1.2 Stochastische Lasten

Lösungen

Aufgabe 1

Aus der Definition des Erwartungswerts folgt durch elementare Rechnung:

$$\begin{aligned} E[a\,g(x)+b\,h(y)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\big(a\,g(x)+b\,h(y)\big)\,dy\right)dx \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,g(x)\,dy\right)dx + b\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,h(y)\,dx\right)dy \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy\right)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dx\right)dy \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,p_x(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\,p_y(y)\,dy \\ &= a\,E[g(x)] + b\,E[h(y)] \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Mittelwert

Mit dem Ergebnis von Aufgabe 1 gilt:

$$E[x-\mu_x]=E[x]-E[\mu_x]=\mu_x-\mu_x=0$$

Dabei wurde benutzt, dass μ_x keine Zufallsvariable ist, so dass gilt:

$$E[\mu_x]=\int_{-\infty}^{\infty}\mu_x\,p(x)\,dx=\mu_x\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\,dx=\mu_x$$

b) Quadratischer Mittelwert

Aus der Definition der Varianz folgt:

$$\sigma_x^2=E[(x-\mu_x)^2]=E[x^2-2\,\mu_x\,x+\mu_x^2]=E[x^2]-2\,\mu_x\,E[x]+\mu_x^2=E[x^2]-\mu_x^2$$

Umstellen ergibt:

$$E[x^2]=\sigma_x^2+\mu_x^2$$

Aufgabe 3

Da die Zufallsvariablen stochastisch unabhängig sind, gilt:

$$p(x,y)=p_x(x)p_y(y)$$

Damit berechnet sich der Erwartungswert zu

$$\begin{aligned}E[g(x)h(y)]&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}p_x(x)p_y(y)g(x)h(y)\,dy\right)dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}p_x(x)g(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty}p_y(y)h(y)\,dy\right)dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}p_x(x)g(x)\,dx\int_{-\infty}^{\infty}p_y(y)h(y)\,dy=E[g(x)]E[h(y)]\quad .\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) <u>Mittelwert und Standardabweichung</u>

Für den Mittelwert folgt sofort: $\mu_y=E[a\,x(k)+b]=a\mu_x+b$

Die Varianz berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\sigma_y^2&=E[(a\,x(k)+b-\mu_y)^2]=E[(a\,x(k)+b-a\mu_x-b)^2]\\&=E[a^2(x(k)-\mu_x)^2]=a^2\sigma_x^2.\end{aligned}$$

Daraus folgt: $\sigma_y=|a|\sigma_x$

b) <u>Kovarianz und Korrelationskoeffizient</u>

Für die Kovarianz gilt:

$$\begin{aligned}C_{xy}&=E[(x(k)-\mu_x)(y(k)-\mu_y)]=E[(x(k)-\mu_x)(a\,x(k)+b-a\mu_x-b)]\\&=a\,E[(x(k)-\mu_x)^2]=a\sigma_x^2\end{aligned}$$

Daraus folgt für den Korrelationskoeffizienten:

$$\rho_{xy}=\frac{C_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{a\sigma_x^2}{|a|\sigma_x^2}=\operatorname{sgn}(a)$$

Ein Korrelationskoeffizient von 1 oder -1 zeigt also an, dass zwischen den beiden Zufallsvariablen eine lineare Abhängigkeit besteht.

Aufgabe 5

Bestimmung der Parameter

Für den quadratischen Fehler gilt:

$$e^2(x,y)=\left(a\,x(k)+b-y(k)\right)^2$$
$$=a^2x^2(k)+b^2+y^2(k)+2\,a\,b\,x(k)-2\,a\,x(k)\,y(k)-2\,b\,y(k)$$

Der Erwartungswert berechnet sich zu

$$E[e^2]=a^2\psi_x^2+b^2+\psi_y^2+2\,a\,b\,\mu_x-2\,a\,E[x\,y]-2\,b\,\mu_y \quad .$$

