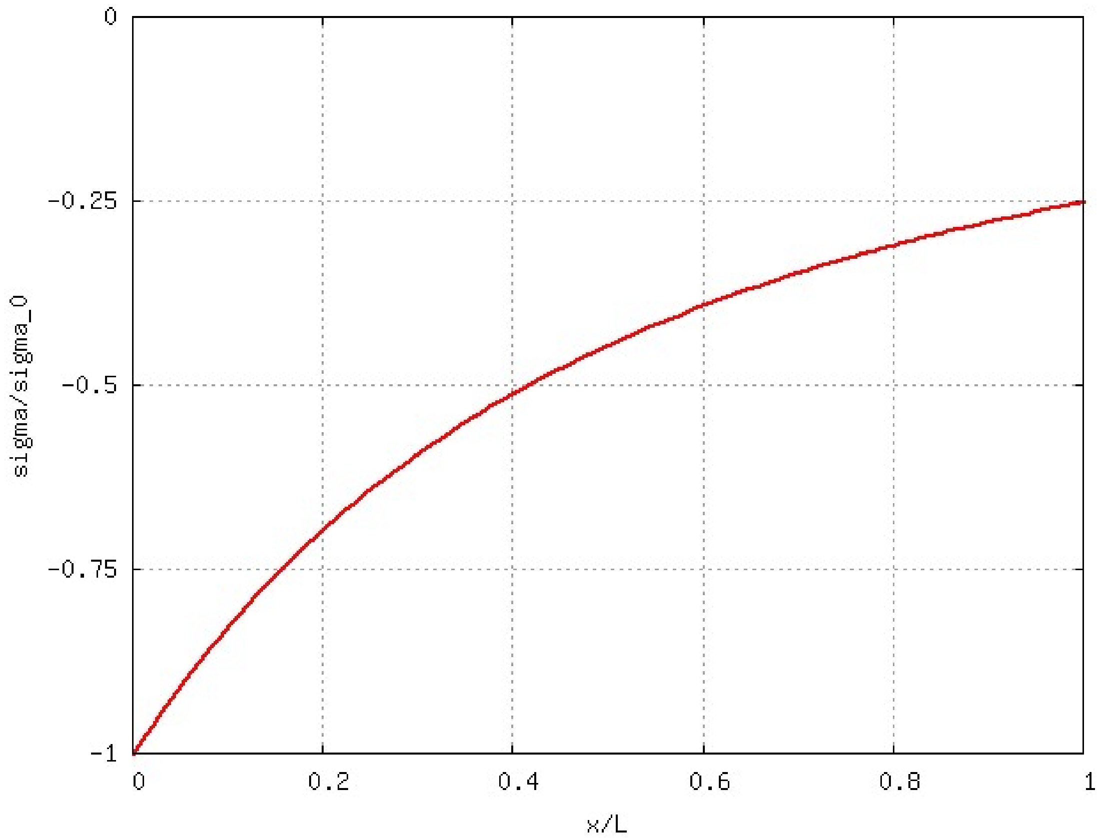
– Für die Normalkraft gilt: $$N = -F$$

– Damit folgt für die Normalspannung:

$$\sigma(x) = \frac{N}{A(x)} = -\frac{F}{\pi r_0^2 \left(1 + \frac{x}{L} \right)^2} = \frac{\sigma_0}{\left(1 + \frac{x}{L} \right)^2} \quad \text{mit} \quad \sigma_0 = -\frac{F}{\pi r_0^2}$$

1.1 Spannung

– Das negative Vorzeichen gibt an, dass es sich um eine Druckspannung handelt.



1.1 Spannung

- Zulässige Spannung:
  - Der Stab versagt, wenn der Betrag der Normalspannung größer als eine vom Werkstoff abhängige maximale Spannung ist: $|\sigma| > \sigma_{max}$
  - Bei manchen Werkstoffen sind die maximalen Spannungen für Zug und Druck unterschiedlich.
  - Um zu berücksichtigen, dass die tatsächlichen Daten streu-en und auch die Lasten mit Ungenauigkeiten behaftet sind, wird für den Festigkeitsnachweis und die Auslegung eine kleinere sogenannte zulässige Spannung verwendet:

$$|\sigma| < \sigma_{zul} < \sigma_{max}$$

1.1 Spannung

- Der Zusammenhang zwischen zulässiger und maximaler Spannung wird durch den Sicherheitsfaktor *S* beschrieben:

