2. Freie Schwingungen

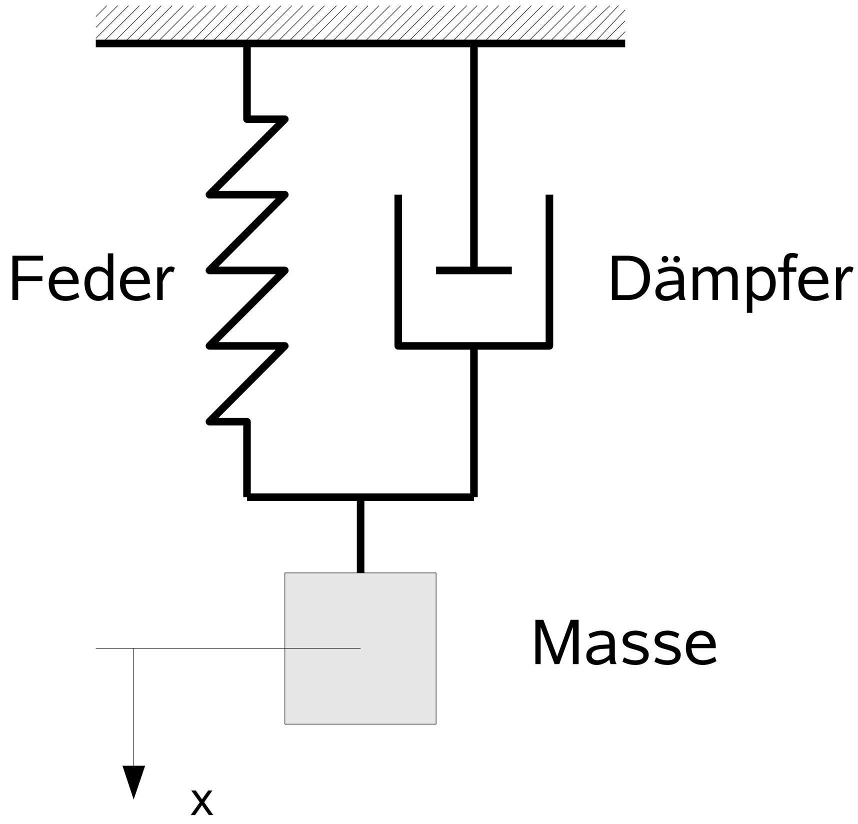
- Bei freien Schwingungen greifen keine zeitlich veränderlichen äußeren Kräfte am schwingenden System an.
- Das System wird nach einer anfänglichen Störung sich selbst überlassen.
- Die Störung kann in einer Anfangsauslenkung oder einer Anfangsgeschwindigkeit bestehen.

2. Freie Schwingungen

- Die einfachsten schwingungsfähigen Systeme sind lineare Systeme:
  - Die Rückstellkräfte sind proportional zur Auslenkung.
  - Die Dämpfungskräfte sind proportional zur Geschwindigkeit.
- Bei linearen Systemen gilt das Superpositionsprinzip:
  - Jede lineare Überlagerung von Schwingungen ist ebenfalls eine Schwingung.

2. Freie Schwingungen

- Grundmodell:
  - Das Grundmodell eines einfachen linearen schwingungsfähigen Systems besteht aus einer Masse, einer Feder und einem Dämpfer.



2. Freie Schwingungen

- Bewegungsgleichung:
  - Schwerpunktsatz:

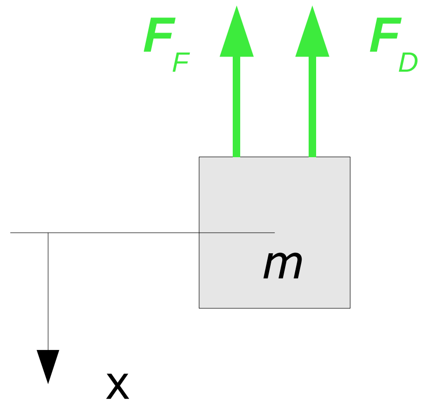
$$m a = -F_F - F_D$$

  - Mit $F_F = c\,x$

$$F_D = d\,\dot{x}$$

$$a = \ddot{x}$$

folgt: $$\boxed{m\,\ddot{x} + d\,\dot{x} + c\,x = 0}$$



- Federsteifigkeit *c*: N/m
- Dämpfungskonstante *d*:

$$\frac{N}{m/s} = \frac{kg}{s}$$

2. Freie Schwingungen

2.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

2.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Lösung der Bewegungsgleichung für das Grundmodell:
  - Für freie ungedämpfte Schwingungen lautet die Bewegungsgleichung: $m\ddot{x}+c\,x=0$
  - Division durch die Masse *m* führt auf die Standardform der Schwingungsgleichung:

$$\ddot{x}+\frac{c}{m}x=0$$

  - Die Lösung dieser Gleichung ist eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega=\sqrt{\frac{c}{m}}$$

2.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Die allgemeine Lösung lautet: $x(t) = x_a \sin(\omega t + \phi)$
- Die Amplitude x_a und die Phase ϕ werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x(0) = x_a \sin(\phi) \\ v_0 &= \dot{x}(0) = \omega x_a \cos(\phi) \end{aligned}\right. \quad \rightarrow \quad \tan(\phi) = \frac{\omega x_0}{v_0}, \quad x_a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

