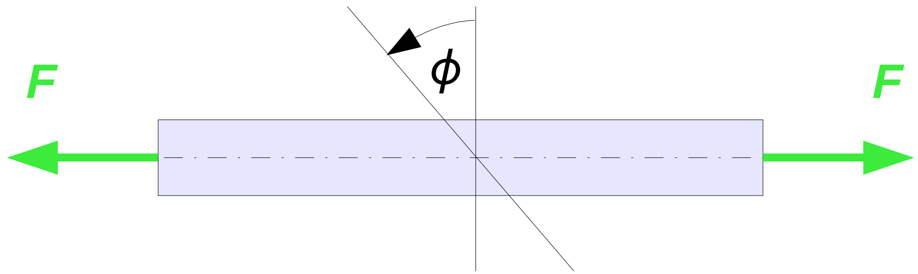
2. Der ebene Spannungszustand

2.1 Schubspannung

- Betrachtet wird ein Stab, der an seinen Enden durch die Kräfte ***F*** belastet wird.
- Der Stab wird durch eine Ebene geschnitten, die schräg zur Stabachse verläuft.

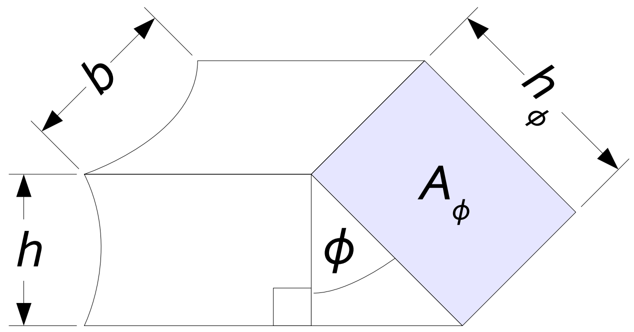


2.1 Schubspannung

- Schnittfläche:

$$h = h_\phi \cos\phi \quad \rightarrow \quad h_\phi = \frac{h}{\cos\phi}$$

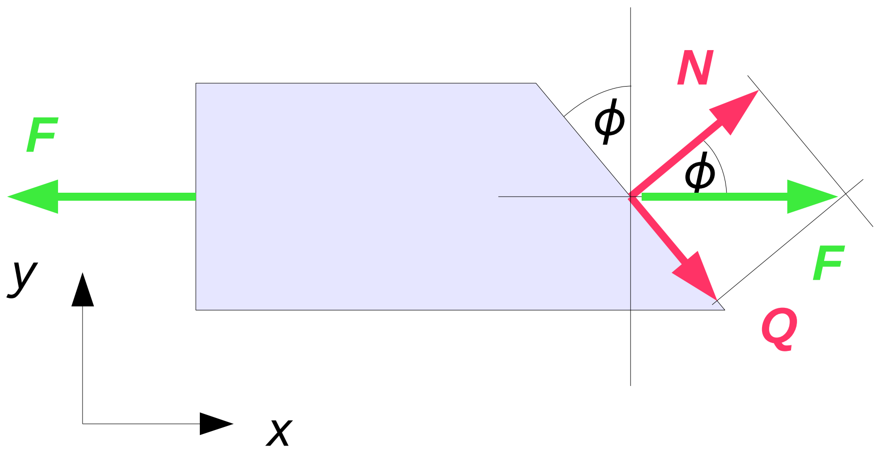
$$A_\phi = h_\phi b = \frac{h\,b}{\cos\phi} = \frac{A}{\cos\phi}$$



  – *A* ist die Fläche eines Schnitts senkrecht zur Stabachse.

2.1 Schubspannung

- Schnittkräfte:
  - Die Schnittkraft wird in eine Komponente senkrecht zur Schnittebene und eine Komponente parallel zur Schnittebene zerlegt.



$$N = F\cos\phi$$

$$Q = F\sin\phi$$

2.1 Schubspannung

- Die Komponente ***N*** senkrecht zur Schnittebene wird als Normalkraft, die Komponente ***Q*** parallel zur Schnittebene als Querkraft bezeichnet.

- Spannungen:
  - Normalspannung: $$\sigma = \frac{N}{A_\phi} = \frac{F}{A}\cos^2\phi$$
  - Schubspannung: $$\tau = \frac{Q}{A_\phi} = \frac{F}{A}\sin\phi\cos\phi$$

2.1 Schubspannung

- Mit den trigonometrischen Beziehungen

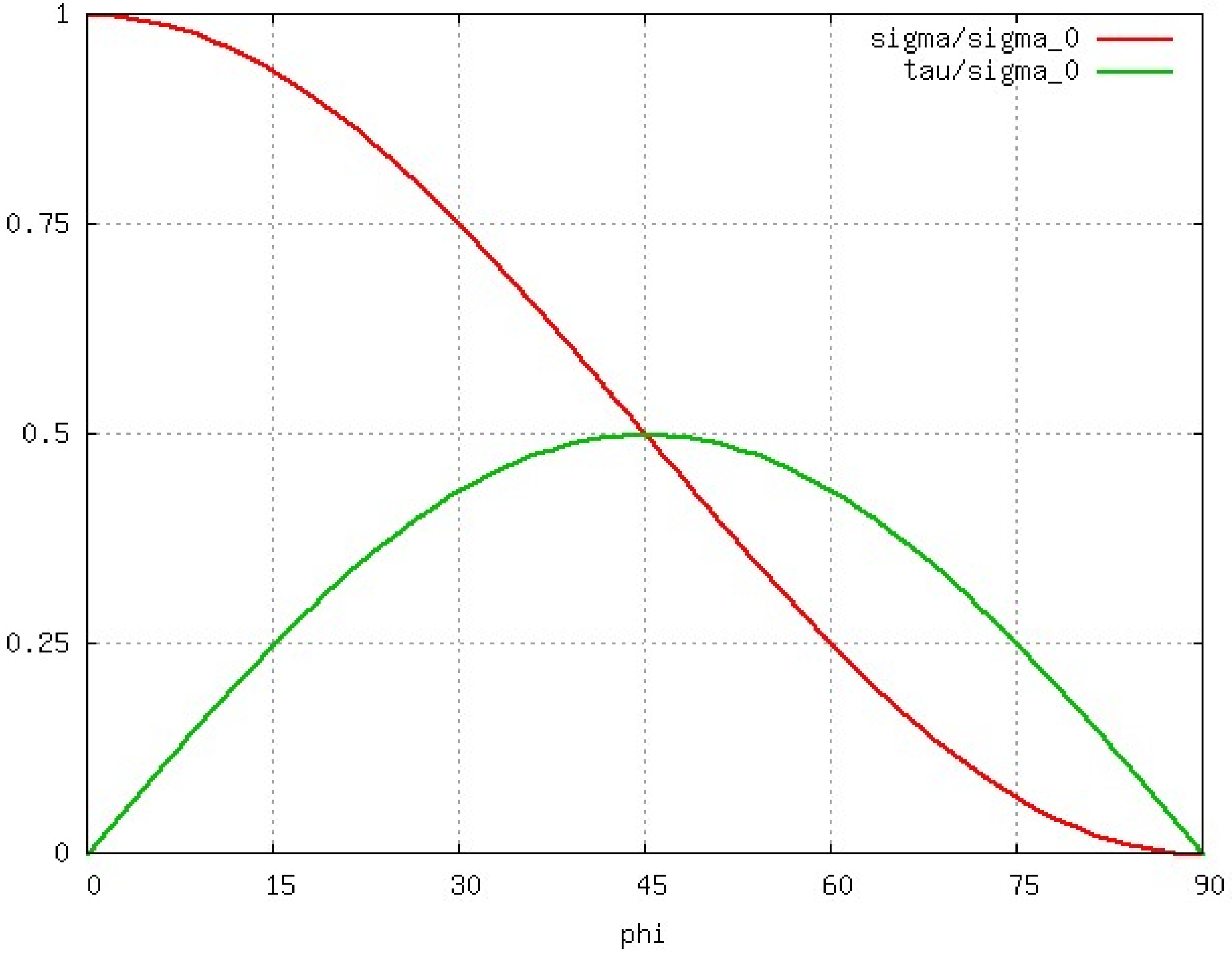
$$\cos^2\phi = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2\phi)\right), \quad \sin\phi\cos\phi = \frac{1}{2}\sin(2\phi)$$

  und $\sigma_0 = F/A$ folgt:

$$\sigma(\phi) = \frac{\sigma_0}{2}\left(1+\cos(2\phi)\right), \quad \tau(\phi) = \frac{\sigma_0}{2}\sin(2\phi)$$

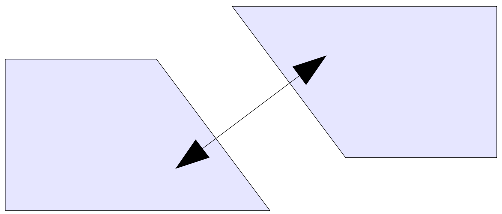
- Der größte Wert der Normalspannung ist σ_0 und wird für einen Schnittwinkel ϕ = 0° angenommen.
- Der größte Wert der Schubspannung ist $\sigma_0/2$ und wird für einen Schnittwinkel ϕ = 45° angenommen.