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{max}}{S} \quad \text{mit } S > 1$$

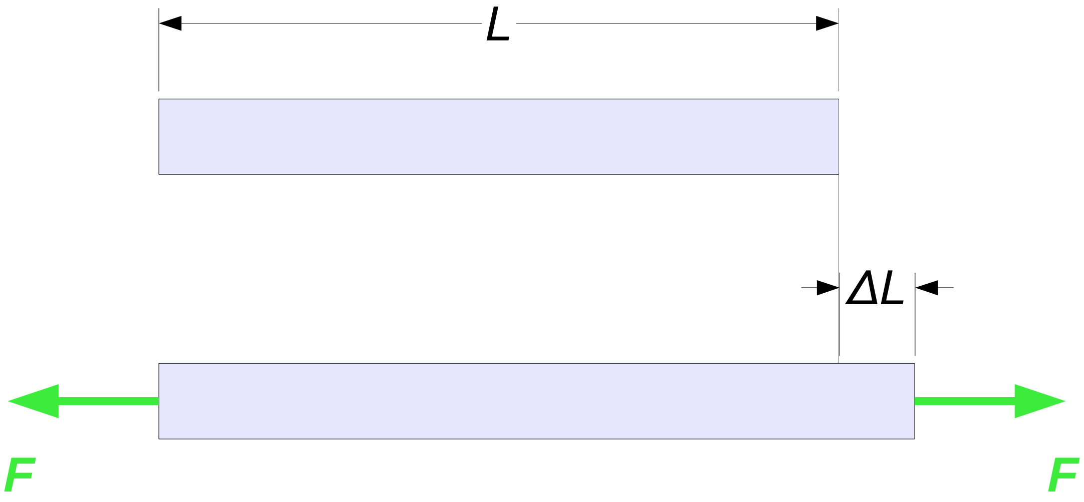
- Der Querschnitt eines Stabes muss so gewählt werden, dass die zulässige Spannung nicht überschritten wird:

$$|\sigma| = \frac{|N|}{A} < \sigma_{zul} \quad \rightarrow \quad A > \frac{|N|}{\sigma_{zul}}$$

- Ein auf Druck beanspruchter schlanker Stab kann durch Knicken versagen, bevor die zulässige Spannung überschritten wird

1.2 Dehnung

- Zunächst wird wieder ein Stab mit konstanter Querschnittsfläche betrachtet.
- Greift an seinen Enden eine Zugkraft ***F*** an, dann verlängert sich der Stab um die Länge ΔL.



1.2 Dehnung

- Dehnung:
  - In vielen Fällen ist die Verlängerung *ΔL* proportional zur Stablänge *L*: $\Delta L \sim L$
  - Die Dehnung *ε* wird daher definiert durch das Verhältnis der Verlängerung zur Ausgangslänge:

$$\boxed{\epsilon = \frac{\Delta L}{L}}$$

  - Die Dehnung ist eine dimensionslose Größe. Bei Verlängerung ist die Dehnung positiv, bei Verkürzung negativ.

1.2 Dehnung

– Zahlenbeispiel:

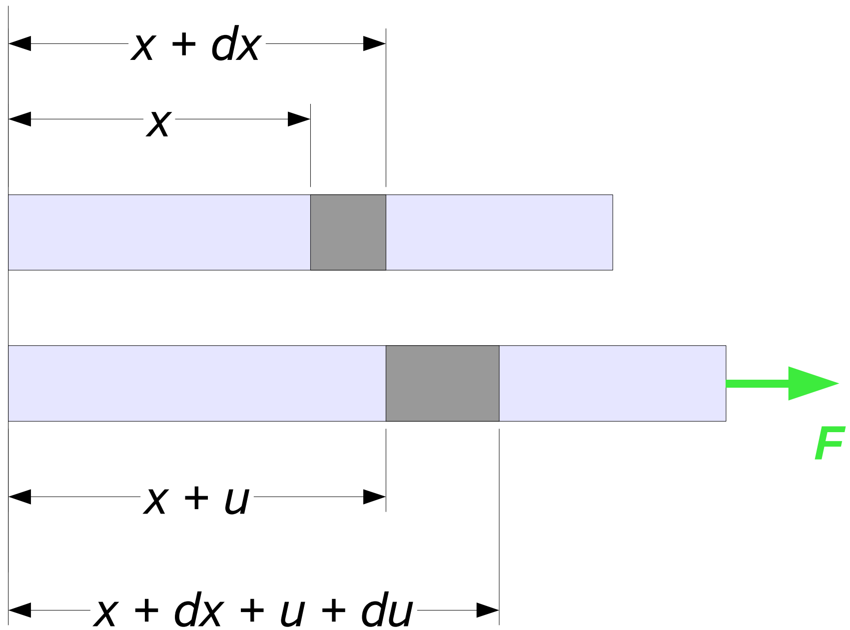
- Verlängert sich ein Stab der Länge L = 1m um ΔL = 1mm, so berechnet sich seine Dehnung zu