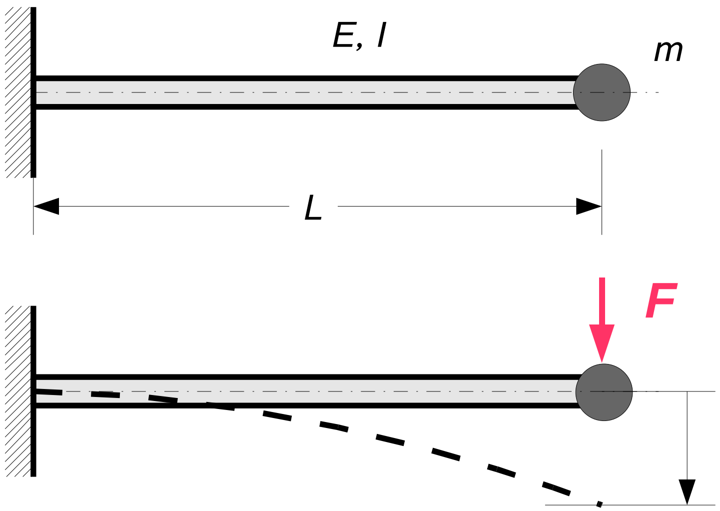
- Beispiele:

$$x_0 \neq 0, \quad v_0 = 0 \ : \ x_a = |x_0|, \quad \cot(\phi) = 0 \ \rightarrow \ \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$x_0 = 0, \quad v_0 \neq 0 \ : \ x_a = \left|\frac{v_0}{\omega}\right|, \quad \tan(\phi) = 0 \ \rightarrow \ \phi = 0$$

2.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Beispiel: Kragbalken mit Einzelmasse



– Um die Masse um die Strecke *w* zu verschieben, ist die Kraft

$$F = 3\frac{EI}{L^3}w$$

erforderlich (vgl. Festigkeitslehre).

– Für die Federkonstante *c* gilt also:

$$c = \frac{F}{w} = 3\frac{EI}{L^3}$$

2.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Damit folgt für die Kreisfrequenz:

$$\omega=\sqrt{\frac{c}{m}}=\sqrt{3\frac{EI}{mL^3}}$$

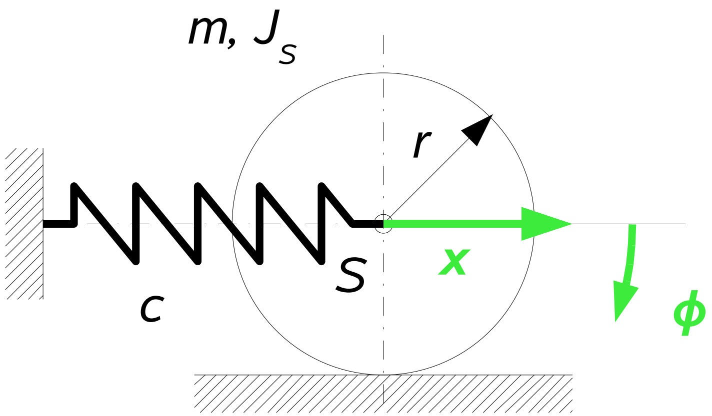
- Der Balken schwingt mit der Frequenz

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{3\frac{EI}{mL^3}}$$

und der Periode $$T=\frac{1}{f}=2\pi\sqrt{\frac{mL^3}{3EI}}$$

2.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Beispiel: Rollschwinger

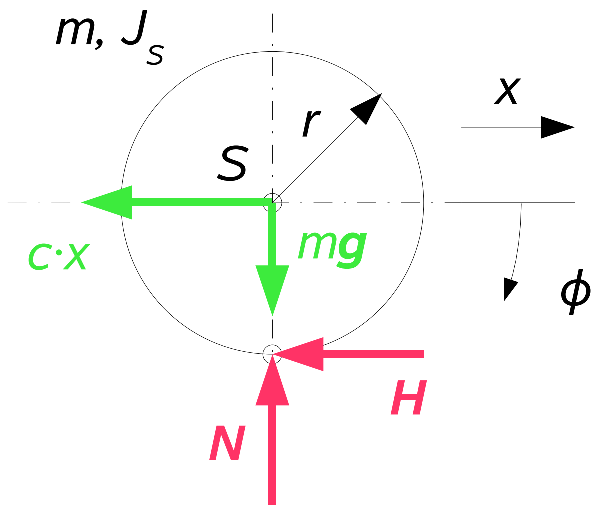


– Eine zylindrische Walze mit Masse *m* und Massenträgheitsmoment J_S bezüglich des Schwerpunktes wird durch eine im Schwerpunkt befestigte Feder der Steifigkeit *c* gehalten.

– Die Walze kann auf einer horizontalen Ebene rollen.

2.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

– Walze freigeschnitten:



– Rollbedingung:

$$x = r\,\phi \;\rightarrow\; \ddot{x} = r\,\ddot{\phi}$$

– Momentensatz bezüglich Schwerpunkt *S*:

$$J_S\,\ddot{\phi} = r\,H$$

– Schwerpunktsatz:

$$m\,\ddot{x} = -c\,x - H$$
$$\rightarrow\; H = -c\,r\,\phi - m\,r\,\ddot{\phi}$$

– Schwingungsgleichung:

$$\left(J_S + m\,r^2\right)\ddot{\phi} + c\,r^2\,\phi = 0$$

2.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

– Standardform der Schwingungsgleichung:

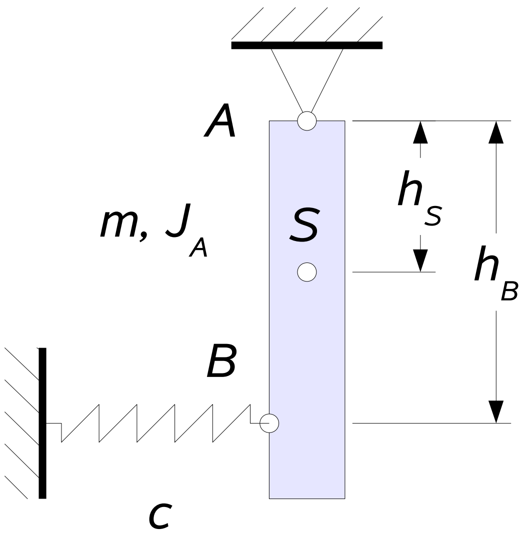
$$\ddot{\phi}+\frac{c\,r^2}{J_S+m\,r^2}\,\phi=0$$

– Daraus kann abgelesen werden:

$$\omega=\sqrt{\frac{c\,r^2}{J_S+m\,r^2}} \;\rightarrow\; f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c\,r^2}{J_S+m\,r^2}}$$

2.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Beispiel: Pendel mit Feder



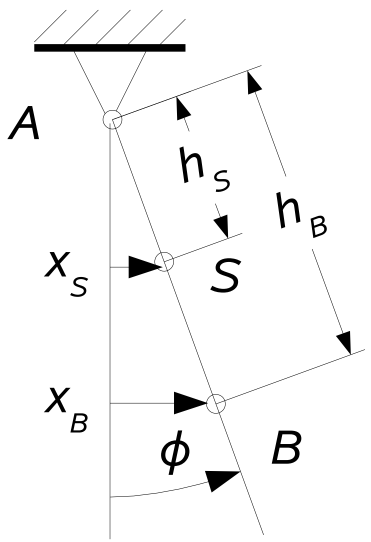
- Der Körper mit Masse *m* und Massenträgheitsmoment J_A ist im Punkt *A* gelenkig aufgehängt.
- Im Punkt *B* ist eine lineare Feder mit der Federkonstanten *c* befestigt.
- Gesucht ist die Frequenz für Schwingungen mit kleiner Amplitude.

2.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

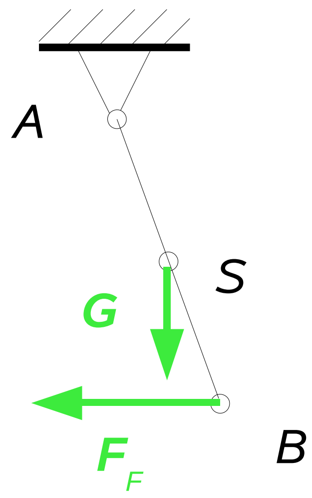
– Für kleine Winkel gilt:

$$x_S = h_S \sin\phi \approx h_S \phi$$

$$x_B = h_B \sin\phi \approx h_B \phi$$



– Kräfte am ausgelenkten Körper:



$$G = m\, g$$

$$F_F = c\, x_B = c\, h_B \phi$$

2.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Momentensatz bezüglich *A*: $J_A \ddot{\phi} = -h_B \cos(\phi) F_F - x_S G$
- Mit $\cos(\phi) \approx \phi$ und den Beziehungen für x_S und die Kräfte folgt:

$$J_A \ddot{\phi} + \left(c\, h_B^2 + h_S m\, g \right) \phi = 0$$

- Standardform der Schwingungsgleichung:

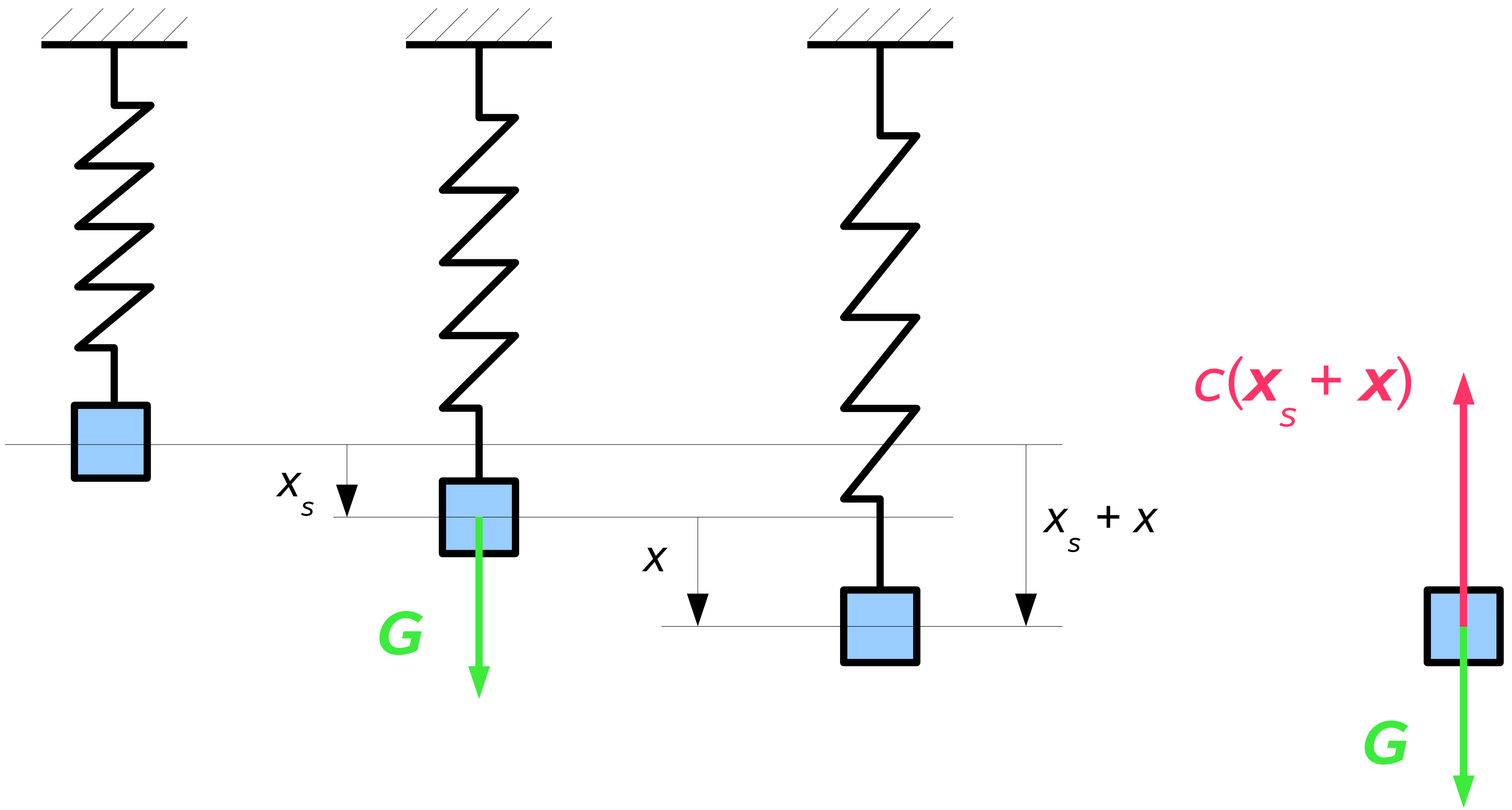
$$\ddot{\phi} + \frac{h_S m\, g + c\, h_B^2}{J_A} \phi = 0$$