2.1 Schubspannung

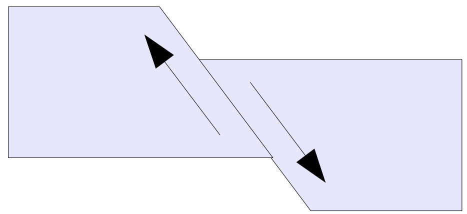


2.1 Schubspannung

- Die Normalspannung wirkt einem Auseinanderreißen der Schnittebenen senkrecht zur Schnittfläche entgegen.



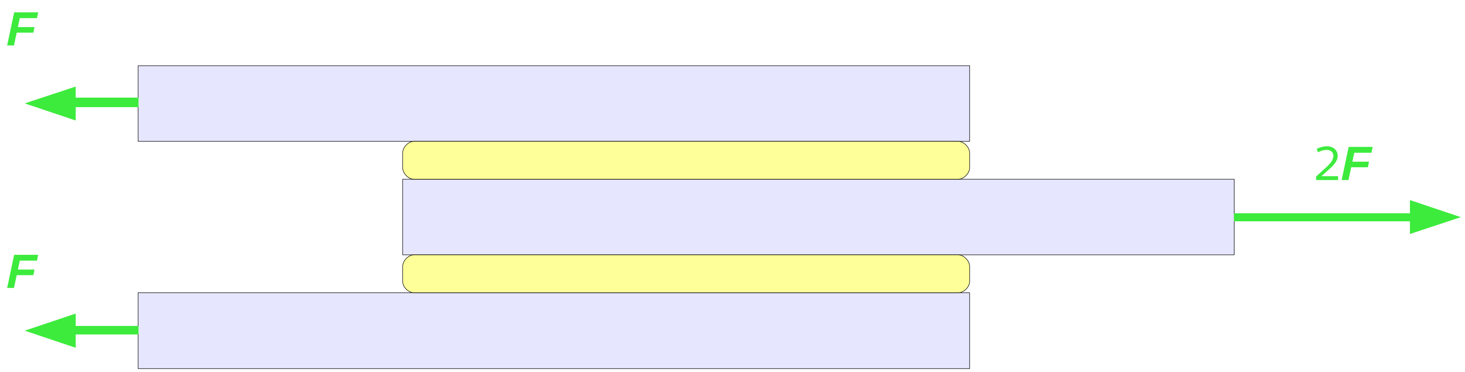
- Die Schubspannung wirkt einem Gleiten der Schnittebenen entgegen.



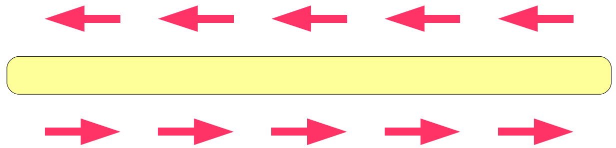
- Die Kenntnis der Schubspannung ist z.B. wichtig, wenn der Stab in der Schnittfläche geklebt ist.

2.1 Schubspannung

- Klebeverbindung:

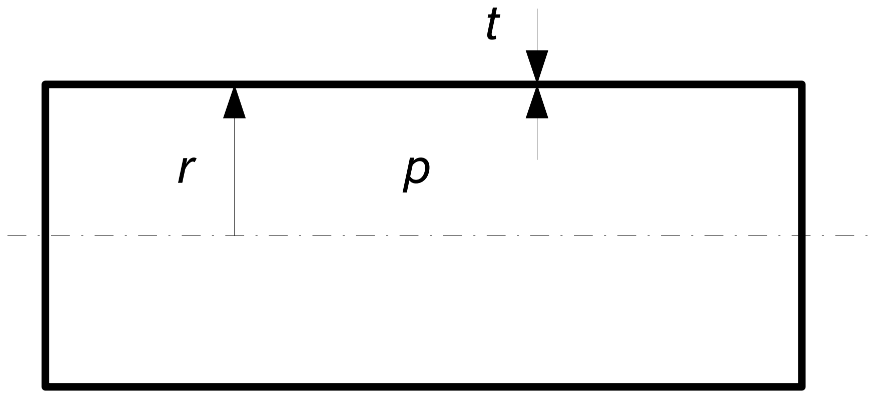


  – Die Klebenähte werden auf Schub beansprucht:



2.2 Dünnwandiger Kessel

- Betrachtet wird ein zylindrischer Kessel unter Innendruck.
- Die Wandstärke des Kessels soll klein gegenüber seinem Radius sein: $t \ll r$

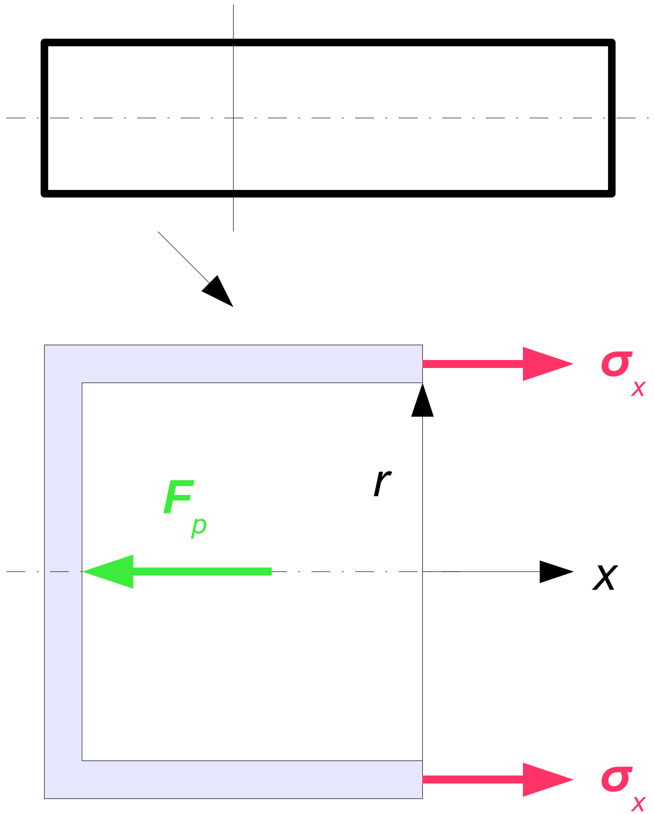


2.2 Dünnwandiger Kessel

- Spannung in Längsrichtung:
  - Schnitt senkrecht zur Kesselachse
  - Druckkraft: $F_p = \pi r^2 p$
  - Gleichgewicht in Längsrichtung:

$$-F_p + 2\pi r t \sigma_x = 0$$

$$\rightarrow \quad \sigma_x = \frac{\pi r^2 p}{2\pi r t} = \frac{1}{2} p \frac{r}{t}$$

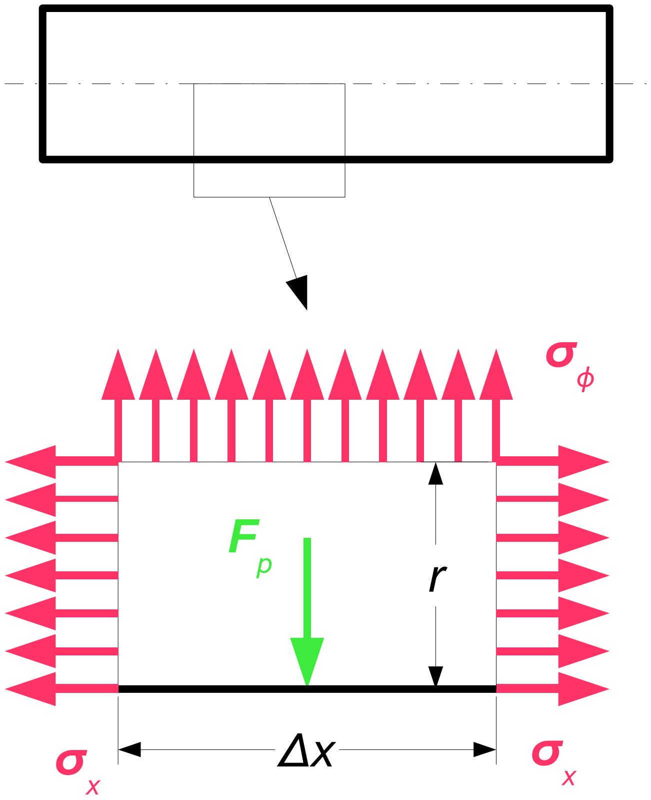


2.2 Dünnwandiger Kessel

- Spannung in radialer Richtung:
  - Es wird ein Halbkreisrohr ausgeschnitten.
  - Druckkraft: $F_p = 2 r \Delta x\, p$
  - Gleichgewicht in vertikaler Richtung:

$$-F_p + 2 t \Delta x\, \sigma_\phi = 0$$

$$\rightarrow \quad \sigma_\phi = \frac{2 r \Delta x\, p}{2 t \Delta x} = p \frac{r}{t}$$