$$\epsilon = \frac{1\,mm}{1000\,mm} = 10^{-3} = 0{,}1\,\%$$

- Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass die Dehnung klein ist.

1.2 Dehnung

- Örtliche Dehnung:
  - Wenn die Spannung nicht konstant ist, wird die Dehnung über die Längenänderung eines Stabelementes definiert.
  - Infolge der Belastung verschiebt sich der Querschnitt an der Stelle *x* um die Strecke *u(x)*.



1.2 Dehnung

– Unverformtes Element:
  - Die Querschnitte liegen an den Stellen x und $x + dx$.
  - Das Element hat die Länge dx.

– Verformtes Element:
  - Der linke Querschnitt verschiebt sich um u an die Stelle $x + u$.
  - Der rechte Querschnitt verschiebt sich um $u + du$ an die Stelle $x + dx + u + du$.
  - Das verformte Element hat die Länge

$$x+dx+u+du-(x+u)=dx+du$$

1.2 Dehnung

– Für die Längenänderung gilt also: $dx+du-dx=du$

– Die lokale Dehnung ist definiert als Verhältnis der Längenänderung des Elements zu seiner Ausgangslänge:

$$\boxed{\epsilon(x)=\frac{du}{dx}}$$

– Die lokale Dehnung ist die Ableitung der Verschiebung *u*(*x*) nach der Ortskoordinate *x*.

1.2 Dehnung

– Ist die lokale Dehnung gegeben, so kann daraus die Verlängerung über eine Integration berechnet werden:

$$\Delta L = u(L) - u(0) = \int_{u(0)}^{u(L)} du = \int_0^L \frac{du}{dx} dx = \int_0^L \epsilon(x) dx$$

– Ist die Dehnung konstant, $\epsilon(x) = \epsilon_0 = const.$, so folgt speziell:

$$\Delta L = \int_0^L \epsilon_0 dx = \epsilon_0 L$$

1.3 Stoffgesetz

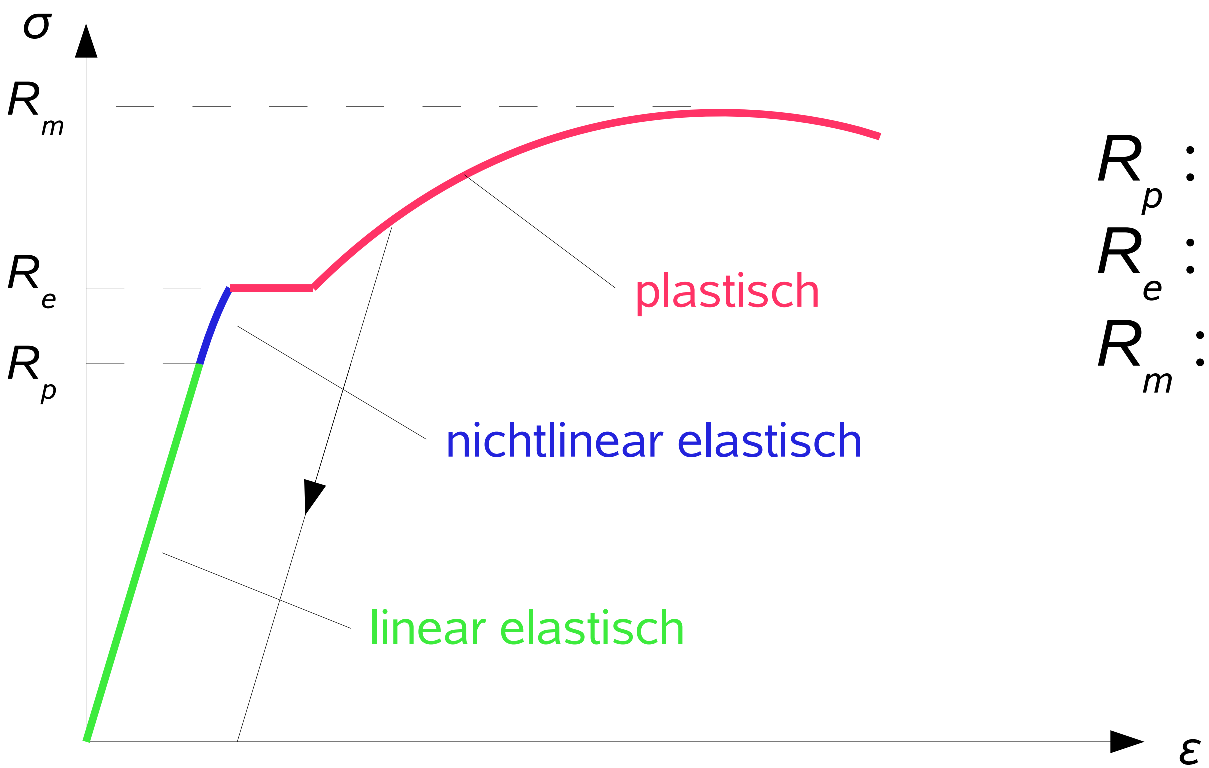
- Spannung und Dehnung:
  - Um einen Stab zu dehnen, ist eine Kraft nötig.
  - Das Stoffgesetz stellt einen Zusammenhang zwischen der Spannung σ und der Dehnung ε her:

$$\sigma = f(\epsilon)$$

  - Dieser Zusammenhang wird im Spannungs-Dehnungs-Diagramm graphisch dargestellt.
  - Das Spannungs-Dehnungs-Diagramm wird im Zugversuch experimentell ermittelt.

1.3 Stoffgesetz

– Beispiel: Stahl



R_p : Dehngrenze
R_e : Streckgrenze
R_m : Zugfestigkeit

1.3 Stoffgesetz

- Elastischer Bereich: $\sigma < R_e$
  - Die Dehnung geht bei Entlastung wieder vollständig zurück.
- Linear-elastischer Bereich: $\sigma < R_p$
  - Die Spannung ist proportional zur Dehnung:

$$\boxed{\sigma = E\,\epsilon}$$

  - Dieses Gesetz wird als Hookesches Gesetz bezeichnet.
  - Der Proportionalitätsfaktor E heißt Elastizitätsmodul.
  - Er hat die Einheit N/mm^2.

1.3 Stoffgesetz

- Plastischer Bereich: $\sigma > R_e$
  - Nach der Entlastung bleibt eine plastische Dehnung zurück.
  - Die Entlastungskurve verläuft parallel zur Geraden im linear-elastischen Bereich.

1.3 Stoffgesetz

- Temperaturänderung und Dehnung:
  - Eine Längenänderung kann auch durch eine Temperatur-änderung verursacht werden.
  - Die zugehörige Dehnung heißt Wärmedehnung.
  - Für viele Werkstoffe ist die Wärmedehnung ε_T proportional zur Temperaturänderung ΔT:

$$\boxed{\epsilon_T = \alpha_T \Delta T}$$

  - Der Proportionalitätsfaktor α_T heißt Wärmeausdehnungsko-effizient.
  - Er hat die Einheit $1/K$.

1.3 Stoffgesetz

- Stoffgesetz:
  - Wirkt sowohl eine Spannung σ als auch eine Temperaturänderung ΔT, so ergibt sich die Gesamtdehnung durch Überlagerung:

$$\boxed{\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T}$$

  - Für die Spannung gilt:

$$\boxed{\sigma = E\left(\epsilon - \alpha_T \Delta T\right)}$$

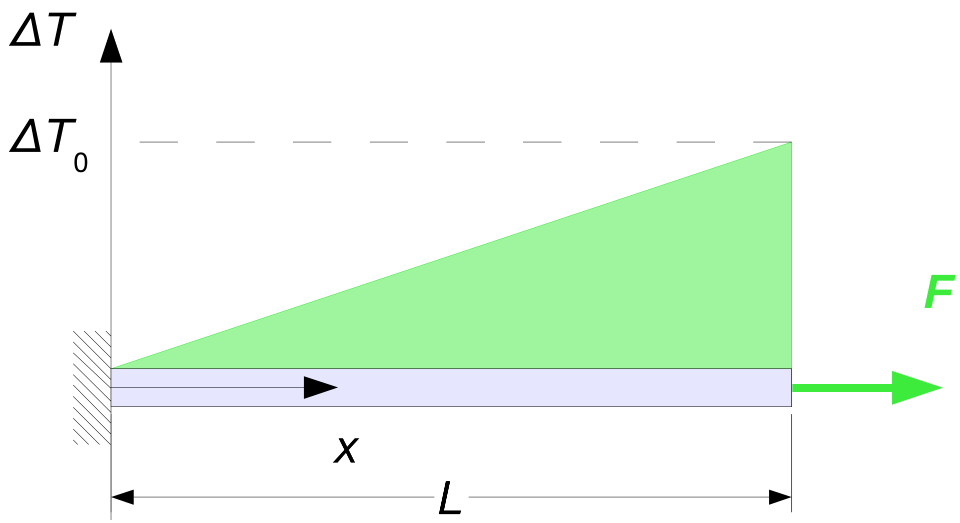
1.3 Stoffgesetz

- Typische Werkstoffkennwerte:

Material	E in N/mm^2	α_T in $1/K$
Stahl	$2{,}1\cdot 10^5$	$1{,}2\cdot 10^{-5}$
Aluminium	$0{,}7\cdot 10^5$	$2{,}3\cdot 10^{-5}$
Kupfer	$1{,}2\cdot 10^5$	$1{,}6\cdot 10^{-5}$
Messing	$1{,}0\cdot 10^5$	$1{,}8\cdot 10^{-5}$

1.3 Stoffgesetz

- Beispiel:
  - Der abgebildete Stab wird durch die Kraft ***F*** und die Temperaturänderung $\Delta T(x)$ belastet.
  - Gesucht ist die Längenänderung ΔL.



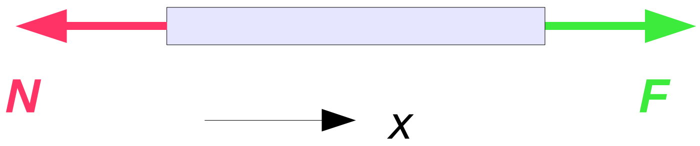
1.3 Stoffgesetz

- Gegeben:
  - Länge L = 1m, Querschnittsfläche A = 5cm^2
  - Elastizitätsmodul E = 70000N/mm^2, Wärmeausdehnungskoeffizient α_T = 2,3·10^{-5} 1/K
  - Kraft F = 1kN
  - Temperaturänderung: $$\Delta T(x) = \Delta T_0 \frac{x}{L}$$

    mit ΔT_0 = 20K

1.3 Stoffgesetz

– Normalkraft:



$$\sum F_x = 0 \;:\; -N + F = 0 \;\rightarrow\; N = F$$

– Spannung: $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} = const.$

– Dehnung: $\epsilon(x) = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T(x) = \frac{F}{EA} + \alpha_T \Delta T_0 \frac{x}{L}$

1.3 Stoffgesetz

– Verlängerung:

$$\Delta L = \int_0^L \epsilon(x)\,dx = \frac{F}{EA}\int_0^L dx + \alpha_T \frac{\Delta T_0}{L}\int_0^L x\,dx$$

$$= \frac{F}{EA}\left[x\right]_{x=0}^{x=L} + \alpha_T \frac{\Delta T}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=L} = \frac{F\,L}{EA} + \frac{1}{2}\alpha_T \Delta T_0 L$$

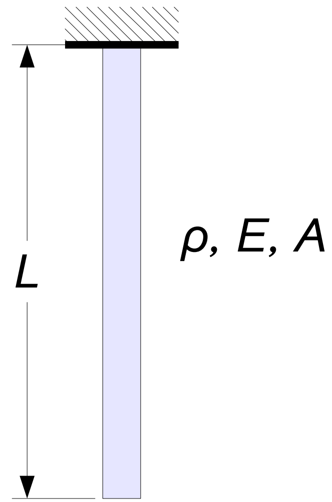
– Zahlenwert:

$$\Delta L = \frac{1000\,N \cdot 1\,m}{7\cdot 10^{10}\,N/m^2 \cdot 5\cdot 10^{-4}\,m^2} + \frac{1}{2}\cdot 2{,}3\cdot 10^{-5}\frac{1}{K}\cdot 20\,K \cdot 1\,m$$

$$= 2{,}857\cdot 10^{-5}\,m + 2{,}3\cdot 10^{-4}\,m = \underline{0{,}2586\,mm}$$

1.4 Beispiele

- Stab unter Eigengewicht:
  - Der Stab mit konstanter Querschnittsfläche A ist an seinem oberen Ende fest eingespannt.
  - Bekannt sind die Länge L, die Querschnittsfläche A, der Elastizitätsmodul E und die Massendichte ρ.
  - Gesucht ist die Verlängerung ΔL infolge seines Eigengewichts.