- Daraus kann abgelesen werden:

$$\omega = \sqrt{\frac{h_s m\, g + c\, h_B^2}{J_A}} \quad \rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{h_s m\, g + c\, h_B^2}{J_A}}$$

2.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

- Statische Vorlast:



2.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

– Statische Ruhelage:

$$c\,x_s = G$$

– Schwerpunktsatz:

$$m\,\ddot{x} = G - c\,(x_s + x)$$

$$\rightarrow \quad m\,\ddot{x} + c\,x = 0$$

– Eine Schwingung erfolgt immer um die statische Ruhelage.

– Vorspannkraft und statische Last sind im Gleichgewicht.

– Bei linearen Systemen muss die statische Last nicht berücksichtigt werden, wenn die Auslenkung von der statischen Ruhelage aus gemessen wird.

2.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

– Die Frequenz kann aus der statischen Auslenkung berechnet werden:

- Gewichtskraft: $G = m\,g$
- Statische Ruhelage: $c\,x_s = m\,g \rightarrow \dfrac{c}{m} = \dfrac{g}{x_s}$
- Frequenz:

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x_s}}}$$

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

- Bei realen Systemen werden die Schwingungsausschläge mit der Zeit kleiner, und die Schwingung kommt zum Stillstand.
- Ursache sind Energieverluste durch Reibungs- und Dämpfungskräfte:
  - Lagerreibung
  - Luftwiderstand
  - innere Reibung des Werkstoffs

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

- Dämpfungskräfte sind stets der Bewegungsrichtung entgegengesetzt.
- Die genaue Beschreibung aller dämpfenden Einflüsse ist aufwändig.
- Das einfachste Dämpfungsmodell ist das Modell einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung:

$$F_D = d\,v = d\,\dot{x}$$

- Dämpferkonstante *d*:
  - Einheit Kraft/Geschwindigkeit: 1*Ns/m* = 1*kg/s*

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

- Lösung der Bewegungsgleichung:
  - Aus
    $$m\ddot{x}+d\dot{x}+cx=0$$
    folgt nach Division durch *m* die Standardform
    $$\boxed{\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega^2 x=0}$$
  - Dabei wurde die Abklingkonstante $\delta=\dfrac{d}{2m}$

    eingeführt.
  - Die Dimension der Abklingkonstante ist $\dfrac{kg}{s\cdot kg}=\dfrac{1}{s}$.

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

- Einsetzen des Lösungsansatzes

$$x(t) = A e^{\lambda t}, \quad \dot{x}(t) = \lambda A e^{\lambda t}, \quad \ddot{x}(t) = \lambda^2 A e^{\lambda t}$$

- führt auf $\left(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2\right) A e^{\lambda t} = 0$.
- Nichttriviale Lösungen mit $A \neq 0$ existieren nur, wenn die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$$

erfüllt ist.