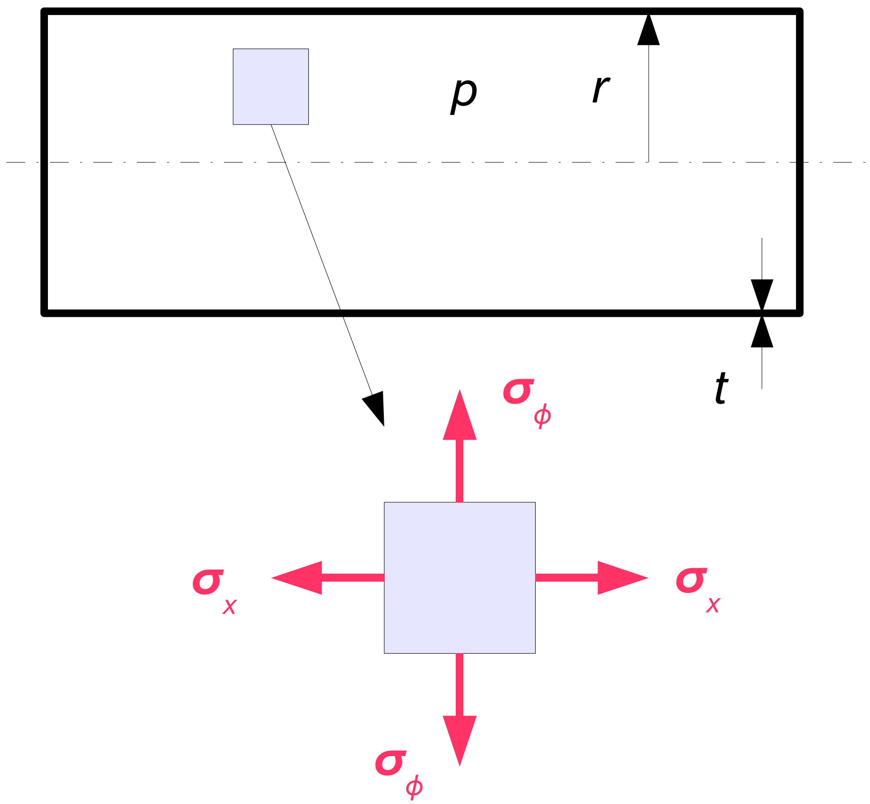


2.2 Dünnwandiger Kessel

- Spannungen am Flächenelement:
  - Kesselformeln:

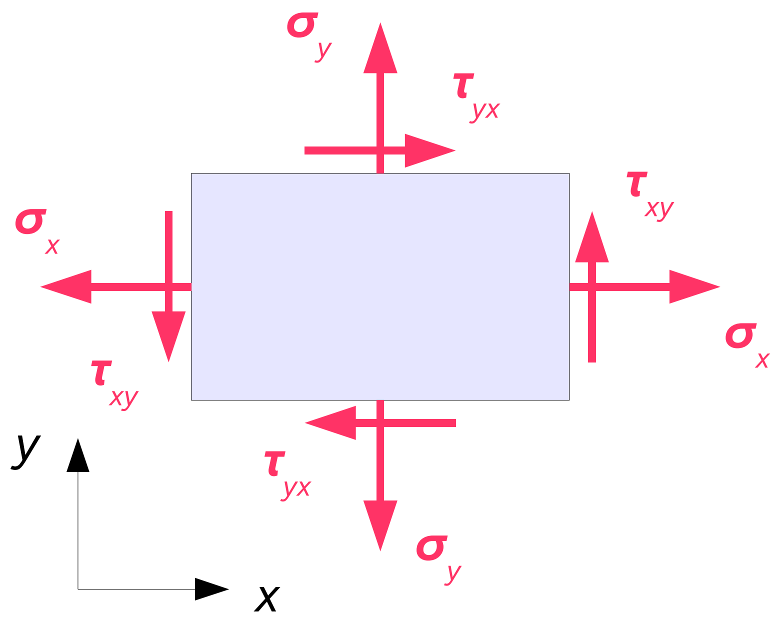
$$\sigma_x = \frac{p\,r}{2t}$$

$$\sigma_\phi = \frac{p\,r}{t}$$



2.3 Ebener Spannungszustand

- Wird aus einer dünnwandigen Struktur ein kleines rechteckiges Flächenelement herausgeschnitten, so wirken an seinen Rändern sowohl Normal- als auch Schubspannungen.

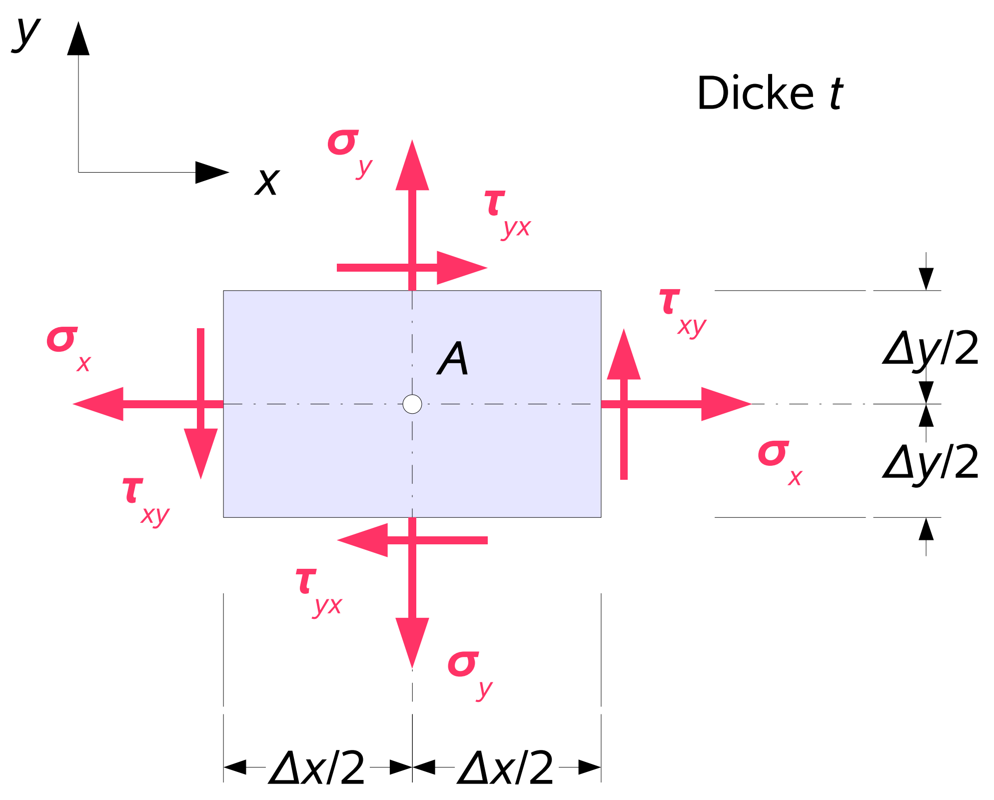


2.3 Ebener Spannungszustand

- Vorzeichenkonvention:
  - Positive Spannungen zeigen am positiven Schnittufer in die positive Koordinatenrichtung und am negativen Schnittufer in die negative Koordinatenrichtung.
  - Positive Normalspannungen beanspruchen das Flächenelement also auf Zug und negative auf Druck.
- Bezeichnung der Schubspannungen:
  - Der erste Index gibt die Koordinatenachse an, die senkrecht auf der Schnittkante steht, und der zweite Index die Koordinatenrichtung, in der die Spannung wirkt.

2.3 Ebener Spannungszustand

- Momentengleichgewicht:



2.3 Ebener Spannungszustand

- Betrachtet wird ein infinitesimales Flächenelement mit Kantenlängen *Δx* und *Δy* und Wandstärke *t*.

$$\sum M_{(A)}=0 \quad :$$

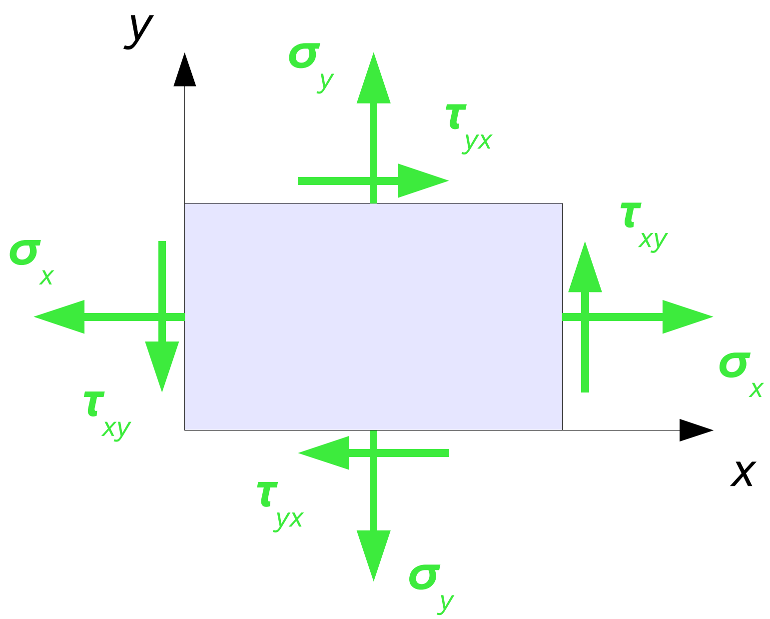
$$\frac{\Delta x}{2}\tau_{xy}\Delta y\, t+\frac{\Delta x}{2}\tau_{xy}\Delta y\, t-\frac{\Delta y}{2}\tau_{yx}\Delta x\, t-\frac{\Delta y}{2}\tau_{yx}\Delta x\, t=0$$