Für ein Minimum muss gelten:

$$\frac{\partial}{\partial a}E[e^2]=0 \quad : \qquad 2\,a\,\psi_x^2+2\,b\,\mu_x=2\,E[x\,y]=2\left(C_{xy}+\mu_x\mu_y\right)$$

$$\rightarrow \quad a\,\psi_x^2+b\,\mu_x=C_{xy}+\mu_x\mu_y \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial b}E[e^2]=0 \quad : \qquad 2\,b+2\,a\,\mu_x=2\,\mu_y$$

$$\rightarrow \quad a\,\mu_x+b=\mu_y \qquad (2)$$

Subtraktion der mit μ_x multiplizierten Gleichung (2) von Gleichung (1) ergibt

$$a\left(\psi_x^2-\mu_x^2\right)=C_{xy} \quad .$$

Mit $\psi_x^2-\mu_x^2=\sigma_x^2$ folgt: $a=\dfrac{C_{xy}}{\sigma_x^2}$

Aus (2) folgt: $b=\mu_y-a\,\mu_x=\mu_y-\dfrac{C_{xy}}{\sigma_x^2}\mu_x$

Berechnung des Minimums

Mit $b=\mu_y-a\,\mu_x$ gilt zunächst:

$$e_{min}^2=\min_{a,b}E[e^2]=a^2\psi_x^2+\left(\mu_y-a\,\mu_x\right)^2+\psi_y^2$$
$$+2\,a\left(\mu_y-a\,\mu_x\right)\mu_x-2\,a\left(C_{xy}+\mu_x\mu_y\right)-2\left(\mu_y-a\,\mu_x\right)\mu_y$$
$$=a^2\left(\psi_x^2-\mu_x^2\right)+\psi_y^2-\mu_y^2-2\,a\,C_{xy}$$
$$=a^2\sigma_x^2+\sigma_y^2-2\,a\,C_{xy}$$

Einsetzen für a ergibt:

$$e_{min}^2=\frac{C_{xy}^2}{\sigma_x^2}+\sigma_y^2-2\frac{C_{xy}^2}{\sigma_x^2}=\sigma_y^2\left(1-\frac{C_{xy}}{\sigma_x^2\sigma_y^2}\right)=\sigma_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)$$

Daraus folgt: $\frac{e_{min}}{\sigma_y}=\sqrt{1-\rho_{xy}^2}$

Der Fehler ist null für $\rho_{xy}=\pm 1$.

Aufgabe 6

Für den Erwartungswert des Stichprobenmittelwerts gilt:

$$E[\bar{x}]=E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E[x_i]=\frac{1}{N}(N\mu_x)=\mu_x$$

Für den Erwartungswert der Stichprobenvarianz gilt zunächst:

$$E[s^2]=E\left[\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2\right]=\frac{1}{N-1}E\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2\right]$$

Die Summe berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2&=\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_x+\mu_x-\bar{x})^2\\&=\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_x)^2-2\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_x)(\bar{x}-\mu_x)+\sum_{i=1}^{N}(\mu_x-\bar{x})^2\\&=\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_x)^2-2N(\bar{x}-\mu_x)^2+N(\bar{x}-\mu_x)^2\\&=\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_x)^2-N(\bar{x}-\mu_x)^2\quad .\end{aligned}$$

Mit

$$E[(x_i-\mu_x)^2]=\sigma_x^2$$

und

$$(\bar{x}-\mu_x)^2=\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i-\mu_x\right)^2=\frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_x)\right)^2$$

folgt:

$$E[s^2]=\frac{N}{N-1}\sigma_x^2-\frac{1}{N(N-1)}E\left[\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_x)\right)^2\right]$$

Für das Quadrat der verbleibenden Summe gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_x)\right)^2=\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_x)^2+2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}(x_i-\mu_x)(x_j-\mu_x)$$
$$=\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_x)^2+2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}\left(x_i x_j-\mu_x x_j-x_i\mu_x+\mu_x^2\right)$$

Für den Erwartungswert folgt:

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_x)\right)^2\right]=N\sigma_x^2+2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}\left(E[x_i x_j]-\mu_x\left(E[x_i]+E[x_j]\right)+\mu_x^2\right)$$

Da die einzelnen Messungen stochastisch unabhängig sind, gilt

$$E[x_i x_j]=\mu_x^2 .$$

Mit $E[x_i]=E[x_j]=\mu_x$ folgt: $E[x_i x_j]-\mu_x\left(E[x_i]+E[x_j]\right)+\mu_x^2=\mu_x^2-2\mu_x^2+\mu_x^2=0$

Damit ist gezeigt: $E[s^2]=\dfrac{N}{N-1}\sigma_x^2-\dfrac{1}{N-1}\sigma_x^2=\sigma_x^2$