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

– Die charakteristische Gleichung hat die beiden Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2} = -\delta \pm \sqrt{\omega^2 \left(\frac{\delta^2}{\omega^2} - 1 \right)}$$

– Mit dem Lehrschen Dämpfungsmaß

$$D = \frac{\delta}{\omega}$$

folgt:

$$\boxed{\lambda_{1/2} = -\delta \pm \omega \sqrt{D^2 - 1}}$$

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

- Dämpfungsfälle:
  - Starke Dämpfung:
    - $D > 1$: 2 reelle Lösungen
  - Kritische Dämpfung:
    - $D = 1$: 1 reelle Lösung
  - Schwache Dämpfung:
    - $D < 1$: 2 komplexe Lösungen

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

- Starke Dämpfung:
  - Es gibt 2 reelle Lösungen $\lambda_{1/2} = -\delta \pm \mu$

    mit $\mu = \omega\sqrt{D^2 - 1} = \sqrt{\delta^2 - \omega^2} < \delta$.
  - Die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung ist

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\delta t}\left(A_1 e^{\mu t} + A_2 e^{-\mu t}\right)$$

  - Das ist eine exponentiell abklingende Funktion.
  - Für die Geschwindigkeit folgt:

$$\dot{x}(t) = -\delta\, e^{-\delta t}\left(A_1 e^{\mu t} + A_2 e^{-\mu t}\right) + e^{-\delta t}\mu\left(A_1 e^{\mu t} - A_2 e^{-\mu t}\right)$$

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

– Die Konstanten A_1 und A_2 können aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden:

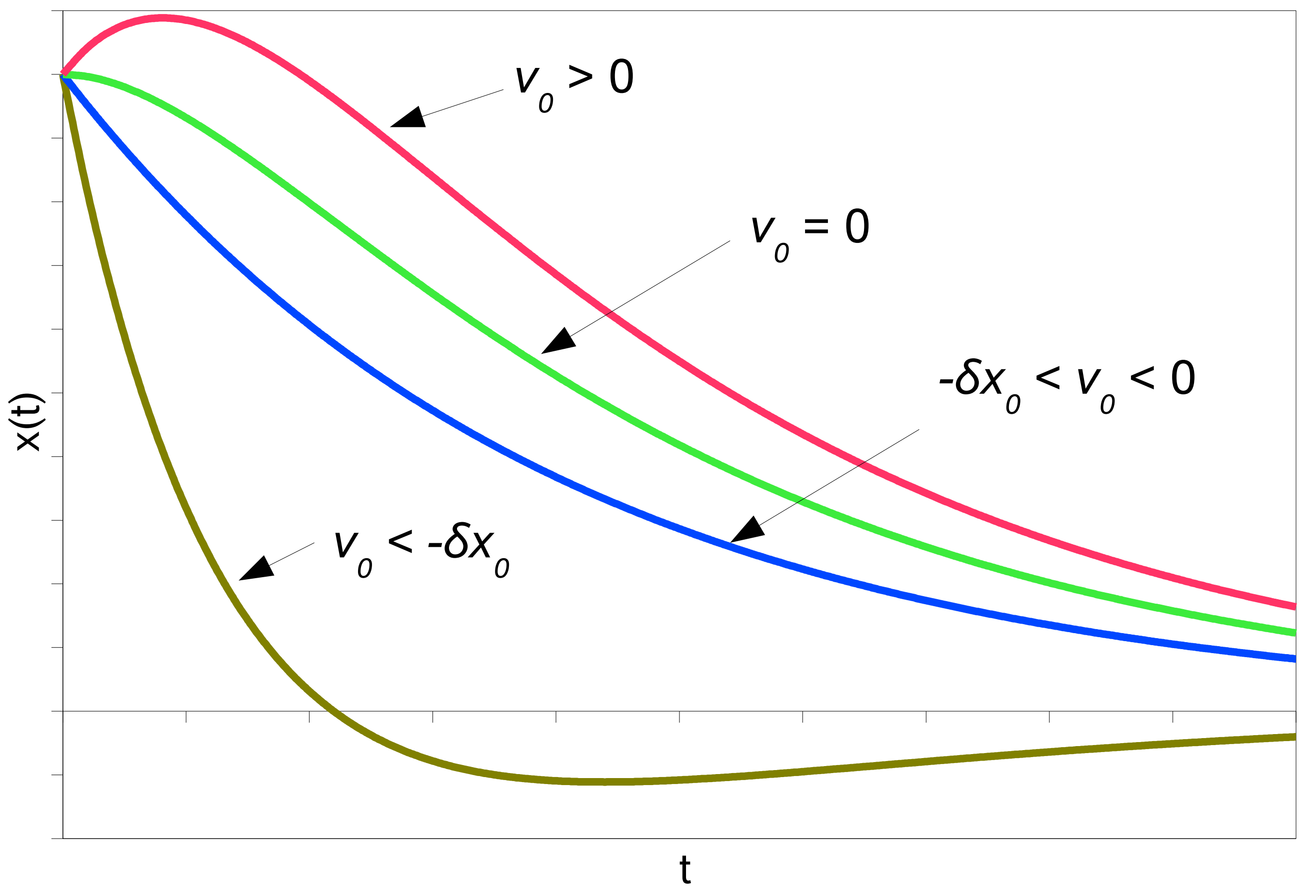
- Verschiebung: $x_0 = x(0) = A_1 + A_2$
- Geschwindigkeit: $v_0 = \dot{x}(0) = -\delta(A_1 + A_2) + \mu(A_1 - A_2)$
  $= -(\delta - \mu) A_1 - (\delta + \mu) A_2$

$$
\begin{array}{ccccccc|c|c}
A_1 & + & A_2 & = & x_0 & \cdot(\delta+\mu) & \cdot(\delta-\mu) \\
-(\delta-\mu) A_1 & - & (\delta+\mu) A_2 & = & v_0 & \cdot 1 & \cdot 1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$(\delta + \mu - \delta + \mu) A_1 = (\delta + \mu) x_0 + v_0 \;\rightarrow\; \underline{A_1 = \frac{(\delta + \mu) x_0 + v_0}{2\mu}}$$

$$(\delta - \mu - \delta - \mu) A_2 = (\delta - \mu) x_0 + v_0 \;\rightarrow\; \underline{A_2 = -\frac{(\delta - \mu) x_0 + v_0}{2\mu}}$$