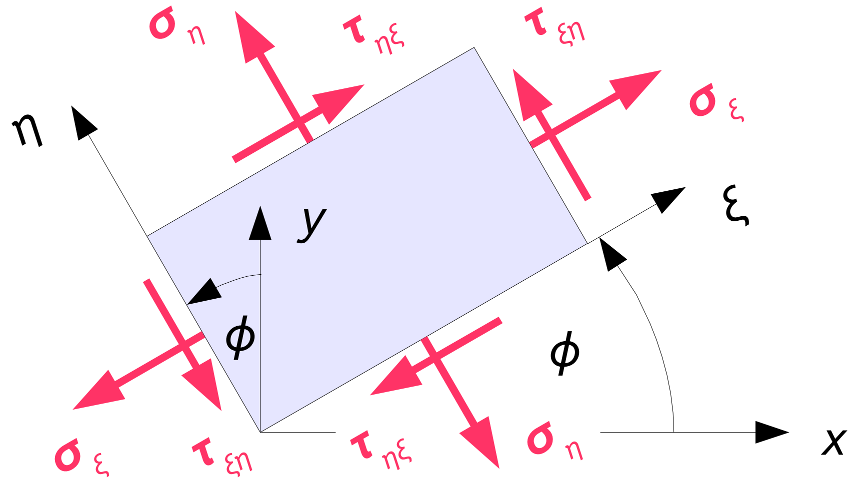
$$\rightarrow \quad \tau_{xy}-\tau_{yx}=0$$

- Ergebnis: $\boxed{\tau_{xy}=\tau_{yx}}$

2.4 Spannungstransformation

- Aufgabenstellung:
  - bekannt:
  - gesucht:



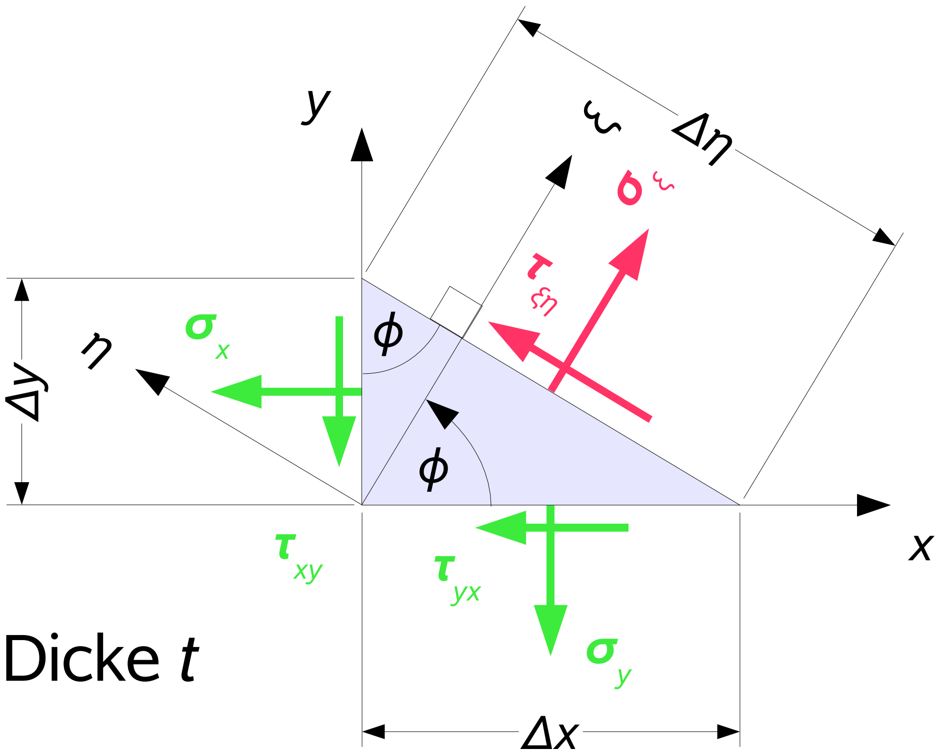


2.4 Spannungstransformation

- Bekannt seien die Spannungen σ_x, σ_y und τ_{xy} in Schnitten parallel zu den Koordinatenachsen.
- Gesucht sind die Spannungen σ_ξ, σ_η und $\tau_{\xi\eta}$ in Schnitten, die gegenüber den Koordinatenachsen um den Winkel ϕ gedreht sind.
- Die Kenntnis dieser Spannungen ist nötig, wenn
  - entlang dem Schnitt eine Fügenaht verläuft (Schweissnaht, Klebenaht)
  - die Werkstoffeigenschaften richtungsabhängig sind (z.B. Holz, Faserverbundwerkstoffe)

2.4 Spannungstransformation

- Gleichgewicht am Dreieckselement:



$$\Delta x = \Delta \eta \sin \phi$$

$$\Delta y = \Delta \eta \cos \phi$$

2.4 Spannungstransformation

– Gleichgewicht:

$$\sum F_x = 0 \ : \ -\sigma_x t \Delta y - t_{yx} t \Delta x + \sigma_\xi \cos\phi \, t \Delta \eta - \tau_{\xi\eta} \sin\phi \, t \Delta \eta = 0$$

$$\rightarrow \ \sigma_\xi \cos\phi - \tau_{\xi\eta} \sin\phi = \sigma_x \cos\phi + \tau_{xy} \sin\phi$$

$$\sum F_y = 0 \ : \ -\sigma_y t \Delta x - \tau_{xy} t \Delta y + \sigma_\xi \sin\phi \, t \Delta \eta + \tau_{\xi\eta} \cos\phi \, t \Delta \eta = 0$$

$$\rightarrow \ \sigma_\xi \sin\phi + \tau_{\xi\eta} \cos\phi = \sigma_y \sin\phi + \tau_{yx} \cos\phi$$

2.4 Spannungstransformation

– Mit $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ folgt:

$$\begin{array}{rcl|c|c} \sigma_\xi \cos\phi - \tau_{\xi\eta}\sin\phi & = & \sigma_x \cos\phi + \tau_{xy}\sin\phi & \cos\phi & -\sin\phi \\ \sigma_\xi \sin\phi + \tau_{\xi\eta}\cos\phi & = & \sigma_y \sin\phi + \tau_{xy}\cos\phi & \sin\phi & \cos\phi \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \sigma_x \cos^2\phi + \sigma_y \sin^2\phi + 2\tau_{xy}\sin\phi\cos\phi \\ \tau_{\xi\eta} &= -\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin\phi\cos\phi + \tau_{xy}\left(\cos^2\phi - \sin^2\phi\right) \end{aligned}$$

– Wird der Winkel ϕ durch den Winkel ϕ + 90° ersetzt, so folgt:

$$\sigma_\eta = \sigma_x \sin^2\phi + \sigma_y \cos^2\phi - 2\tau_{xy}\sin\phi\cos\phi$$

2.4 Spannungstransformation

– Trigonometrische Beziehungen:

$$2\sin\phi\cos\phi = \sin(2\phi), \quad \cos^2\phi - \sin^2\phi = \cos(2\phi)$$

$$\sin^2\phi = \frac{1}{2}\left(1-\cos(2\phi)\right), \quad \cos^2\phi = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2\phi)\right)$$

- Ergebnis:

$$\boxed{\begin{aligned}
\sigma_\xi &= \frac{1}{2}\left(\sigma_x+\sigma_y\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\cos(2\phi) + \tau_{xy}\sin(2\phi)\\
\sigma_\eta &= \frac{1}{2}\left(\sigma_x+\sigma_y\right) - \frac{1}{2}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\cos(2\phi) - \tau_{xy}\sin(2\phi)\\
\tau_{\xi\eta} &= - \frac{1}{2}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\sin(2\phi) + \tau_{xy}\cos(2\phi)
\end{aligned}}$$

2.4 Spannungstransformation

- Invarianten:
  - Addition der ersten beiden Transformationsgleichungen ergibt:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_\xi + \sigma_\eta = I_1$$

  - Eine einfache Rechnung zeigt:

$$\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy} = \sigma_\xi \sigma_\eta - \tau_{\xi\eta} = I_2$$

  - Die Größen I_1 und I_2 hängen also nicht vom Koordinatensystem ab. Sie werden als Spannungsinvarianten bezeichnet.

2.4 Spannungstransformation

- Hydrostatischer Zustand:
  - Gilt $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ und $\tau_{xy} = 0$, so gilt in jedem Koordinatensystem:

$$\sigma_\xi = \sigma_\eta = \sigma \,, \quad \tau_{\xi\eta} = 0$$

  - Die Normalspannungen sind in jeder Richtung gleich, während die Schubspannung verschwindet.
  - Dieser Spannungszustand wird als hydrostatischer Spannungszustand bezeichnet.

