4.1 Prinzip der virtuellen Leistung

Lösungen

Aufgabe 1

Bei einer Biegung in der *xz*-Ebene gilt nach der Balkentheorie von Euler-Bernoulli für die Verschiebung

$$u(x,z)=\phi(x)z \quad .$$

Dabei ist $\phi(x)$ der Winkel, um den sich der Querschnitt um die *y*-Achse dreht. Für die Verzerrungen folgt:

$$\epsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{d\phi}{dx}z,\quad \epsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\phi(x)+\frac{dw}{dx}$$

In der Balkentheorie von Euler-Bernoulli wird die Scherung vernachlässigt:

$$\gamma_{xz}=0 \;\rightarrow\; \phi(x)=-\frac{dw}{dx}$$

Mit $\sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=\tau_{yz}=0$ folgt:

$$\sigma_x=E\,\epsilon_x=E\frac{d\phi}{dx}z=-E\,z\frac{d^2w}{dx^2}$$

$$\{\tilde{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}\}^T\{\boldsymbol{\sigma}\}=\tilde{\dot{\epsilon}}_x\sigma_x=E\,z^2\frac{d^2\tilde{\dot{w}}}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}$$

Damit berechnet sich die Bilinearform K zu

$$K[\tilde{\dot{\boldsymbol{v}}},\boldsymbol{u}]=K[\tilde{\dot{w}},w]=\int_0^L\int_A E\,z^2\frac{d^2\tilde{\dot{w}}}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}\,dA\,dx=\int_0^L E\,I_y\frac{d^2\tilde{\dot{w}}}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}\,dx$$

Bei einer Bewegung in der *xz*-Ebene ist die Verschiebung v in *y*-Richtung null. Damit gilt für die Bilinearform M:

$$M[\tilde{\dot{\boldsymbol{v}}},\boldsymbol{u}]=\int_V\rho\left(\tilde{\dot{u}}\,u+\tilde{\dot{w}}\,w\right)dV=\int_0^L\rho\int_A\left(z^2\tilde{\dot{\phi}}\,\phi+\tilde{\dot{w}}\,w\right)dA\,dx$$
$$=\int_0^L\rho\left(I_y\frac{d\tilde{\dot{w}}}{dx}\frac{dw}{dx}+A\,\tilde{\dot{w}}\,w\right)dx=M[\tilde{\dot{w}},w]$$

Mit der Substitution $x=L\xi$ gilt für den homogenen Balken mit konstantem Querschnitt:

$$M[\tilde{w}, w] = \rho L \int_0^1 \left(\frac{I_y}{L^2} \frac{d\tilde{w}}{d\xi} \frac{dw}{d\xi} + A \tilde{w} w \right) d\xi = \rho A L \int_0^1 \left(\frac{i_y^2}{L^2} \frac{d\tilde{w}}{d\xi} \frac{dw}{d\xi} + \tilde{w} w \right) d\xi$$

Dabei ist $i_y = \sqrt{I_y / A}$ der Trägheitsradius. Bei schlanken Balken ist der Trägheitsradius klein im Vergleich zur Länge des Balkens, weshalb der erste Term unter dem Integral meist vernachlässigt wird. Dann gilt:

$$M[\tilde{w}, w] = \rho A \int_0^L \tilde{w} w \, dx$$

Aufgabe 2

Für die Komponenten des Vektors der virtuellen Geschwindigkeit gilt:

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_{Rx} \\ \tilde{v}_{Ry} \\ \tilde{v}_{Rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_{0x} \\ \tilde{v}_{0y} \\ \tilde{v}_{0z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_x \\ \tilde{\omega}_y \\ \tilde{\omega}_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_{0x} + \tilde{\omega}_y z - \tilde{\omega}_z y \\ \tilde{v}_{0y} + \tilde{\omega}_z x - \tilde{\omega}_x z \\ \tilde{v}_{0z} + \tilde{\omega}_x y - \tilde{\omega}_y x \end{bmatrix}$$

Daraus berechnen sich die virtuellen Verzerrungsgeschwindigkeiten zu:

$$\tilde{\dot{\epsilon}}_x = \frac{\partial \tilde{v}_{Rx}}{\partial x} = 0, \quad \tilde{\dot{\epsilon}}_y = \frac{\partial \tilde{v}_{Ry}}{\partial y} = 0, \quad \tilde{\dot{\epsilon}}_z = \frac{\partial \tilde{v}_{Rz}}{\partial z} = 0$$

$$\tilde{\dot{\gamma}}_{xy} = \frac{\partial \tilde{v}_{Rx}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}_{Ry}}{\partial x} = -\tilde{\omega}_z + \tilde{\omega}_z = 0$$

$$\tilde{\dot{\gamma}}_{yz} = \frac{\partial \tilde{v}_{Ry}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{v}_{Rz}}{\partial y} = -\tilde{\omega}_x + \tilde{\omega}_x = 0$$

$$\tilde{\dot{\gamma}}_{xz} = \frac{\partial \tilde{v}_{Rx}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{v}_{Rz}}{\partial x} = \tilde{\omega}_y - \tilde{\omega}_y = 0$$

Aufgabe 3

Bei einem komplett frei geschnittenen Körper sind die Starrkörpergeschwindigkeiten $\tilde{\boldsymbol{v}}_R$ als virtuelle Geschwindigkeiten möglich. Da die virtuellen Verzerrungsgeschwindigkeiten für Starrkörpergeschwindigkeiten null sind, gilt

$$\{\tilde{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} = 0$$

für alle virtuellen Starrkörpergeschwindigkeiten. Damit reduziert sich das Prinzip der virtuellen Leistung auf

$$0 = \int_V \tilde{\boldsymbol{v}}_R \cdot \boldsymbol{f} \, dV + \int_A \tilde{\boldsymbol{v}}_R \cdot \boldsymbol{t} \, dA \quad \text{für alle } \tilde{\boldsymbol{v}}_R .$$

Für Starrkörpertranslationen in Richtung der Koordinatenachsen folgen daraus die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte:

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_R = \boldsymbol{e}_x \rightarrow \int_V f_x \, dV + \int_A t_x \, dA = \sum F_x = 0$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_R = \boldsymbol{e}_y \rightarrow \int_V f_y \, dV + \int_A t_y \, dA = \sum F_y = 0$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_R = \boldsymbol{e}_z \rightarrow \int_V f_z \, dV + \int_A t_z \, dA = \sum F_z = 0$$

Für Starrkörperrotationen um die Koordinatenachsen ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen für die Momente:

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_R = \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{r} \rightarrow \int_V (\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{f} \, dV + \int_A (\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{t} \, dA = 0$$

Mit der allgemein gültigen Beziehung

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$$

folgt:

$$\int_V \boldsymbol{e}_x \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}) \, dV + \int_A \boldsymbol{e}_x \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{t}) \, dA = \sum M_x^O = 0$$

Entsprechend folgt:

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_R = \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{r} \rightarrow \int_V \boldsymbol{e}_y \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}) \, dV + \int_A \boldsymbol{e}_y \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{t}) \, dA = \sum M_y^O = 0$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_R = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{r} \rightarrow \int_V \boldsymbol{e}_z \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}) \, dV + \int_A \boldsymbol{e}_z \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{t}) \, dA = \sum M_z^O = 0$$

Wird als Bezugspunkt für die Rotation ein anderer Bezugspunkt als der Ursprung gewählt, so ergibt sich das Momentengleichgewicht bezüglich diesem Bezugspunkt.