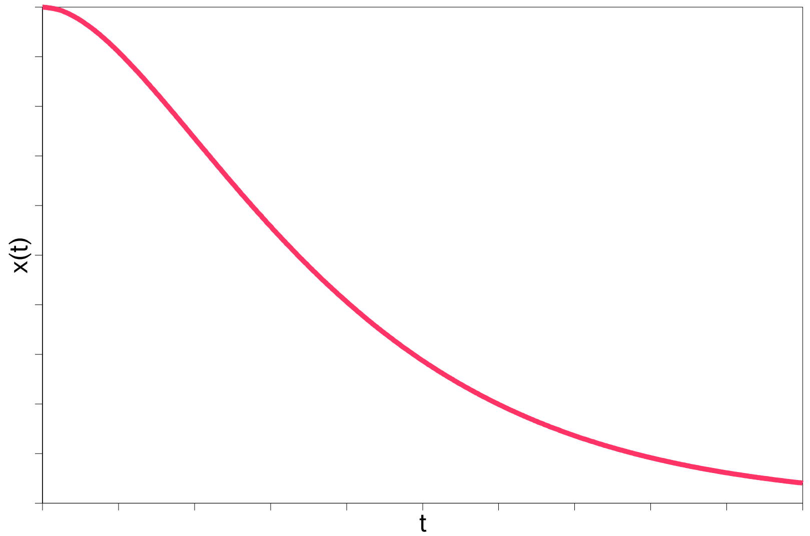
2.2 Freie gedämpfte Schwingungen



2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

- Kritische Dämpfung:
  - Es gibt nur eine reelle Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$
  - Die allgemeine Lösung lautet: $x(t) = \left(A_1 + A_2 t\right) e^{-\delta t}$
  - Die Konstanten A_1 und A_2 können wieder aus den Anfangs-bedingungen bestimmt werden.
  - Dieser Fall wird auch als aperiodischer Grenzfall bezeich-net.

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen



- Der Ausschlag geht schneller gegen Null als bei starker Dämpfung.
- Technische Anwendung findet der Grenzfall z.B. bei der Auslegung von Messgeräten.

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

- Schwache Dämpfung:
  - Es gibt 2 komplexe Lösungen $\lambda_{1/2} = -\delta \pm i\,\omega_d$

    mit $\omega_d = \omega\sqrt{1-D^2}$.
  - Die allgemeine Lösung lautet

    $$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\delta t}\left(A_1 e^{i\,\omega_d t} + A_2 e^{-i\,\omega_d t}\right)$$

    mit zwei komplexen Konstanten

    $$A_1 = a_1 + i\,b_1,\quad A_2 = a_2 + i\,b_2$$

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

- Mit den Eulerschen Formeln

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x\,, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

folgt:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\delta t}\Big[(a_1 + i\,b_1)\big(\cos(\omega_d t) + i \sin(\omega_d t)\big) \\ &\quad + (a_2 + i\,b_2)\big(\cos(\omega_d t) - i \sin(\omega_d t)\big)\Big] \\ &= e^{-\delta t}\Big[(a_1 + a_2)\cos(\omega_d t) - (b_1 - b_2)\sin(\omega_d t) \\ &\quad + i\big((b_1 + b_2)\cos(\omega_d t) + (a_1 - a_2)\sin(\omega_d t)\big)\Big] \end{aligned}$$

- Die Lösung ist reell für

$$a_1 = a_2 = \frac{C_1}{2}, \quad b_1 = -b_2 = -\frac{C_2}{2}$$

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

– Damit lautet die allgemeine Lösung:

$$x(t)=e^{-\delta t}\left(C_1\cos(\omega_d t)+C_2\sin(\omega_d t)\right)$$

– Für die Geschwindigkeit folgt:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=-\delta e^{-\delta t}\left(C_1\cos(\omega_d t)+C_2\sin(\omega_d t)\right)\\&\quad+e^{-\delta t}\omega_d\left(-C_1\sin(\omega_d t)+C_2\cos(\omega_d t)\right)\\&=e^{-\delta t}\left[(\omega_d C_2-\delta C_1)\cos(\omega_d t)-(\omega_d C_1+\delta C_2)\sin(\omega_d t)\right]\end{aligned}$$

– Die Konstanten können aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden:

$$x_0=x(0)=C_1 \quad\rightarrow\quad C_1=x_0$$

$$v_0=\dot{x}(0)=\omega_d C_2-\delta C_1 \quad\rightarrow\quad C_2=\frac{v_0+\delta x_0}{\omega_d}$$

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

- Ergebnis:

$$\boxed{x(t) = e^{-\delta t}\left[x_0 \cos(\omega_d t) + \left(\frac{v_0 + \delta x_0}{\omega_d}\right)\sin(\omega_d t)\right]}$$