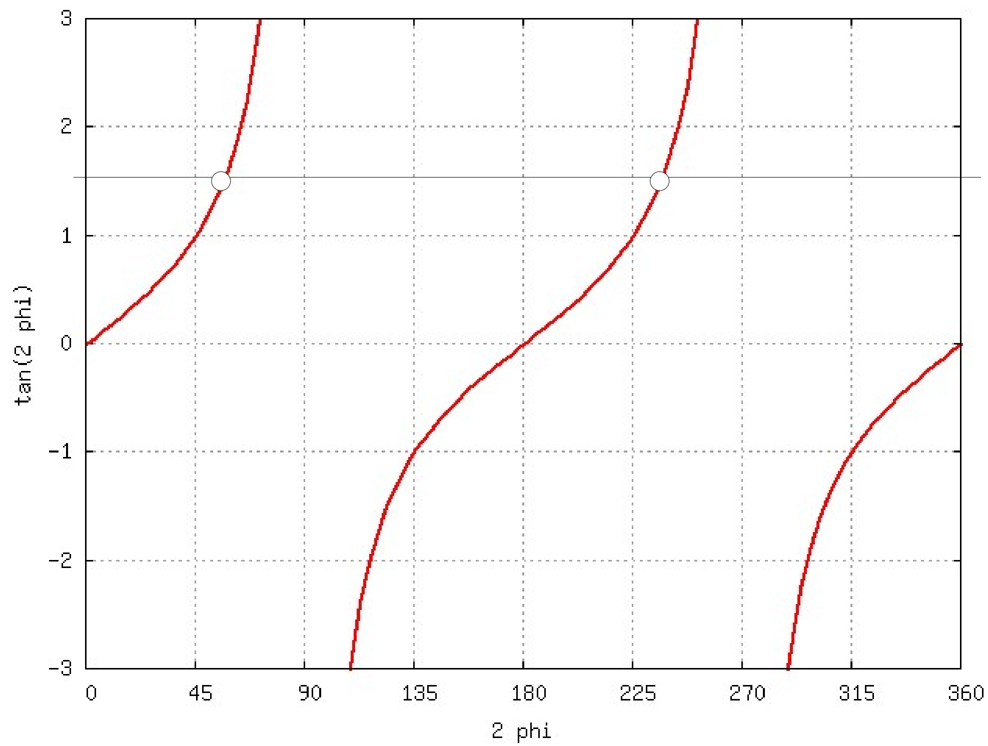
2.5 Hauptspannungen

- Definition:
  - Eine Schnittrichtung, für die die Schubspannung verschwindet, heißt Hauptrichtung.
  - Die zugehörigen Normalspannungen werden als Haupt-spannungen bezeichnet.
- Ermittlung der Hauptrichtungen:
  - Aus $\tau_{xy} = 0$ folgt:

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin\left(2\phi_H\right) = \tau_{xy}\cos\left(2\phi_H\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{\tan\left(2\phi_H\right) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}}$$

2.5 Hauptspannungen

– Der Winkel $2\phi_H$ wird aus der Umkehrung der Tangens-Funktion ermittelt:

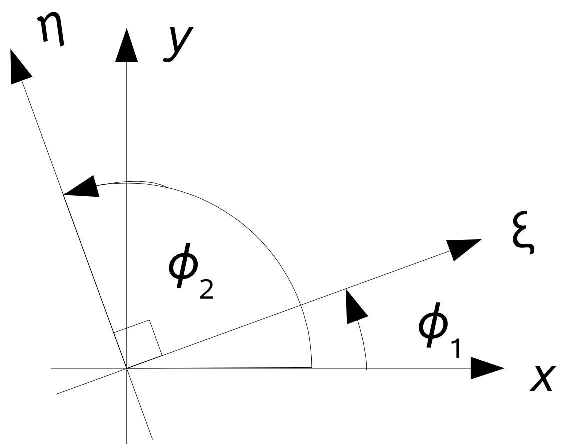


2.5 Hauptspannungen

- Zu einem gegebenen Wert des Tangens gibt es zwei Winkel zwischen 0° und 360°, die denselben Wert liefern.
- Diese Winkel unterscheiden sich um 180°.
- Es gibt also zwei Hauptrichtungen

$$\phi_1 = \frac{2\phi_H}{2}$$

und $$\phi_2 = \frac{2\phi_H + 180°}{2} = \phi_1 + 90°$$



die senkrecht aufeinander stehen.

2.5 Hauptspannungen

- Ermittlung der Hauptspannungen:
  - Mit den trigonometrischen Beziehungen

$$\sin(2\phi_H)=\frac{\tan(2\phi_H)}{\sqrt{1+\tan^2(2\phi_H)}}\,,\quad \cos(2\phi_H)=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(2\phi_H)}}$$

folgt aus den Transformationsgleichungen:

$$\sigma_{1/2}=\frac{1}{2}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\pm\frac{1}{2}\frac{\sigma_x-\sigma_y}{\sqrt{1+\frac{4\tau_{xy}^2}{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2}}}\pm\frac{2\tau_{xy}^2}{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\sqrt{1+\frac{4\tau_{xy}^2}{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\pm\frac{1}{2}\frac{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau_{xy}^2}{\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau_{xy}^2}}$$

2.5 Hauptspannungen

– Ergebnis:

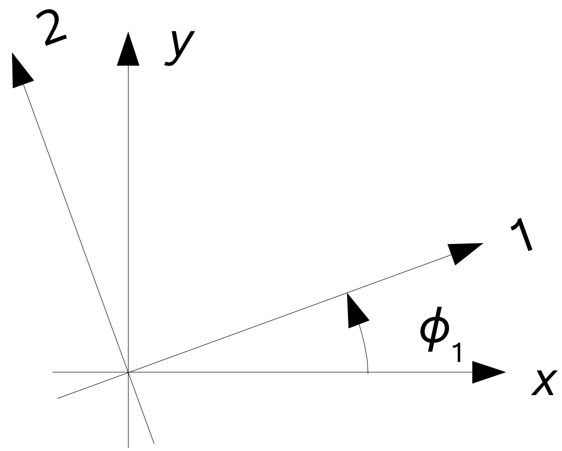
$$\sigma_{1/2}=\frac{1}{2}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

– Die Hauptspannungen werden üblicherweise so nummeriert, dass $\sigma_1 > \sigma_2$ gilt.

– Welcher der beiden Winkel zu σ_1 gehört, kann durch Einsetzen des Winkels in die Transformationsgleichungen ermittelt werden.

2.5 Hauptspannungen

- Der Mohrsche Spannungskreis:
  - Sind die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 sowie der Winkel ϕ_1 bekannt, so lassen sich die Spannungen σ_x , σ_y und τ_{xy} aus den Transformationsgleichungen ermitteln.
  - Das Hauptachsensystem wird dabei um den Winkel $-\phi_1$ gedreht.



2.5 Hauptspannungen

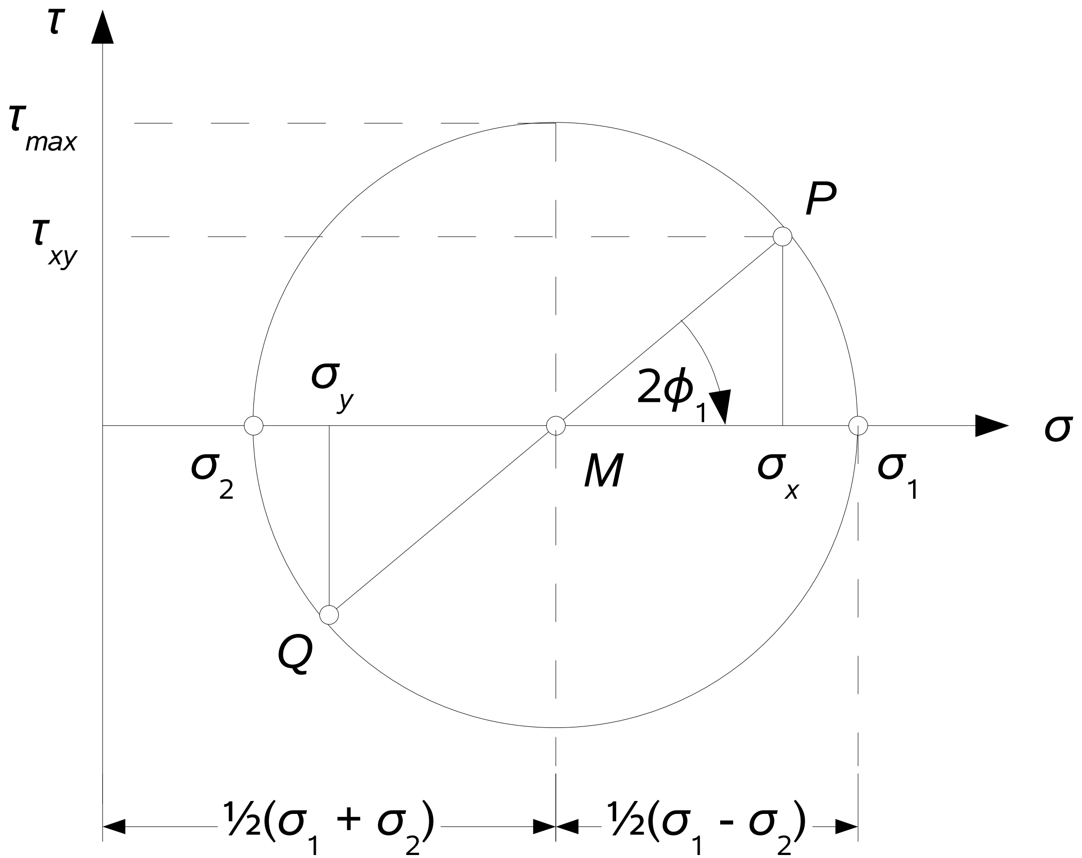
– Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{1}{2}\left(\sigma_1+\sigma_2\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma_1-\sigma_2\right)\cos\left(2\phi_1\right)\\
\sigma_y &= \frac{1}{2}\left(\sigma_1+\sigma_2\right) - \frac{1}{2}\left(\sigma_1-\sigma_2\right)\cos\left(2\phi_1\right)\\
\tau_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\sigma_1-\sigma_2\right)\sin\left(2\phi_1\right)
\end{aligned}
$$

– Diese Gleichungen lassen sich im Mohrschen Spannungskreis geometrisch darstellen.