Aufgabe 7

Aus der Definition der Kreuzkorrelation folgt:

$$R_{xy}(-\tau)=E[x_k(t-\tau)\,y_k(t)]$$

Da die Kreuzkorrelation nicht von der Zeit t abhängt, ändert sich ihr Wert nicht, wenn t durch $t+\tau$ ersetzt wird:

$$R_{xy}(-\tau)=E[x_k(t+\tau-\tau)\,y_k(t+\tau)]=E[y_k(t+\tau)\,x_k(t)]=R_{yx}(\tau)$$

Für $y_k = x_k$ folgt daraus: $R_{xx}(-\tau)=R_{xx}(\tau)$

Aufgabe 8

Aus der Definition der Kreuzkorrelation folgt:

$$R_{xy}(\tau)=E\left[x_0\sin\left(2\pi f(t+\tau)+\phi(k)\right)y_0\sin\left(2\pi ft+\psi(k)\right)\right]$$
$$=x_0 y_0 E\left[\sin\left(2\pi f(t+\tau)+\phi(k)\right)\sin\left(2\pi ft+\psi(k)\right)\right]$$

Da die Phasenwinkel stochastisch unabhängige Variablen sind, folgt

$$R_{xy}(\tau)=x_0 y_0 E\left[\sin\left(2\pi f(t+\tau)+\phi(k)\right)\right]E\left[\sin\left(2\pi ft+\psi(k)\right)\right]=0 ,$$

da die beiden Erwartungswerte null sind.

Aufgabe 9

a) Zeitlicher Mittelwert des Produkts

Der zeitliche Mittelwert des Produkts ist definiert durch

$$\langle x_k(t)\, y_k(t)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x_k(t)\, y_k(t)\, dt \; .$$

Für die beiden Realisierungen

$$x_k(t) = x_0 \sin(2\pi f_x t + \phi_{xk}) \quad \text{und} \quad y_k(t) = y_0 \sin(2\pi f_y t + \phi_{yk})$$

berechnet sich der Integrand zu

$$\begin{aligned} x_k(t)\, y_k(t) &= x_0\, y_0 \sin(2\pi f_x t + \phi_{xk}) \sin(2\pi f_y t + \phi_{yk}) \\ &= \frac{1}{2} x_0\, y_0 \left[\cos\left(2\pi (f_x - f_y) t + \phi_{xk} - \phi_{yk}\right) - \cos\left(2\pi (f_x + f_y) t + \phi_{xk} + \phi_{yk}\right)\right] \; . \end{aligned}$$

Integration ergibt:

$$\begin{aligned} &\int_0^T x_k(t)\, y_k(t)\, dt \\ &= \frac{x_0\, y_0}{4\pi}\left(\left[\frac{\sin\left(2\pi (f_x - f_y) t + \phi_{xk} - \phi_{yk}\right)}{f_x - f_y}\right]_{t=0}^{t=T} - \left[\frac{\sin\left(2\pi (f_x + f_y) t + \phi_{xk} + \phi_{yk}\right)}{f_x + f_y}\right]_{t=0}^{t=T} \right) \\ &= \frac{x_0\, y_0}{4\pi} \frac{\sin\left(2\pi (f_x - f_y) T + \phi_{xk} - \phi_{yk}\right) - \sin(\phi_{xk} - \phi_{yk})}{f_x - f_y} \\ &\quad - \frac{x_0\, y_0}{4\pi} \frac{\sin\left(2\pi (f_x + f_y) T + \phi_{xk} + \phi_{yk}\right) - \sin(\phi_{xk} + \phi_{yk})}{f_x + f_y} \end{aligned}$$

Da dieser Ausdruck für alle Werte von T endlich ist, folgt für den Grenzwert:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x_k(t)\, y_k(t)\, dt = 0$$

b) Zeitlicher quadratischer Mittelwert

Der zeitliche quadratische Mittelwert ist definiert durch

$$\langle x_k^2(t)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x_k^2(t)\, dt \quad .$$

Für die Realisierung $x_k(t) = x_0 \sin(2\pi f_x t + \phi_{xk})$ berechnet sich das Integral zu

$$\begin{aligned}\int_0^T x_k^2(t)\,dt &= x_0^2 \int_0^T \sin^2(2\pi f_x t + \phi_{xk})\,dt \\ &= x_0^2 \left[\frac{1}{2}\left(t + \frac{\phi_{xk}}{2\pi f_x} \right) - \frac{\sin(2(2\pi f_x t + \phi_{xk}))}{8\pi f_x} \right]_{t=0}^{t=T} \\ &= x_0^2 \left(\frac{1}{2} T - \frac{\sin(2(2\pi f_x T + \phi_{xk})) - \sin(2\phi_{xk})}{8\pi f_x} \right).\end{aligned}$$