- Wie im ungedämpften Fall lässt sich die Lösung auch in der Form

$$x(t) = C\,e^{-\delta t}\sin\left(\omega_d t + \phi\right)$$

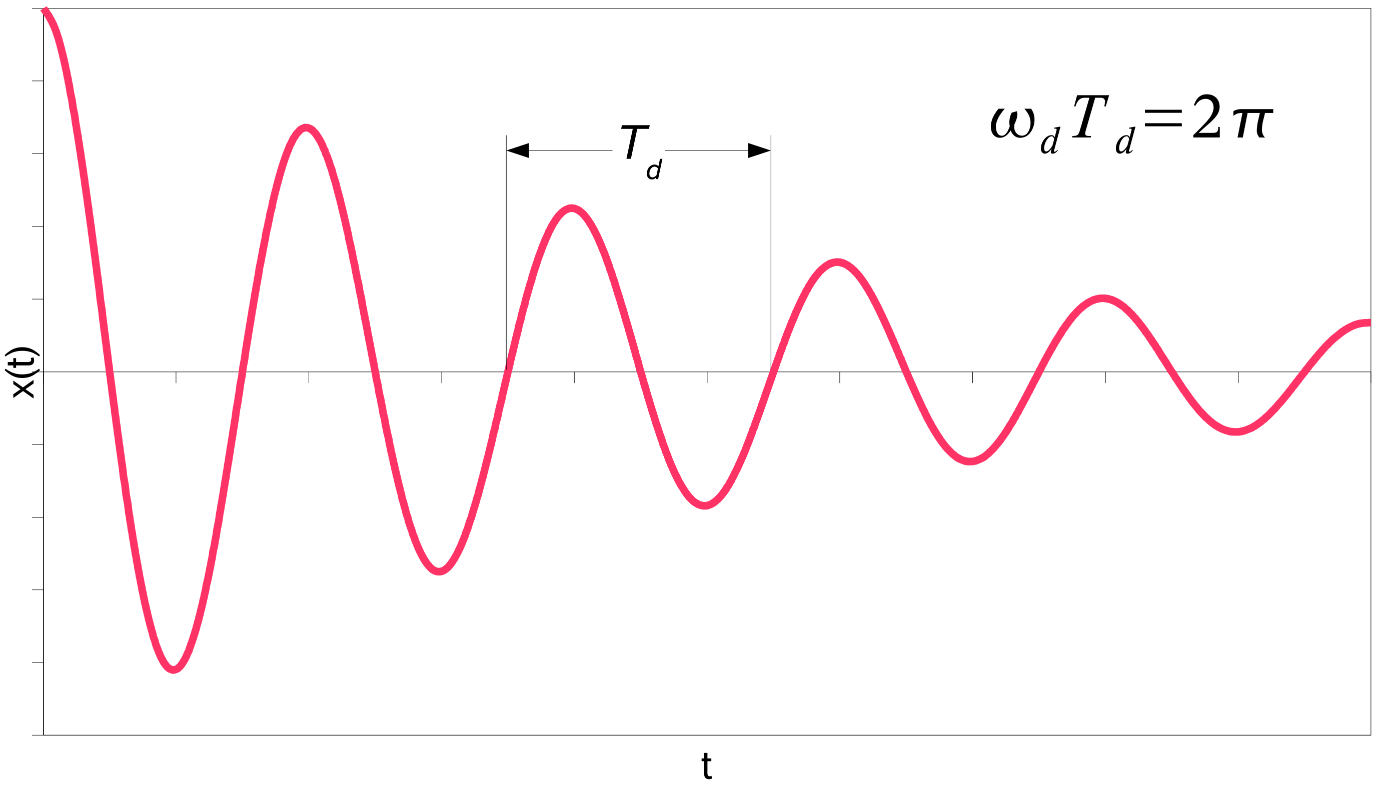
schreiben.

- Dabei gilt:

$$C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \delta x_0}{\omega_d}\right)^2}\,,\quad \tan\phi = \frac{\omega_d x_0}{v_0 + \delta x_0}$$

$$x_0 = C\sin\phi\,,\quad \frac{v_0 + \delta x_0}{\omega_d} = C\cos\phi$$

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen



2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

- Es liegt eine exponentiell abklingende Schwingung vor.
- Die Frequenz f_d der gedämpften Schwingung ist kleiner als die Frequenz f der ungedämpften Schwingung:

$$\frac{f_d}{f} = \frac{\omega_d}{\omega} = \sqrt{1 - D^2}$$

- Bei vielen praktischen Anwendungen ist $D < 5\%$.
- Für $D = 5\%$ gilt:

$$\frac{f_d}{f} = \sqrt{1 - 0{,}05^2} = 0{,}9987$$

- Die Abweichung von der ungedämpften Frequenz beträgt also etwa 0,1%.

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

– Logarithmisches Dekrement:

- Für das Verhältnis von 2 Ausschlägen im Abstand einer Periode T_d gilt:

$$\frac{x(t)}{x(t+T_d)}=\frac{C\,e^{-\delta t}\sin(\omega_d t+\phi)}{C\,e^{-\delta(t+T_d)}\sin\left(\omega_d(t+T_d)+\phi\right)}=e^{\delta T_d}$$