2.5 Hauptspannungen

– Mohrscher Spannungskreis:



2.5 Hauptspannungen

– Konstruktion des Mohrschen Spannungskreises aus σ_x , σ_y und τ_{xy} :

- Der Punkt *P* hat die Koordinaten (σ_x , τ_{xy}).
- Der Punkt *Q* hat die Koordinaten (σ_y , $-\tau_{xy}$).
- Der Mittelpunkt des Kreises liegt im Schnittpunkt der Verbindungslinie der Punkte *P* und *Q* mit der σ-Achse.
- Nun können die Hauptspannungen und der Winkel ϕ_1 abgelesen werden.
- Achtung: Im Mohrschen Spannungskreis wird der positive Winkel im Uhrzeigersinn gemessen.

2.5 Hauptspannungen

- Maximale Spannungen:
  - Aus dem Mohrschen Spannungskreis kann abgelesen werden:
    - Die 1. Hauptspannung σ_1 ist die größte Normalspannung.
    - Die 2. Hauptspannung σ_2 ist die kleinste Normalspannung. Ihre Richtung steht senkrecht auf der Richtung der größten Normalspannung.
    - Die größte Schubspannung τ_{max} tritt für eine Schnittrichtung auf, die mit der ersten Hauptrichtung einen Winkel von 45° bildet.

2.5 Hauptspannungen

- Der Wert der größten Schubspannung berechnet sich zu

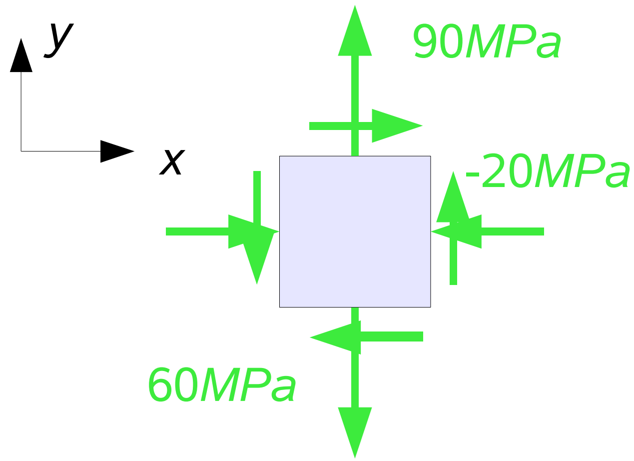
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

2.5 Hauptspannungen

- Beispiel:
  - In einem Punkt eines ebenen dünnwandigen Bauteils werden die folgenden Spannungen gemessen:

$$\sigma_x = -20\, MPa\,,\quad \sigma_y = 90\, MPa$$

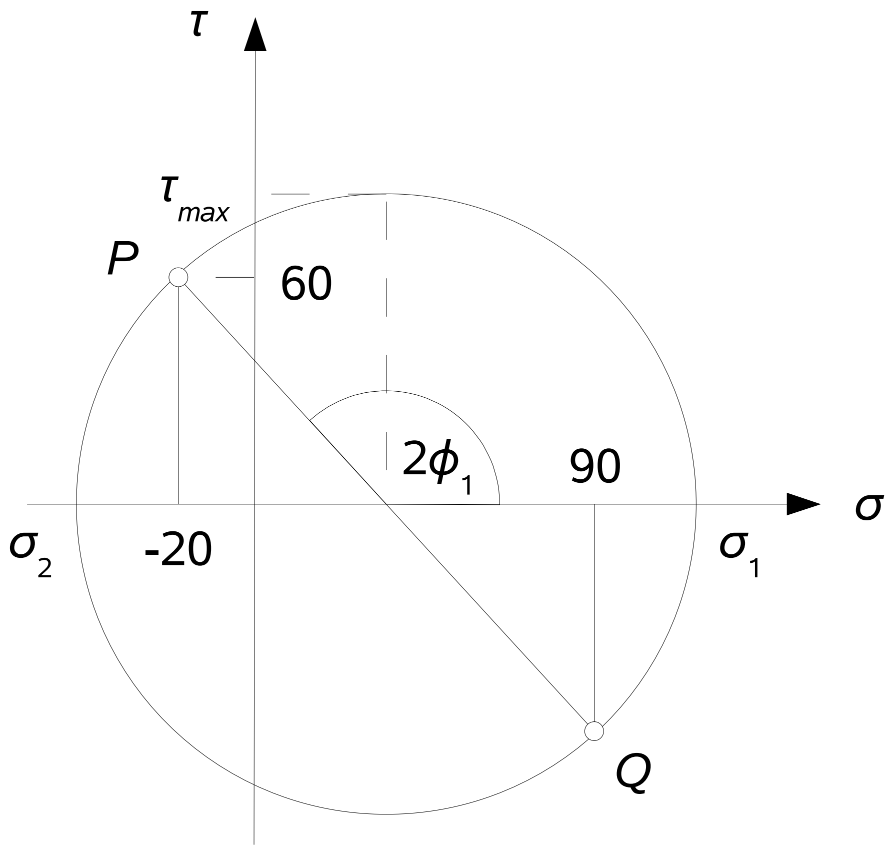
$$\tau_{xy} = 60\, MPa$$



  - Gesucht:
    - Hauptspannungen und Hauptrichtungen
    - Größte Schubspannung und zugehörige Schnittrichtung

2.5 Hauptspannungen

– Mohrscher Spannungskreis ($1 MPa = 5 mm$)



2.5 Hauptspannungen

– Hauptspannungen:

$$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}=35\,MPa$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\sqrt{55^2+60^2}\,MPa=81{,}39\,MPa$$

$$\sigma_1=35\,MPa+81{,}39\,MPa=\underline{116{,}4\,MPa}$$

$$\sigma_2=35\,MPa-81{,}39\,MPa=\underline{-46{,}39\,MPa}$$

2.5 Hauptspannungen

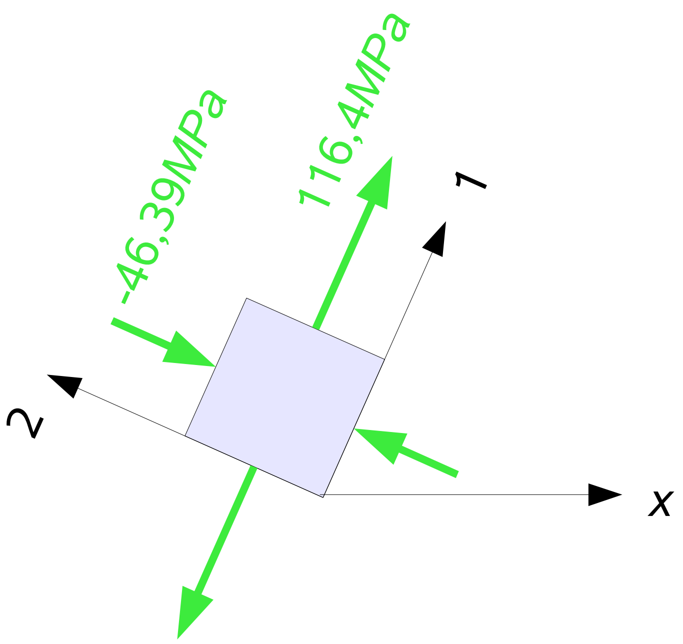
– Hauptrichtungen:

$$\tan(2\phi_1) = \frac{2 \cdot 60}{-20-90} = -\frac{12}{11} = -1{,}091$$

- Der Taschenrechner liefert dazu den Winkel -47,49°.
- Der Mohrsche Spannungskreis zeigt, dass der doppelte Winkel für die 1. Hauptspannung zwischen 90° und 180° liegt.
- Also gilt:

$$2\phi_1 = -47{,}49\,° + 180\,° = 132{,}5\,° \quad \rightarrow \quad \phi_1 = \underline{66{,}26\,°}$$

2.5 Hauptspannungen



– Größte Schubspannung:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$
$$= \frac{116{,}4 + 46{,}39}{2}\,MPa$$
$$= \underline{81{,}40\,MPa}$$

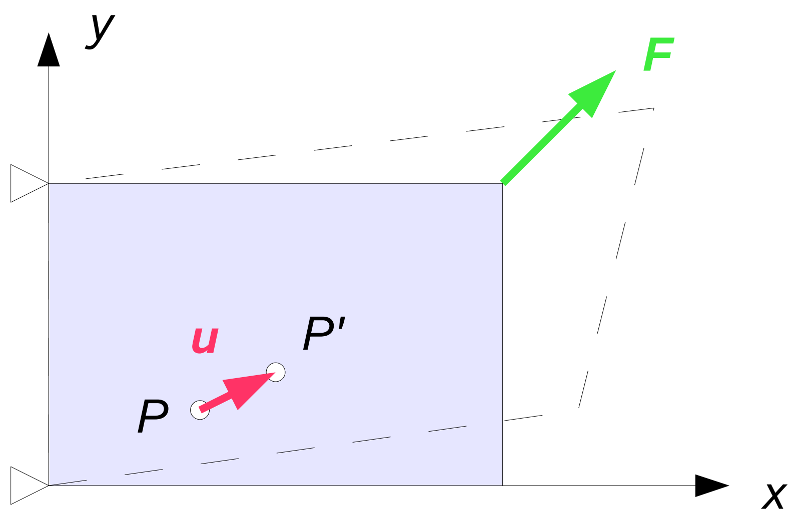
- Die zugehörige Schnittrichtung schließt mit der x-Achse eine Winkel von 21,26° ein.