Für den Grenzwert folgt:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k^2(t)\,dt = \frac{x_0^2}{2}$$

Aufgabe 10

Für die über den zeitlichen Mittelwert berechnete Autokorrelation gilt:

$$\begin{aligned}\langle x_k(t+\tau)\, x_k(t) \rangle &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} x_0^2(k) \int_0^T \sin(2\pi f(t+\tau)) \sin(2\pi f t)\,dt \\ &= x_0^2(k) \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\pi f(t+\tau)) \sin(2\pi f t)\,dt\end{aligned}$$

Mit $\sin(2\pi f(t+\tau)) = \sin(2\pi f t)\cos(2\pi f \tau) + \cos(2\pi f t)\sin(2\pi f \tau)$ folgt für das Integral:

$$\begin{aligned}&\int_0^T \sin(2\pi f(t+\tau)) \sin(2\pi f t)\,dt \\ &= \cos(2\pi f \tau) \int_0^T \sin^2(2\pi f t)\,dt + \sin(2\pi f \tau) \int_0^T \sin(2\pi f t)\cos(2\pi f t)\,dt \\ &= \cos(2\pi f \tau)\left(\frac{T}{2} - \frac{\sin(4\pi f T)}{8\pi f} \right) + \frac{\sin(2\pi f \tau)\sin^2(2\pi f T)}{4\pi f}\end{aligned}$$

Der zeitliche Mittelwert

$$\langle x_k(t+\tau)\, x_k(t) \rangle = \frac{x_0^2(k)}{2} \cos(2\pi f \tau)$$

hängt über den Index k von der Realisierung ab. Der Prozess ist nicht ergodisch.

Aufgabe 11

GNU Octave-Skript zur Lösung der Aufgabe:

```
# Übungsblatt 1.2, Aufgabe 11: Wasserfall
# Statistische Analyse
#
# -----------------------------------------------------------------

  pkg load statistics

  file = mfilename();
  fid  = fopen([file, ".res"], "wt");

# Konstanten

  nbin = 50;   % Intervalle für die Häufigkeitsverteilung

# Daten einlesen

  [x, fs] = audioread([file, ".wav"]);

# Mittelwerte

  xm = mean(x); s2 = var(x); s  = sqrt(s2);

  fprintf(fid, "Mittelwert          = %8.5f\n", xm);
  fprintf(fid, "Varianz             = %8.5f\n", s2);
  fprintf(fid, "Standardabweichung  = %8.5f\n", s);

# Kurtosis und Schiefe

  b2 = kurtosis(x); g1 = skewness(x);

  fprintf(fid, "Kurtosis            = %8.5f\n", b2);
  fprintf(fid, "Schiefe             = %8.5f\n", g1);

# Häufigkeitsverteilung

  xmax  = max(abs(x));
  edges = linspace(-xmax, xmax, nbin + 1);
  xc    = 0.5 * (edges(1 : nbin) + edges(2 : end));

  N = hist(x, xc);

# Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

  dx   = mean(diff(edges));
  pdfx = N / (length(x) * dx);
  pdfg = normpdf(xc, xm, s);

# Ausgabe

  figure(1, "position", [100, 500, 600, 600],
            "paperposition", [0, 0, 12.5, 8.5]);
```