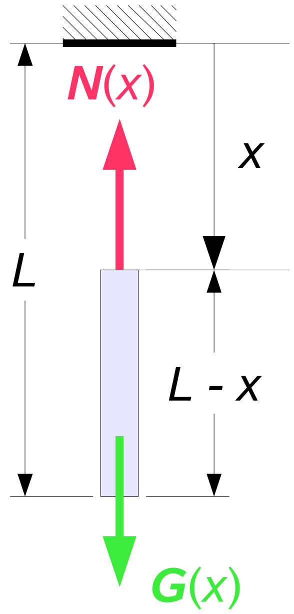
1.4 Beispiele

– Normalkraft:

$$\sum F_x = 0 \; : \; -N(x) + G(x) = 0$$

$$\rightarrow \quad N(x) = G(x) = \rho A (L - x) g$$

$$= \rho A L g \left(1 - \frac{x}{L}\right) = G_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$



– Spannung:

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{G_0}{A}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

1.4 Beispiele

– Dehnung:

$$\epsilon(x)=\frac{\sigma(x)}{E}=\frac{G_0}{EA}\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

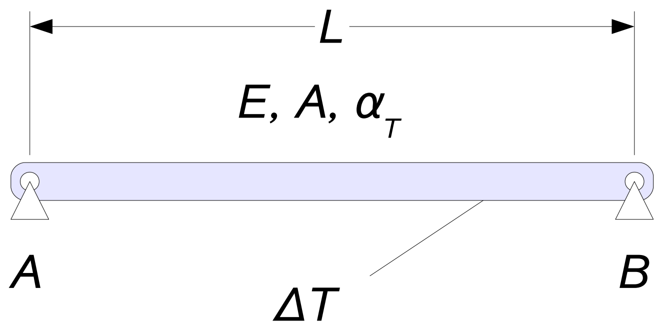
– Verlängerung:

$$\Delta L=\int_0^L \epsilon(x)\,dx=\frac{G_0}{EA}\int_0^L\left(1-\frac{x}{L}\right)dx=\frac{G_0}{EA}\left[x-\frac{x^2}{2L}\right]_{x=0}^{x=L}$$

$$=\frac{G_0}{EA}\left(L-\frac{L^2}{2L}\right)=\frac{1}{2}\frac{G_0}{EA}$$

1.4 Beispiele

- Eingespannter Stab unter Temperaturlast:



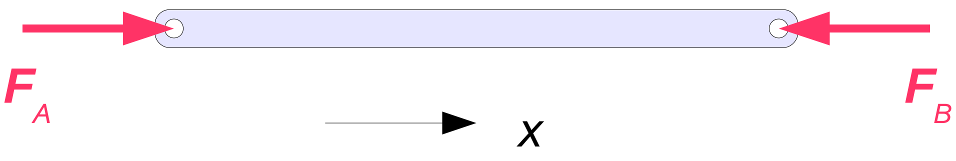
  - Der Stab mit konstantem Querschnitt *A* ist an beiden Seiten fest eingespannt.
  - Er wird durch eine konstante Temperaturänderung *ΔT* belastet.
  - Gesucht sind die Kräfte in den Lagern *A* und *B*.

1.4 Beispiele

– Gleichgewicht am freigeschnittenen Stab:

$$\sum F_x = 0 \ : \ F_A - F_B = 0$$

$$\rightarrow \ F_A = F_B$$

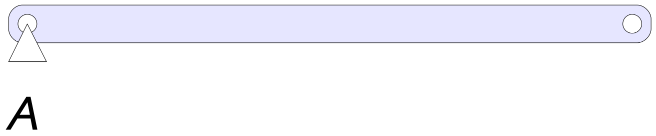


– Es steht keine weitere Gleichgewichtsbedingung zur Verfügung, um den Wert von F_B zu ermitteln.