2.6 Dehnungen

- Verformung:
  - Infolge der Spannungen verformt sich ein belasteter Körper.
  - Die Verformung wird durch einen ortsabhängigen Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u}(P)$ beschrieben.

$$\boldsymbol{x}(P')=\boldsymbol{x}(P)+\boldsymbol{u}(P)$$

$$x_{P'}=x_P+u_x(x_P,y_P)$$
$$y_{P'}=y_P+u_y(x_P,y_P)$$



2.6 Dehnungen

- Verzerrung:
  - Die Verformung eines kleinen Elementes besteht aus einer Verschiebung, einer Verdrehung und einer Verzerrung.
  - Die Verzerrung führt zu einer Änderung der Form des Elementes:
    - Änderung der Kantenlängen
    - Änderung der Winkel
- Dehnungen:
  - Die Verzerrung wird durch die Dehnungen beschrieben.

2.6 Dehnungen

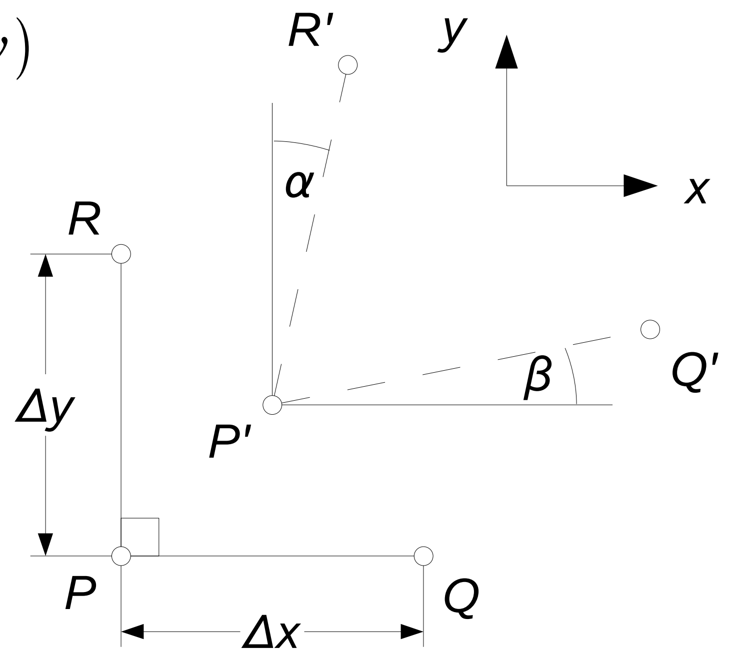
- Unverformt: $P \; : \; (x_P , y_P)$

  $Q \; : \; (x_P + \Delta x , y_P)$

  $R \; : \; (x_P , y_P + \Delta y)$

- Verformt:

$$x_{P'} = x_P + u_x(x_P , y_P)$$
$$y_{P'} = y_P + u_y(x_P , y_P)$$
$$x_{Q'} = x_P + \Delta x + u_x(x_P + \Delta x , y_P)$$
$$y_{Q'} = y_P + u_y(x_P + \Delta x , y_P)$$
$$x_{R'} = x_P + u_x(x_P , y_P + \Delta y)$$
$$y_{R'} = y_P + \Delta y + u_y(x_P , y_P + \Delta y)$$



2.6 Dehnungen

– Taylorreihenentwicklung der Verschiebungen bis zum 1. Glied:

$$u_x(x_P+\Delta x, y_P)=u_x(x_P, y_P)+\frac{\partial u_x}{\partial x}\Delta x+\dots$$

$$u_y(x_P+\Delta x, y_P)=u_y(x_P, y_P)+\frac{\partial u_y}{\partial x}\Delta x+\dots$$

$$u_x(x_P, y_P+\Delta y)=u_x(x_P, y_P)+\frac{\partial u_x}{\partial y}\Delta y+\dots$$

$$u_y(x_P, y_P+\Delta y)=u_y(x_P, y_P)+\frac{\partial u_y}{\partial y}\Delta y+\dots$$

2.6 Dehnungen

– Damit gilt für die Koordinaten im verformten Zustand:

$$x_{Q'} = x_{P'} + \Delta x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x , \quad y_{Q'} = y_{P'} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \Delta x$$

$$x_{R'} = x_{P'} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \Delta y , \quad y_{R'} = y_{P'} + \Delta y + \frac{\partial u_y}{\partial y} \Delta y$$

– Längenänderungen:

- Länge der Strecke *P'Q'*:

$$\overline{P'Q'} = \sqrt{\left(x_{Q'} - x_{P'}\right)^2 + \left(y_{Q'} - y_{P'}\right)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2} \Delta x$$

2.6 Dehnungen

- Für kleine Verformungen gilt: $\left|\frac{\partial u_y}{\partial x}\right| \ll 1$

- Damit folgt: $\overline{P'Q'} \approx \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \Delta x$

- Mit $\overline{PQ} = \Delta x$ gilt für die Dehnung: $\epsilon_x = \frac{\overline{P'Q'} - \overline{PQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$

- Entsprechend folgt: $\epsilon_y = \frac{\overline{P'R'} - \overline{PR}}{\overline{PR}} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$

2.6 Dehnungen

- Winkeländerung:
  - Die Änderung des Winkels *QPR* beträgt $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$
  - Für kleine Winkeländerungen gilt:

$$\alpha \approx \tan(\alpha) = \frac{x_{R'} - x_{P'}}{y_{R'} - y_{P'}} = \frac{\dfrac{\partial u_x}{\partial y}\Delta y}{\left(1 + \dfrac{\partial u_y}{\partial y}\right)\Delta y} \approx \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

$$\beta \approx \tan(\beta) = \frac{y_{Q'} - y_{P'}}{x_{Q'} - x_{P'}} = \frac{\dfrac{\partial u_y}{\partial x}\Delta x}{\left(1 + \dfrac{\partial u_x}{\partial x}\right)\Delta x} \approx \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

$$\rightarrow \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

2.6 Dehnungen

- Ergebnis:
  - Bei kleinen Deformationen gilt für die Dehnungen:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

  - Die Winkeländerung γ_{xy} wird als Gleitung oder Scherung bezeichnet.

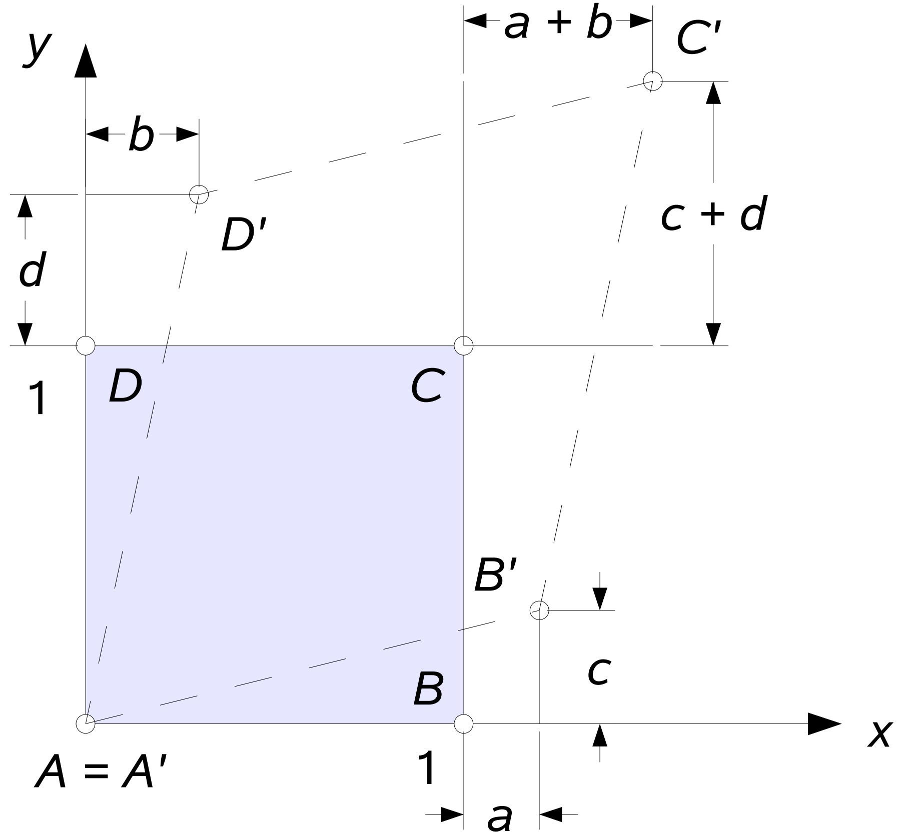
2.6 Dehnungen

- Beispiel:
  - Gegeben sind die Verschiebungen

$$u_x(x, y) = a\,x + b\,y$$
$$u_y(x, y) = c\,x + d\,y$$

  - Die Dehnungen berechnen sich zu

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = a\,, \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = d$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = b + c$$