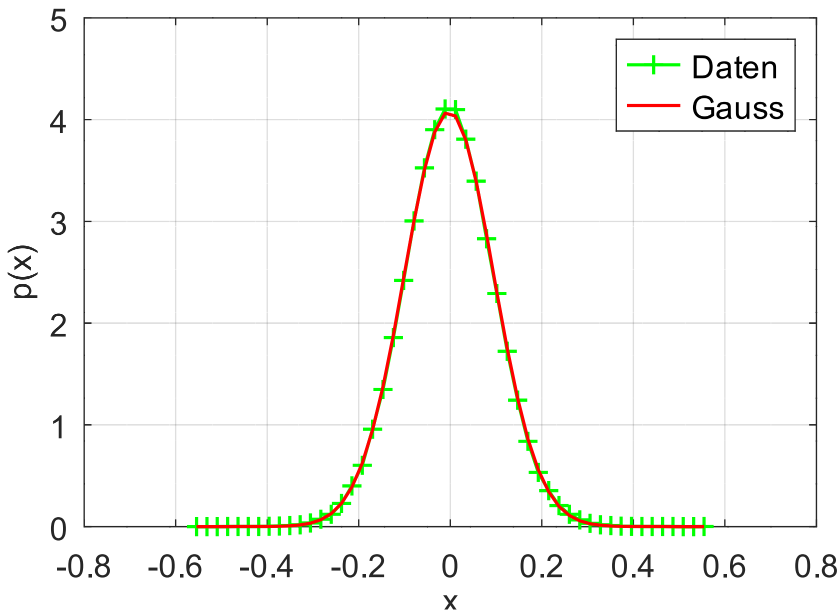

Abbildung 11.1: Wahrscheinlichkeitsdichte

```
  plot(xc, pdfx, "color", "green", "marker", "+", ...
       xc, pdfg, "color", "red");
  legend("Daten", "Gauss");
  grid;
  xlabel("x");
  ylabel("p(x)");
  print([file, ".svg"], "-dsvg", "-FArial:12");

  fclose(fid);
```

Die Ausgabedatei enthält die folgenden Werte:

```
Mittelwert           = -0.00279
Varianz              =  0.00957
Standardabweichung   =  0.09781
Kurtosis             =  3.10774
Schiefe              =  0.00994
```

Es handelt sich mit sehr guter Näherung um einen Gaußschen stochastischen Prozess. Das zeigt auch die in Abbildung 11.1 dargestellte Wahrscheinlichkeitsdichte.

Aufgabe 12

GNU Octave-Skript zur Lösung der Aufgabe:

```
# Übungsblatt 1.2, Aufgabe 12: Statistik stochastischer Prozesse
#
# ----------------------------------------------------------------

  file = mfilename();
```

```
  fid  = fopen([file, ".res"], "wt");

# Daten einlesen

  data = dlmread([file, ".csv"]);

# Auswertung

  m    = mean(data);
  msq  = meansq(data);
  v    = var(data);
  kurt = kurtosis(data);
  skew = skewness(data);

  fprintf(fid,
          "                       x1         x2         x3   \n");
  fprintf(fid, "--------------------------------"
               "----------------\n");
  fprintf(fid, "Mean value:          %8.5f  %8.5f  %8.5f\n", m);
  fprintf(fid, "Mean square value:   %8.5f  %8.5f  %8.5f\n", msq);
  fprintf(fid, "Variance:            %8.5f  %8.5f  %8.5f\n", v);
  fprintf(fid, "Kurtosis:            %8.5f  %8.5f  %8.5f\n", kurt);
  fprintf(fid, "Skewness:            %8.5f  %8.5f  %8.5f\n", skew);

# Häufigkeitsverteilung

  figure(1, "position", [100, 100, 900, 350],
            "paperposition", [0, 0, 15, 10]);
  subplot(1, 3, 1);
     hist(data(:, 1), 30);
     title("x1");
     grid;
  subplot(1, 3, 2);
     hist(data(:, 2), 30);
     title("x2");
  subplot(1, 3, 3);
     grid;
     hist(data(:, 3), 30);
     title("x3");
     grid;
  print([file, ".svg"], "-dsvg", "-FArial:10");

  fclose(fid);
```

Abbildung 12.1 zeigt die Häufigkeitsverteilungen. Die Häufigkeitsverteilungen des ersten und des dritten stochastischen Prozesses zeigen in guter Näherung eine Normalverteilung.

Die Ausgabedatei enthält folgende Werte:

```
                        x1         x2         x3
------------------------------------------------
Mean value:          0.00113   -0.00730   0.49695
Mean square value:   4.00569    3.02051   4.22012
```