- Das logarithmische Dekrement ist definiert durch

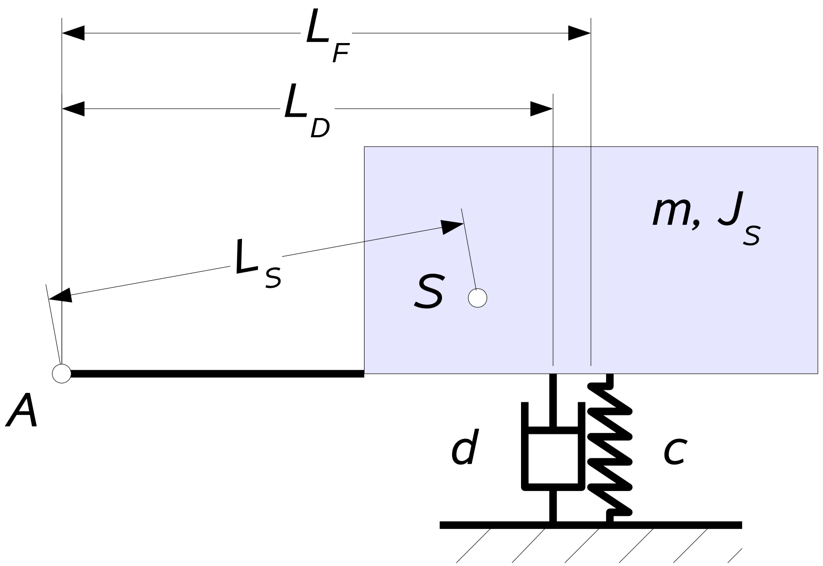
$$\Lambda=\ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T_d)}\right)=\delta\,T_d=\delta\,\frac{2\pi}{\omega_d}=2\pi\,\frac{D}{\sqrt{1-D^2}}$$

- Für sehr schwache Dämpfung (D < 10%) gilt die Näherung

$$\sqrt{1-D^2}\approx 1 \;\rightarrow\; \Lambda\approx 2\pi\,D$$

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

- Beispiel: Einachsiger Anhänger



– Das Berechnungsmodell des Anhängers besteht aus einem starren Körper mit Masse m und Massenträgheitsmoment J_S um den Schwerpunkt.

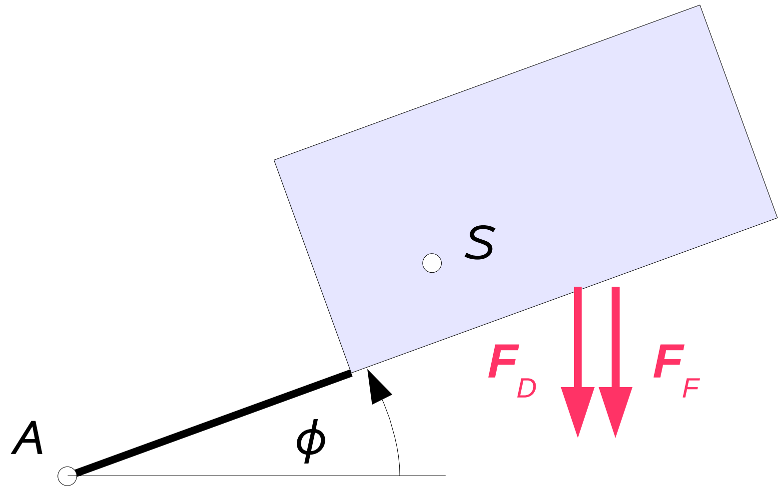
– Das Fahrwerk wird durch eine Feder und einen Dämpfer beschrieben.

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

– Gesucht:

- Frequenz *f* der ungedämpften Schwingung
- Wert der Dämpferkonstanten *d*, damit eine Anfangsauslenkung ϕ_0 nach zwei vollen Schwingungen auf $\phi_0/50$ abklingt
- Die Auslenkungen können als klein angenommen werden.

– Anhänger freigeschnitten:



2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

– Momentensatz bezüglich *A*: $\left(J_S + m L_S^2\right)\ddot{\phi} = -L_F F_F - L_D F_D$

– Kräfte: $F_F = c L_F \sin\phi \approx c L_F \phi$

$$F_D = d L_D \cos(\phi)\dot{\phi} \approx d L_D \dot{\phi}$$

– Schwingungsgleichung: $\left(J_S + m L_S^2\right)\ddot{\phi} + d L_D^2 \dot{\phi} + c L_F^2 \phi = 0$

– Standardform:

$$\ddot{\phi} + \frac{d L_D^2}{J_S + m L_S^2}\dot{\phi} + \frac{c L_F^2}{J_S + m L_S^2}\phi = 0$$

– Frequenz der ungedämpften Schwingung:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c L_F^2}{J_S + m L_S^2}}$$

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

– Ausschlag nach 2 vollen Schwingungen:

$$\phi(2T_d) = C e^{-2\delta T_d} \sin(2\omega_d T_d + \alpha) = C e^{-2\delta T_d} \sin(4\pi + \alpha)$$
$$= e^{-2\delta T_d} \phi_0 = \phi_0 / 50$$

$$\rightarrow \quad e^{2\delta T_d} = 50 \quad \rightarrow \quad 2\delta T_d = \ln(50)$$

– Mit $\delta T_d = 2\pi \dfrac{D}{\sqrt{1-D^2}}$ folgt:

$$\ln(50) = 4\pi \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \quad \rightarrow \quad \ln^2(50)\left(1-D^2\right) = 16\pi^2 D^2$$

$$\ln^2(50) = \left(16\pi^2 + \ln^2(50)\right) D^2 \quad \rightarrow \quad D = 0{,}2972$$

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

- Mit $D = \delta / \omega$ folgt:

$$2\omega D = 2\delta = \frac{d\,L_D^2}{J_S + m\,L_S^2} \quad \rightarrow \quad d = \frac{2\omega D}{L_D^2}\left(J_S + m\,L_S^2\right)$$

- Ergebnis:

$$d = \frac{2D}{L_D^2}\sqrt{c\,L_F^2\left(J_S + m\,L_S^2\right)} = \frac{0{,}5944}{L_D^2}\sqrt{c\,L_F^2\left(J_S + m\,L_S^2\right)}$$