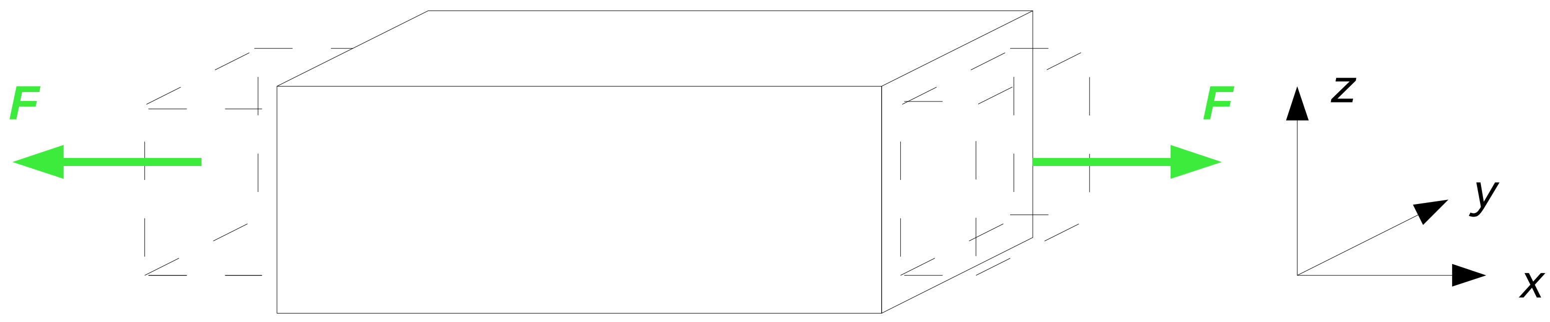


2.7 Elastizitätsgesetz

- Das Elastizitätsgesetz stellt eine Beziehung zwischen den Spannungen und den Dehnungen her.
- Im Folgenden wird ein homogener isotroper Körper betrachtet.
  - Homogen: Die Materialeigenschaften sind an jeder Stelle gleich.
  - Isotrop: Die Materialeigenschaften sind in allen Richtungen gleich.

2.7 Elastizitätsgesetz

- Lastfall 1: nur Normalspannung in *x*-Richtung



  - Der Stab verlängert sich in *x*-Richtung.
  - Zusätzlich tritt eine Querkontraktion in *y*- und *z*-Richtung auf.

2.7 Elastizitätsgesetz

- Bei linear-elastischem Material gilt für die Dehnungen:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \epsilon_y = -\nu \epsilon_x, \quad \epsilon_z = -\nu \epsilon_x$$

- Die Konstante ν heißt Querkonstraktionszahl oder Poisson-zahl.
- Es lässt sich zeigen:
  - Für ν = 0,5 bleibt das Volumen des Körpers konstant (z.B. bei Gummi).
  - Der Wert der Poissonzahl kann nicht größer als 0,5 sein.

2.7 Elastizitätsgesetz

– Typische Werte der Poissonzahl:

Material	Eisen	Stahl	Aluminium	Magnesium
Poissonzahl	0,21 – 0,26	0,27 – 0,30	0,33	0,35

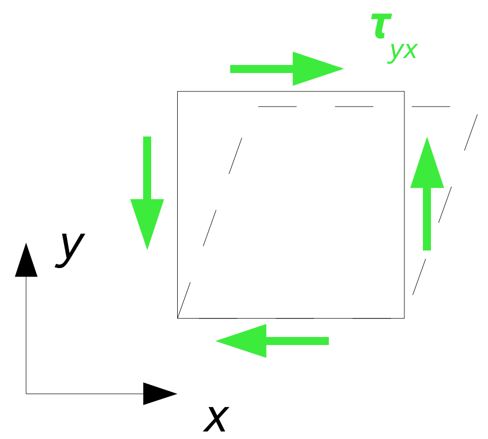
- Lastfall 2: Nur Normalspannung in *y*-Richtung
  - Ganz entsprechend gilt für die Dehnungen:

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}, \quad \epsilon_x = -\nu\,\epsilon_y, \quad \epsilon_z = -\nu\,\epsilon_y$$

- Lastfall 3: Reine Schubspannung
  - Bei linear-elastischem Material gilt für die Scherung:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

  - Die Materialkonstante *G* heißt Schubmodul.



2.7 Elastizitätsgesetz

- Hookesches Gesetz für den ebenen Spannungszustand:
  - Der allgemeine ebene Spannungszustand ist eine Überlagerung der drei betrachteten Lastfälle:

$$\boxed{\epsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\,\sigma_y\right),\quad \epsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\,\sigma_x\right),\quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}}$$

  - Dazu kommt die entkoppelte Gleichung für die Dehnung in *z*-Richtung:

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$

2.7 Elastizitätsgesetz

- Es lässt sich zeigen, dass

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

  gelten muss, damit das Materialgesetz richtungsunabhängig ist.

- Temperaturlast:
  - Für die Dehnungen infolge einer Temperaturänderung gilt:

$$\epsilon_x = \alpha_T \Delta T, \quad \epsilon_y = \alpha_T \Delta T$$

  - Bei einem isotropen Material führt eine Temperaturänderung zu keiner Gleitung.

2.7 Elastizitätsgesetz

- Ergebnis:
  - Dehnungs-Spannungs-Beziehungen:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\,\sigma_y\right) + \alpha_T\,\Delta T$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\,\sigma_x\right) + \alpha_T\,\Delta T$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

  - Spannungs-Dehnungs-Beziehungen:

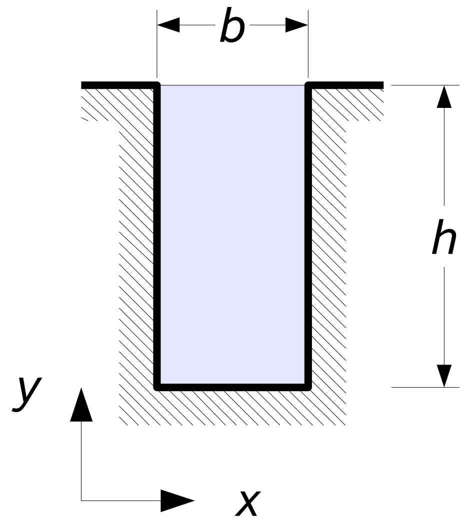
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\epsilon_x + \nu\,\epsilon_y - (1+\nu)\,\alpha_T\,\Delta T\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\epsilon_y + \nu\,\epsilon_x - (1+\nu)\,\alpha_T\,\Delta T\right)$$

$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}$$

2.7 Elastizitätsgesetz

- Beispiel:
  - Eine Stahlplatte sitzt passgenau in einem Hohlraum.
  - Sie kann an den Seiten reibungsfrei gleiten.
  - Die Stahlplatte wird gleichmäßig um ΔT erwärmt.
  - Gesucht:
    - Änderung der Höhe
    - Spannungen



2.7 Elastizitätsgesetz

- Aus dem Gleichgewicht in *y*-Richtung folgt: $\sigma_y = 0$
- In *x*-Richtung kann sich die Platte nicht ausdehnen: $\epsilon_x = 0$
- Damit lautet die 2. Gleichung der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen:

$$0 = \epsilon_y - (1+\nu)\alpha_T \Delta T \quad \rightarrow \quad \epsilon_y = (1+\nu)\alpha_T \Delta T$$

- Die Höhenänderung berechnet sich zu

$$\Delta h = \int_0^h \epsilon_y \, dy = h \epsilon_y = h(1+\nu)\alpha_T \Delta T$$

2.7 Elastizitätsgesetz

– Aus der 1. Gleichung der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen folgt:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu\epsilon_y - (1+\nu)\alpha_T \Delta T\right) = \frac{E}{1-\nu^2}(1+\nu)(\nu-1)\alpha_T \Delta T$$
$$= -E\alpha_T \Delta T$$

– Zahlenwerte:

- h = 200mm, ΔT = 100K
- E = 2,1·10⁵N/mm^2, ν = 0,3, α_T = 1,2·10⁻⁵K^{-1}
- Δh = 0,312mm, σ_x = -252N/mm^2 (Druckspannung)