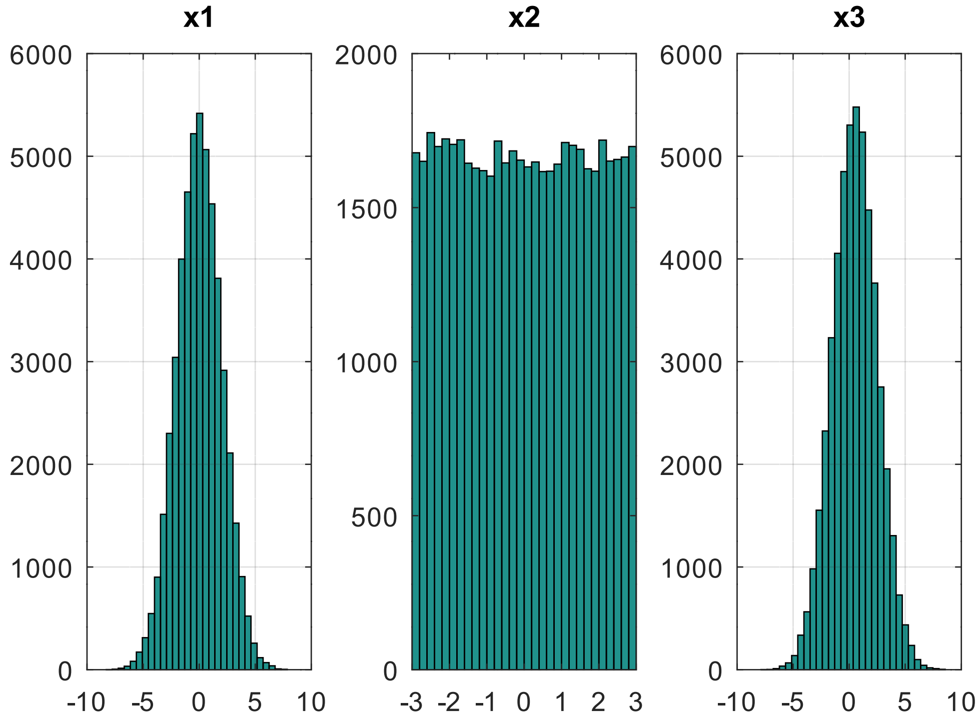

Abbildung 12.1: Häufigkeitsverteilungen

```
Variance:              4.00576   3.02052   3.97324
Kurtosis:              3.00207   1.78943   2.99244
Skewness:             -0.00638   0.00546  -0.00384
```

Die Zahlenwerte bestätigen, dass der erste und der dritte stochastische Prozess mit guter Näherung Gaußsche stochastische Prozesse sind.

Aufgabe 13

Es gilt: $R_{xy}(\tau)=E[x_k(t+\tau)y_k(t)]=E[x_k(t+\tau)x_k(t-\Delta t)]$

Mit der Substitution $t=\bar{t}+\Delta t$ folgt:

$$R_{xy}(\tau)=E[x_k(\bar{t}+\Delta t+\tau)x_k(\bar{t})]=R_{xx}(\tau+\Delta t)$$

Aufgabe 14

Zur Berechnung der Standardabweichung und der Korrelationen wird die Funktion **cov** verwendet. Sie liefert eine symmetrische Matrix, deren Diagonalelemente die Varianzen und deren Außerdiagonalelemente die Kovarianzen sind. Daraus können die gesuchten Größen berechnet werden.

```
# Übungsblatt 1.2, Aufgabe 14: Zylinder
#
# -----------------------------------------------------------
```

```
  file = mfilename();
  fid  = fopen([file, ".res"], "wt");

# Daten einlesen

  data = dlmread([file, ".csv"]);

# Rechnung

  m = mean(data);
  c = cov(data);
  s = sqrt(diag(c));

  r12 = c(1, 2) / (s(1) * s(2));
  r13 = c(1, 3) / (s(1) * s(3));
  r23 = c(2, 3) / (s(2) * s(3));

# Ausgabe

  fprintf(fid,
          "                          r          h          V\n");
  fprintf(fid,"-------------------------------------");
  fprintf(fid,"---------------\n");
  fprintf(fid,
          "Mittelwert:          %8.2f   %8.2f   %8.2f\n", m);
  fprintf(fid,
          "Standardabweichung:  %9.3e  %9.3e  %9.3e\n", s);


  fprintf(fid, "\nKorrelationskoeffizienten\n\n");
  fprintf(fid, "  Radius - Höhe:      %9.3e\n", r12);
  fprintf(fid, "  Radius - Volumen:   %9.3e\n", r13);
  fprintf(fid, "  Höhe   - Volumen:   %9.3e\n", r23);

  fclose(fid);
```

Die Ausgabedatei enthält folgende Ergebnisse:

```
                          r          h          V
----------------------------------------------------
Mittelwert:            5.00     100.00    7854.27
Standardabweichung:  5.027e-04  1.103e-03  1.587e+00

Korrelationskoeffizienten

  Radius - Höhe:      7.560e-02
  Radius - Volumen:   9.986e-01
  Höhe   - Volumen:   1.272e-01
```

Radius und Höhe sind nahezu unkorreliert, ebenso Höhe und Volumen. Radius und Volumen sind stark korreliert.