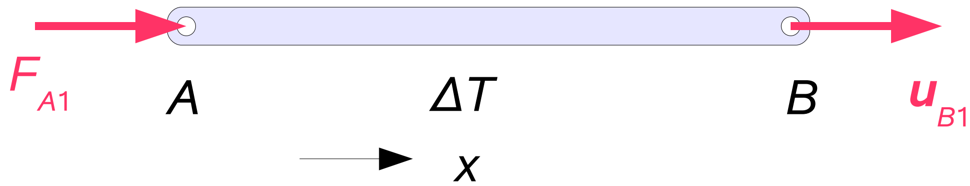
– Das System ist statisch unbestimmt: Die Gleichgewichtsbedingungen reichen nicht aus, um die Lagerkräfte zu berechnen.

1.4 Beispiele

– Statisch bestimmtes Grundsystem:



– Lastfall 1: Temperaturlast



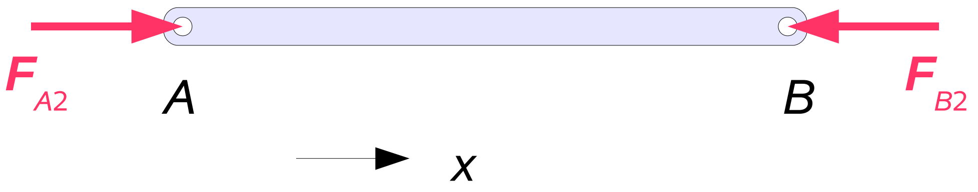
- Lagerkraft im Punkt *A*: $\sum F_x = 0 \ : \ F_{A1} = 0$

1.4 Beispiele

- Dehnung: $\epsilon_1 = \alpha_T \Delta T = const.$

- Verschiebung von Punkt *B*: $u_{B1} = \int_0^L \epsilon_1 \, dx = \alpha_T \Delta T \, L$

– Lastfall 2: Unbekannte Lagerkraft im Punkt *B*



- Lagerkraft im Punkt *A*:

$$\sum F_x = 0 \ : \ F_{A2} - F_{B2} = 0 \ \rightarrow \ F_{A2} = F_{B2}$$

1.4 Beispiele

- Normalkraft: $N_2 = -F_{B2}$ (Druck)
- Spannung: $\sigma_2 = \dfrac{N_2}{A} = -\dfrac{F_{B2}}{A}$
- Dehnung: $\epsilon_2 = \dfrac{\sigma_2}{E} = -\dfrac{F_{B2}}{EA}$
- Verschiebung von Punkt *B*: $u_{B2} = \int_0^L \epsilon_2 \, dx = -\dfrac{F_{B2}}{EA} L$

1.4 Beispiele

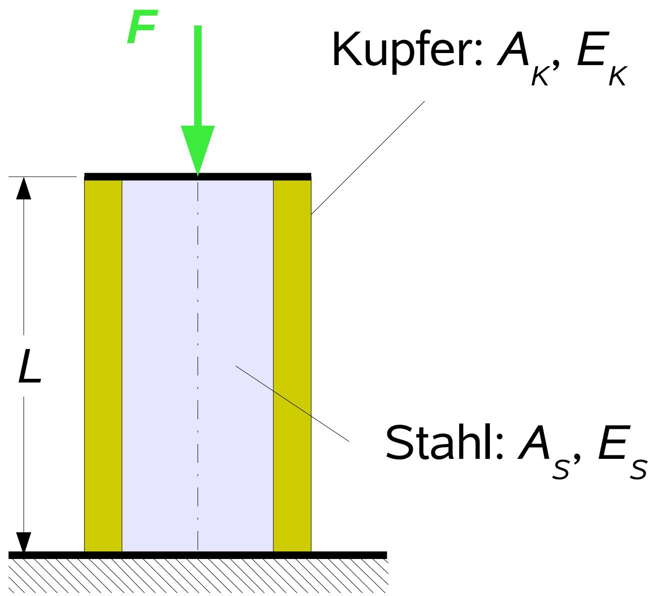
- Verträglichkeitsbedingung:
  - Die tatsächliche Last ist eine Überlagerung der beiden Lastfälle.
  - Wegen der festen Einspannung muss die Verschiebung im Punkt *B* null sein: $u_B = u_{B1} + u_{B2} = 0$
  - Aus dieser Bedingung kann die unbekannte Kraft F_{B2} bestimmt werden:

$$\alpha_T \Delta T L - \frac{F_{B2}}{EA} L = 0 \quad \rightarrow \quad F_{B2} = EA \alpha_T \Delta T$$

- Lagerkräfte: $F_B = F_{B1} + F_{B2} = F_{B2} = EA \alpha_T \Delta T \, , \quad F_A = F_B$

1.4 Beispiele

- Beispiel: Vollzylinder in Hohlzylinder
  - In einem Hohlzylinder aus Kupfer befindet sich ein Vollzylinder aus Stahl.
  - Die beiden Zylinder tragen eine Platte, auf die die Kraft ***F*** wirkt.
  - Gesucht:
    - Spannungen in den Zylindern
    - Verschiebung der Platte



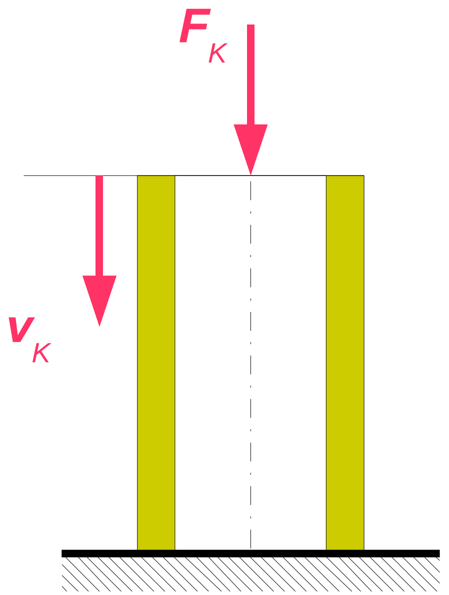
1.4 Beispiele

– Kupferzylinder freigeschnitten:

- Spannung: $$\sigma_K = -\frac{F_K}{A_K}$$

- Dehnung: $$\epsilon_K = -\frac{F_K}{E_K A_K}$$

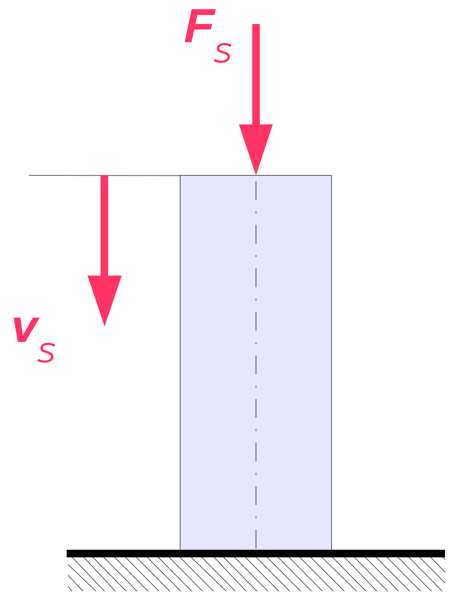
- Verschiebung: $$v_K = \frac{F_K L}{E_K A_K}$$



1.4 Beispiele

– Stahlzylinder freigeschnitten:

- Spannung: $$\sigma_S = -\frac{F_S}{A_S}$$
- Dehnung: $$\epsilon_S = -\frac{F_S}{E_S A_S}$$
- Verschiebung: $$v_S = \frac{F_S L}{E_S A_S}$$

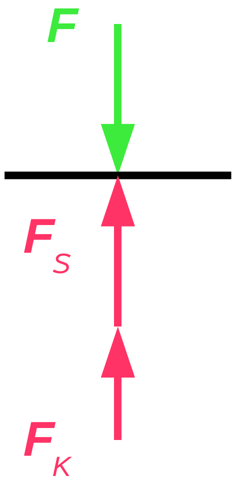


1.4 Beispiele

– Kräftegleichgewicht an der Platte: $F = F_S + F_K$

– Verträglichkeitsbedingung: $v_K = v_S$

$$\rightarrow \quad \frac{F_K L}{E_K A_K} = \frac{F_S L}{E_S A_S} \quad \rightarrow \quad F_K = \frac{E_K A_K}{E_S A_S} F_S$$



– Einsetzen in Kräftegleichgewicht:

$$F = \left(1 + \frac{E_K A_K}{E_S A_S}\right) F_S = \frac{E_S A_S + E_K A_K}{E_S A_S} F_S$$

$$\rightarrow \quad F_S = \frac{E_S A_S}{E_S A_S + E_K A_K} F, \quad F_K = \frac{E_K A_K}{E_S A_S + E_K A_K} F$$

1.4 Beispiele

– Spannungen:

$$\sigma_S = \frac{-E_S}{E_S A_S + E_K A_K} F, \quad \sigma_K = \frac{-E_K}{E_S A_S + E_K A_K} F$$

– Verschiebung der Platte:

$$v = v_S = \frac{F L}{E_S A_S + E_K A_K}$$